ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИ-ОПТИМАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Г. Д. Пенев[1], К. Мадани[2]

[1]Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д.39
penev@iias.spb.su

[2]Equipe de recherche en Intelligence
dans les Insrumentations et les Systèmes (I^{2}S)
SENART Institute of Technology - University PARIS XII
Avenue Pierre POINT – F-77127 Lieusaint – France
madani@univ-paris12.fr

УДК 62.50:681.5
Г. Д. Пенев, К. Мадани. **Построение квази-оптимальных инвариантных законов управления для нестационарных динамических систем с неизвестными параметрами и возмущениями** // Труды СПИИРАН. Вып 1, т.1. — СПб: СПИИРАН, 2002.
Аннотация. *Исследуется импульсная чувствительность нестационарных динамических систем. Рассматриваются функции чувствительности производных от выходных сигналов системы к скачкообразным изменениям управления в терминах коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих систему в переменных «вход-выход». Матрицы импульсной чувствительности применяются для решения задачи построения* ε *- оптимальных управлений, обеспечивающих заранее заданную точность отслеживания программных движений на любом интервале времени при наличии ограничений на выходные сигналы системы и их производные. Приводятся полные доказательства необходимых и достаточных условий робастности и* ε *- оптимальности рассмотренных в работе инвариантных законов управления в геометрической и детерминантной форме.* — Библ. 17 назв.

UDC 62.50:681.5
G. D. Penev, K. Madani. **A design of quasi-optimal invariant control laws for non-stationary dynaic systems with unknown parameters and disturbances** // SPIIRAS Proceedings. Issue 1, v.1. — SPb: SPIIRAS, 2002.
Abstract. *The impulse sensitivity of non-stationary linear dynamic systems is investigated. The functions of sensitivity of the output variables derivatives to jumps of piecewise-constant control are obtained in terms of coefficients of the equations, describing systems in "input-output" variables. The matrices of impulse sensitivity are applied to a solution of the problem of design of* ε *-optimal controls ensuring a beforehand specific accuracy of tracking of desirable movements on any time interval if there are restrictions on output signals and their derivatives. Necessary and sufficient conditions of robustness and* ε *-optimality of offered invariant control laws in geometric and determinant forms are proved.* — Bibl. 17 items.

1. Введение

Понятия чувствительности, инвариантности и робастности взаимосвязаны [1]. Основной задачей теории инвариантности является синтез систем, нечувствительных к возмущениям [2–5]. Теория чувствительности изучает способность системы менять свою реакцию на заданные входные воздействия при изменении параметров [6–8]. Кроме того, применение теории чувствительности позволяет решать некоторые задачи синтеза оптимальных робастных сис-

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

тем [7–8]. Сравнительно слабо исследована импульсная чувствительность динамических систем. Возможность построения самонастраивающихся систем на основе импульсной чувствительности выходного сигнала системы исследована в [9]. Подобный подход к решению задач робастного и адаптивного отслеживания программных движений с гарантированной точностью при наличии ограничений на выходные сигналы предложен в [10–12]. При этом для минимально-фазовых систем с одним входным и с одним выходным сигналом достаточно знание лишь относительной степени системы. Однако для систем с многими входными и выходными сигналами предполагалось, что неизвестная матрица импульсной чувствительности положительно-определенная или предварительно оценена.

В этой работе, являющейся продолжением [13], рассматриваются как минимально-фазовые, так и не минимально-фазовые системы. Относительно матрицы импульсной чувствительности системы предполагается только, что ее изменяющиеся во времени неизвестные элементы не выходят из заданных интервалов. Доказаны критерии разрешимости рассматриваемых задач управления.

2. Функции импульсной чувствительности

Рассмотрим системы управления, описываемые в переменных “вход-выход” дифференциальными уравнениями вида

$$y^{(N)} + A_{N-1}(t)y^{(N-1)} + \ldots + A_0(t)y = B_{N-1}(t)u^{(N-1)} + \ldots + B_0(t)u + f(t), \tag{1}$$

где $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^n$ — вектор-функции, описывающие, соответственно, вход (управление) и выход в момент времени $t \in T = (t_0, \hat{t})$, $\hat{t} \le +\infty$, вектор-функция $f(t) \in R^n$ описывает возмущения, $A_i \in R^{n\times n}$, $B_i \in R^{n\times m}$ — вещественные матрицы, $y^{(k)} = d^k y / dt^k$.

Предположим, что управление *u* кусочно-постоянная вектор-функция с точками скачка $t_j \in J \subset T$, $j = 1,2,\ldots$ Такие управления будем называть допустимыми и $U \overset{def}{=} \{u\}$. Используя обозначения

$$\tilde{A}_i = \sum_{k=0}^{N-i-1} (-1)^k \binom{i+1}{k} A_{i+k}^{(k)}, \quad \tilde{B}_i = \sum_{k=0}^{N-i-1} (-1)^k \binom{i+1}{k} B_{i+k}^{(k)} \tag{2}$$

можно получить следующую модель системы в пространстве состояний [14]:

$$\dot{x}_k = -\tilde{A}_{N-k}x_1 + x_{k+1} + \tilde{B}_{N-k}u, \; k = \overline{1,N}, \tag{3}$$

Здесь $y = x_1, x_{N+1} = f$, $x_k \in R^n$. Для определенности кусочно-постоянные функции будем считать непрерывными слева, например, $u(t) = u(t-0)$, и $\Delta u(t) = u(t+0) - u(t)$ будет обозначать величину скачка функции в точке $t \in J$.

Для достаточно гладких элементов матриц A_i, B_i в (1) имеют место соотношения

$$\Delta y^{(k)} = S_k(t)\Delta u(t), \quad k = \overline{1,N}, \tag{4}$$

при всех $t \in J$.

Определение 1. Матрицы S_k, $k = \overline{1,N}$, в (4) будем называть частными матрицами импульсной чувствительности системы (1).

Матрица S_k выражает чувствительность производной *k*–го порядка от выходного сигнала на скачки управления. Иная матрица, определяющая импульсную чувствительность произвольной замкнутой линейной системы вида

$$y^{(N)} + \Gamma_{N-1}y^{(N-1)} + ... + \Gamma_0 y = 0, \tag{5}$$

где $\Gamma_k \in R^{n\times n}$, $k = 0,1,...$, причем система (5) асимптотически устойчива, определяется равенством

$$S(t) = S_N(t) + \sum\nolimits_{k=1}^{N-1}\Gamma_k S_k(t). \tag{6}$$

Определение 2. Матрицу S в (6) будем называть общей матрицей импульсной чувствительности системы (1).

Теорема 1. *Если* $A_k, B_k \in C^{(k)}(T)$, $k = 0,1,...$, *то на любом интервале* $[t',t''] \subset T$ *имеют место следующие утверждения:*

1. *существует решение y уравнения (1),*
2. *частные и общая матрицы импульсной чувствительности являются непрерывными функциями от t, определяемые следующими соотношениями:* $S_1(t) = B_{N-1}(t)$,

$$S_k(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{k}\tilde{B}_{N-i}^{(k-i)}(t) - \sum\nolimits_{j=1}^{k-1}\sum\nolimits_{i=1}^{k-j}\binom{k-i}{j}\tilde{A}_{N-i}^{(k-i-j)}(t)S_j(t), \quad k = \overline{2,N-1},$$

$$S(t) = B_0(t) + \sum\nolimits_{k=1}^{N-1}(\Gamma_k - A_k(t))S_k(t), \qquad S_N(t) = B_0(t) - \sum\nolimits_{i=1}^{N-1}A_i(t)S_i(t), \tag{7}$$

3. *соотношения (4) являются тождествами относительно* $t \in T$.

Доказательство. Утверждение 1 следует из теоремы существования решений линейных дифференциальных уравнений, так как матрицы $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$ являются непрерывными функциями от *t*. Докажем утверждения 2, 3. Так как функции x_k в (3) непрерывны при всех $t \in J$ имеем $\Delta x_k(t) = 0, \Delta\dot{x}_k(t) = \tilde{B}_{N-k}(t)\Delta u(t)$. Используя (3), получаем

$$x_{k+1}(t) = y^{(k)}(t) + \sum\nolimits_{j=0}^{k-1}\sum\nolimits_{i=1}^{k-j}\binom{k-j}{j}\tilde{A}_{N-i}^{(k-i-j)}(t)y^{(j)}(t) - \sum\nolimits_{i=1}^{k}\tilde{B}_{N-i}^{(k-i)}u(t), \quad k = \overline{1,N},$$

для любого $t \in T \setminus J$. Отсюда получаем (7) для $k = \overline{1,N-1}$. Справедливость выражения для S_N следует из доказанного выше, так как в силу (1)

$$y^{(N)} + \sum\nolimits_{k=1}^{N-1}A_k y^{(k)} = B_0 u + f \tag{8}$$

для любого $t \in T \setminus J$. Тогда соотношения (4) имеют место при всех $t \in J$. Если $t \in T \setminus J$, то, используя выражения для x_{k+1}, получаем $\Delta y^{(k)}(t) = 0$ последовательно для $k = 1,...,N$, и теорема 1 доказана.

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Замечание 1. В (4) $S_k(t)=0$, $t\in T$, $k=1,...,M-1$, если степень системы (1) равна *M*, т.е. если $B_{N-1}(t)=0,...,B_{N-M+1}(t)=0$ при $t\in T$ и $B_{N-M}(t)\neq 0$.

3. Задача отслеживания программного движения с гарантированной точностью

Рассмотрим систему (1), в которой допустимыми управлениями, $u\in U$, являются ограниченные кусочно-постоянные функции. Матрицы $A_i(t), B_i(t)$, $i=\overline{0,N-1}$, предполагаются неизвестными.

Задача состоит в построении допустимого управления системой (1), обеспечивающего при всех $t\in T$ выполнение неравенств

$$\left\|y^{(k)}(t)-y_d^{(k)}(t)\right\|\le\varepsilon_k\ ,k=\overline{0,N-1},\ t\in T, \tag{9}$$

при заданных ограничений на выходные сигналы,

$$y^{(i)}(t)\in Y_i,\ i=\overline{0,N-1},\ t\in T, \tag{10}$$

где Y_i - заданные компактные в R^n множества допустимых значений $y^{(i)}$, $i=\overline{0,N-1}$, в (9) и всюду ниже $\|\cdot\|$ - евклидова норма.

Решение этой задачи основано на использовании вспомогательного неравенства

$$\left\|y^{(N)}-G\right\|\le\varepsilon. \tag{11}$$

Число $\varepsilon>0$ и функция

$$G(t)=y_d^{(N)}(t)-\sum\nolimits_{i=0}^{N-1}\Gamma_i(y^{(i)}(t)-y_d^{(i)}(t)) \tag{12}$$

в (11) будут определены так, чтобы справедливость всех неравенств (9) была бы обеспечена, если выполнено одно лишь неравенство (11) при всех $t\in T$. Поэтому выбор матриц Γ_i в (12) должен обеспечивать асимптотическую устойчивость системы (5),

$$(\det(\lambda^m E+\Gamma_{m-1}\lambda^{m-1}+...+\Gamma_0)=0\ )\Rightarrow(\operatorname{Re}\lambda<0). \tag{13}$$

В этом случае существуют такие положительные числа $C,\gamma>0$, что неравенство

$$\left\|e^{\Gamma(t-t_0)}\right\|\le Ce^{-\gamma(t-t_0)}, \tag{14}$$

в котором

$$\Gamma \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & E & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & E \\ -\Gamma_0 & -\Gamma_1 & -\Gamma_2 & ... & -\Gamma_{N-1} \end{bmatrix},$$

выполняется при всех $t \in T$.

При решении сформулированной задачи будут предполагаться выполненными следующие условия:

(c1) $A_i \in \hat{C}^{(i+1)}(T)$, $B_i \in \hat{C}^{(i+1)}(T)$, $i = \overline{0, n-1}$, $f(t) \in \hat{C}^{(1)}(T)$

($\hat{C}^{(k)}(T)$ — класс непрерывных функций с ограниченными непрерывными производными до порядка k);

(c2) $y_d(t) \in \hat{C}^{(N+1)}(T)$ *и при всех* $t \in T$ *имеют место импликации* $\|y_d^{(i)}(t) - y_i\| \le \varepsilon_i \Rightarrow y_i \in \Upsilon_i$, $i = \overline{0, N-1}$;

(c3) начальные значения программного движения y_d *и управления* $u(t_0+0)$ *такие, что выполнены неравенства* $\|\eta(t_0)\| < \varepsilon$, $\|y^{(i)}(t_0+0) - y_p^{(i)}(t_0+0)\| \le \tilde{\varepsilon}_i < \varepsilon_i$, $i = \overline{0, N-1}$, *где* $\eta(t) = y^{(N)} - G$;

(c4) параметры ε, γ, C *в (11), (14) и* $\tilde{\varepsilon}_i$ *в (c3) удовлетворяют условию*

$$\max(\varepsilon, \gamma(\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\varepsilon}_i^2)^{1/2}) \le \tfrac{\gamma}{C} \min_{0 \le i \le N-1} \varepsilon_i;$$

(c5) при всех $t \in T$ *матрица общей импульсной чувствительности удовлетворяет условию* $S(t) \in \tilde{S}$, *где*

$\tilde{S}$ ={$S \in R^{n \times m} \mid s'_{ij} \le s_{ij}(t) \le s''_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$}, *значения* s'_{ij}, s''_{ij} *заданы.*

4. Построение оптимальных и квази-оптимальных законов управления

Введем несколько определений, облегчающих формулировку результатов.

Определение 3. Некоторое управление $u \in U$ будет называться ε-оптимальным, если для всех $t \in T$ и какой-либо векторной функции $g(\eta) \in R^m$ имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(t) = -g(\eta(t)), \|\eta(t+0)\| \le \rho\varepsilon, 0 \le \rho < 1, \quad \text{если} \quad \|\eta(t)\| = \varepsilon, \\ &\Delta u(t) = 0, \quad \text{если} \quad \|\eta(t)\| < \varepsilon, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

и выполнены соотношения (9), (10).

Согласно (15) $T_\varepsilon = \{t \mid \|\eta(t)\| = \varepsilon, t \in T\}$ является множеством точек скачка векторных функций $u, \eta, y^{(k)}$.

Определение 4. Робастным в малой окрестности будет называться ε-оптимальное управление, для которого вектор $g(\eta)$ в (15) определен для любых неизвестных матриц A_i, B_i, $i=\overline{0,N-1}$, в (1), удовлетворяющих условиям (с5) при достаточно малых положительных значениях величин $\omega_{ij}=s''_{ij}-s'_{ij}>0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Определение 5. Вполне робастным (универсальным) будет называться ε-оптимальное управление, для которого вектор $g(\eta)$ в (15) определен для любых неизвестных матриц A_i, B_i, $i=\overline{0,N-1}$, в (1), удовлетворяющих условию (с5).

Отметим, что определение 4 накладывает некоторое ограничение на общую матрицу импульсной чувствительности системы (1) тогда, как вполне робастные
ε-оптимальные управления применимы ко всему классу систем (1), удовлетворяющих условию (с5).

Построение вполне робастных ε-оптимальных управлений основано на применении нижеследующих теорем.

Теорема 2. *При выполнении условий $(ci), i=\overline{1,4}$, любое управление, удовлетворяющее соотношениям (15), является ε-оптимальным.*

Доказательство. Из (с1) следует, что условие теоремы 1 выполнено, и, следовательно, существует единственное решение *y* уравнения (1) на любом интервале $[t',t'']\subset T$. Согласно (с3) и (15) имеем $\|\eta(t+0)\|<\varepsilon$ при $t=t_0$ и при любом $t\in T_\varepsilon$. Поскольку $\eta\in C(T\setminus T_\varepsilon)$, выполнено неравенство (11). Так как выполнено (с2), из теоремы 2 работы [15] следует, что имеют место соотношения (10), функции $y^{(k)}, k=\overline{0,N-1}$, ограниченны, и, следовательно, функция *G* в (12) ограниченна на множестве $T\backslash T_\varepsilon$. Так как η ограниченная функция, то из неравенства (11) следует, что функция $y^{(N)}$ ограниченна. Тогда управление *u,* удовлетворяющее (8) на $T\backslash T_\varepsilon$ является ограниченным в соответствии с (с1). Заметим теперь, что дифференцируя (8) с учетом (с1) и доказанного выше, устанавливаем ограниченность функций $y^{(N+1)}$ и $d\eta/dt$ на $T\backslash T_\varepsilon$. Так как $\|\eta(t+0)\|\le\rho\varepsilon$ при любом $t\in T_\varepsilon$, где $0\le\rho<1$, множество T_ε не имеет точки сгущения. Отсюда следует, что управление производные от выходного сигнала *y* являются допустимыми кусочно-постоянными функциями. Так как функции $u, y^{(k)}$, $k=\overline{0,N+1}$, $d\eta/dt$ равномерно ограниченны на $T\backslash T_\varepsilon$ и интервал $[t',t'']$ произвольный, соотношения (9)-(11) имеют место при любом $t\in T$, и теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если выполнены условия $(ci), i=\overline{1,5}$, то справедливы следующие утверждения:*

(I) Существует робастное в малой окрестности ε-оптимальное управление
вида (1) тогда и только тогда, когда

$$rank\, S^0=n,\ S^0=[s^0_{ij}]\in R^{m\times n}, s^0_{ij}=(s'_{ij}+s''_{ij})/2, \qquad (16)$$

и, следовательно, число m входных сигналов системы (1) не меньше числа n выходных сигналов;

(II) Существует вполне робастное ε-оптимальное управление системой вида (1) тогда и только тогда, когда

$$\max_{G\in\tilde{G}_1} \min_{S\in\tilde{S}} \quad \eta^T SG\eta > 0 \qquad (17)$$

для любых $\eta \in R^n$, $\|\eta\| = 1$, $\tilde{G}_1 = \{G \in R^{m\times n} | G = [g_i^T]_{i=1,\dots,n}, \|g_i\| \le 1\}$.

Перед доказательством теоремы 3 сформулируем и докажем теоремы 4-6. Введем следующие обозначения:

$$I_+(\eta) = \{i | \eta_i > 0, i = \overline{1,n}\}, \quad I_-(\eta) = \{i | \eta_i < 0, i = \overline{1,n}\},$$

$$\sigma_j^+ = \sum_{i\in I_+(\eta)} s'_{ij}\eta_i + \sum_{i\in I_-(\eta)} s''_{ij}\eta_i, \qquad (18)$$

$$\sigma_j^- = \sum_{i\in I_+(\eta)} s''_{ij}\eta_i + \sum_{i\in I_-(\eta)} s'_{ij}\eta_i, \qquad (19)$$

$$\sigma_j = \begin{cases} \sigma_j^+ & \textit{при } \sigma_j^+ > 0, \\ \sigma_j^- & \textit{при } \sigma_j^- < 0, \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (20)$$

Используя эти обозначения, построим закон вполне робастного ε-оптимального управления.

Теорема 4. *Если выполнены условия* $(ci), i = \overline{1,5}$, *и имеет место неравенство (17) для любого* $\eta, \|\eta\| = 1$, *то вполне робастное* ε*-оптимальное управление системой (1) может быть определено соотношениями*

$$\Delta u(t) = \begin{cases} -[\sigma_1(\eta),\dots,\sigma_m(\eta)]^T / \hat{\lambda}_1 & \textit{при} \quad t \in T_\varepsilon, \\ 0 \quad \textit{при} \quad t \notin T_\varepsilon, \end{cases} \qquad (21)$$

в которых

$$\hat{\lambda}_1 \ge \max_{S\in\tilde{S}} \max_{\|x\|=1} \|S^T Sx\|. \qquad (22)$$

При любом $t \in T_\varepsilon$ *выполнено неравенство*

$$\|\eta(t)\|^2 - \|\eta(t+0)\|^2 \ge \hat{\lambda}_1^{-1} \sum_{j=1}^m \sigma_j^2(\eta) > 0. \qquad (23)$$

Доказательство теоремы 4. Из теоремы 2 и определения 3 следует, что достаточно доказать справедливость импликации (21) $\Rightarrow$ (23). Учитывая определения y_d в (c2), η в (11), (12) и общей матрицы импульсной чувствительности S в (6), получаем

$$\Delta\eta(t) = S(t)\Delta u(t) \quad \textit{при } t \in T_\varepsilon. \qquad (24)$$

Для любого управления, удовлетворяющего соотношениям $\Delta u = -G\eta$, $G = G(\eta) \in R^{m\times n}$ при $t \in T_\varepsilon$ из равенства (24) следует, что

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\eta(t+0) = (E - SG)\eta(t). \tag{25}$$

Тогда

$$\|\eta(t+0)\|^2 = \|(E - S(t)G)\eta\|^2 = \|\eta\|^2 - 2\eta^T S(t)G\eta + \|S(t)G\eta\|^2. \tag{26}$$

Из (22) и (26) теперь следует, что

$$\|\eta(t)\|^2 - \|\eta(t+0)\|^2 = 2\eta^T S(t)G(\eta)\eta - \|S(t)G(\eta)\eta\|^2 \geq$$
$$\geq F(S(t), G(\eta)) \overset{def}{=} 2\eta^T S(t)G(\eta)\eta - \hat{\lambda}_1 \|G(\eta)\|^2. \tag{27}$$

Предположим, что $\hat{S} \in R^{n\times m}$ и $G(\eta) \in R^{m\times n}$ какие-либо матрицы, удовлетворяющие условию

$$F(\hat{S}, G(\eta)) = \max_{G\in\tilde{G}} \min_{S\in\tilde{S}} F(S,G), \tag{28}$$

где $\tilde{G} = \{G | G \in R^{m\times n}\}$.

Тогда справедливо, что $F(S(t), G(\eta)) \geq \min_{S\in\tilde{S}} F(S, G(\eta)) = \max_{G\in\tilde{G}} \min_{S\in\tilde{S}} F(S,G)$.

Учитывая (27), получаем неравенства

$$\|\eta(t)\|^2 - \|\eta(t+0)\|^2 \geq F(S(t), G(\eta)) \geq \max_{G\in\tilde{G}} \min_{S\in\tilde{S}} F(S,G). \tag{29}$$

Рассмотрим теперь оптимизационную задачу (28). Так как матрица *G* имеет вид $G = [g_i^T]_{i=1,\dots,m}$, получаем

$$F(S,G) = \sum_{j=1}^{m} \left(2\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\eta_i - \hat{\lambda}_1 g_j^T \eta\right) g_j^T \eta. \tag{30}$$

Оптимальное значение $\hat{S}$ в (28), удовлетворяющее равенству

$$\sum_{j=1}^{m} \left(2\sum_{i=1}^{n} \hat{s}_{ij}\eta_i - \hat{\lambda}_1 g_j^T \eta\right) g_j^T \eta = \min_{S\in\tilde{S}} F(S,G), \tag{31}$$

определяется соотношениями

$$\hat{s}_{ij} = \begin{cases} s'_{ij} & при \quad \eta_i g_j^T \eta > 0, \\ s''_{ij} & при \quad \eta_i g_j^T \eta < 0, \\ \beta_{ij} & при \quad \eta_i g_j^T \eta = 0, \end{cases} \tag{32}$$

где β_{ij} — любое число в интервале $[s'_{ij}, s''_{ij}]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. В силу (32) левая часть (31) зависит только от g_j для фиксированного значения *j*. Следовательно, имеют место равенства

$$F(\hat{S}, G) = \sum_{j=1}^{m} F_j(\hat{S}, g_j), \quad \max_{G\in\tilde{G}} F(\hat{S}, G) = \sum_{j=1}^{m} \max_{g_j \in R^n} F_j(\hat{S}, g_j), \tag{33}$$

где $F_j(\hat{S}, g_j) = \left(2\sum_{i=1}^{n} \hat{s}_{ij}\eta_i - \hat{\lambda}_1 g_j^T \eta\right) g_j^T \eta$, $j = \overline{1,m}$. Теперь, используя (18), (19), (32), получаем соотношения

$$F_j(\hat{S}, g_j) = (2\sigma_j^+ - \hat{\lambda}_1 g_j^T \eta) g_j^T \eta \quad при \quad g_j^T \eta > 0,$$
$$F_j(\hat{S}, g_j) = (2\sigma_j^- - \hat{\lambda}_1 g_j^T \eta) g_j^T \eta \quad при \quad g_j^T \eta < 0,$$
$$F_j(\hat{S}, g_j) = 0 \quad при \quad g_j^T \eta = 0.$$

Из этих соотношений следует, что

$$F_j(\hat{S}, g_j(\eta)) = \max_{g_j \in R^n} F_j(\hat{S}, g_j),$$

если $g_j(\eta)$, $j = \overline{1,m}$, удовлетворяет равенствам

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$
\left.\begin{array}{l}
g_j^T(\eta)\eta = \sigma_j^+ / \hat{\lambda}_1 \quad при \quad \sigma_j^+ > 0, \\
g_j^T(\eta)\eta = \sigma_j^- / \hat{\lambda}_1 \quad при \quad \sigma_j^- > 0, \\
g_j^T(\eta)\eta = 0 \quad в\ остальных\ случаях.
\end{array}\right\} \tag{34}
$$

Подставляя (34) в выражениях для F_j, получаем

$$
F_j(\hat{S}, g_j(\eta)) = (\sigma_j^+)^2 / \hat{\lambda}_1 \quad при \quad \sigma_j^+ > 0,
$$

$$
F_j(\hat{S}, g_j(\eta)) = (\sigma_j^-)^2 / \hat{\lambda}_1 \quad при \quad \sigma_j^- < 0,
$$

$$
F_j(\hat{S}, g_j(\eta)) = 0 \quad в\ остальных\ случаях.
$$

Согласно (20), (33) имеем

$$
F(\hat{S}, \hat{G}) = \frac{1}{\hat{\lambda}_1} \sum\nolimits_{j=1}^{m} \sigma_j^2. \tag{35}
$$

В силу (18)–(20), (34) управление (21) имеет вид $\Delta u(t) = G(\eta)\eta$, и в соответствии с (29), (35) справедливы неравенства

$$
\|\eta(t)\|^2 - \|\eta(t+0)\|^2 \geq \frac{1}{\hat{\lambda}_1} \sum\nolimits_{j=1}^{m} \sigma_j^2(\eta) > 0 \,. \tag{36}
$$

Заметим теперь, что из справедливости неравенства (17) следует, что существует такое $\vartheta > 0$, что

$$
min_{\|\eta\|=1}\, max_{G \in \tilde{G}_1}\, min_{S \in \tilde{S}}\, \eta^T S G \eta \geq \vartheta > 0.
$$

Подставив в (30) $\hat{\lambda}_1 = 0$, получаем

$$
\max_{G \in \tilde{G}_1} \min_{S \in \tilde{S}} \eta^T S G \eta = \varepsilon \sum\nolimits_{j=1}^{m} |\sigma_j(\eta)|, \tag{37}
$$

и, следовательно,

$$
\sum\nolimits_{j=1}^{m} |\sigma_j(\eta)| \geq \vartheta / \varepsilon > 0.
$$

Из (36), (37) следует, что существует такое число $\rho \in [0,1)$, что $\|\eta(t+0)\| \leq \rho < 1$, и справедливо (23). Теорема 4 доказана полностью.

Покажем теперь, что ε - оптимальные управления находятся в “малой” окрестности оптимального управления, решающего сформулированную выше задачу. Из (24) следует, что оптимальное управление, обеспечивающее наилучшие коррекции динамической ошибки $\eta(t)$, $\|\eta(t)\|^2 - \|\eta(t+0)\|^2 \to max$, может быть определено, как решение задачи оптимизации

$$
2\eta^T(t) S(t) \Delta u(t) + \|S(t)\Delta u(t)\|^2 \to min_{\Delta u}\,.
$$

Если

$$
rank\ S(t) = n, \quad t \in T, \tag{38}
$$

то оптимальное управление u_* определяется соотношениями

$$
\left.\begin{array}{l}
\Delta u_*(t) = -S^{\nabla}(t)\eta(t) \quad при \quad t \in T_{*\varepsilon}, \\
\Delta u_*(t) = 0 \quad при \quad t \notin T_{*\varepsilon},
\end{array}\right\} \tag{39}
$$

где $T_{*\varepsilon} = \left\{ t \middle| \left\| \eta_*(t) \right\| = \varepsilon \right\}$, $S^{\nabla} = S^T (SS^T)$, $\eta_*(t)$ - соответствующее $u_*(t)$ значение функции $\eta(t)$. Управление u_* обеспечивает наилучшие коррекции движения системы, но оно практически неприменимо, так как матрица $S(t)$ неизвестна.

Теорема 5. *Предположим, что выполнены условия (38) и* $(ci), i = \overline{1,5}$, u_* *определено соотношениями (39), и – любое* ε *- оптимальное управление и имеет место оценка*

$$\hat{\beta}_0 = sup_{t \in T} \left\| B_0^{\nabla}(t) \right\| < +\infty. \tag{40}$$

Тогда неравенство

$$\left\| u(t) - u_*(t) \right\| \le \hat{\beta}_0 \, (2\varepsilon + \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{\alpha}_k + 2\gamma_k))\varepsilon_k, \tag{41}$$

где $\hat{\alpha}_k = \sup_{t \in T} \left\| A_k(t) \right\|, \ \gamma_k = \left\| \Gamma_k \right\|, \ k = \overline{1, N-1},$ *справедливо при всех* $t \in T$.

Доказательство теоремы 5. Из (11), (12) следует, что

$$y^{(N)} - y_*^{(N)} + \sum_{k=0}^{N-1} \Gamma_k (y^{(k)} - y_*^{(k)}) = \eta - \eta_*, \quad t \notin T_\varepsilon \cup T_{*\varepsilon}.$$

Так как в рассматриваемых условиях выполнены неравенства (9), (11), имеем

$$\left\| y^{(N)}(t) \right\| \le 2\varepsilon + \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \varepsilon_k, \quad t \notin T_\varepsilon \cup T_{*\varepsilon}. \tag{42}$$

Кроме того, в силу (8) имеет место равенство

$$B_0(t)(u(t) - u_*(t)) = y^{(N)}(t) - y_*^{(N)}(t) + \sum_{k=1}^{N-1} A_k(t)(y^{(k)}(t) - y_*^{(k)}(t)).$$

Учитывая теперь (9), (11), (40), (42), получаем (41) при $t \in T \setminus \left(T_\varepsilon \cup T_{*\varepsilon} \right)$. Это означает, что справедливо (41) при всех $t \in T$, так как *u* и u_* кусочно-постоянные функции, и теорема 5 доказана.

Введем теперь обозначения

$s_{ij}^0 = (s_{ij}^{'} + s_{ij}^{''})/2, \quad r_{ij} = (s_{ij}^{''} - s_{ij}^{'})/2, \; D_\eta = diag\{\operatorname{sgn}\eta_1, ..., \operatorname{sgn}\eta_n\},$

$$\operatorname{sgn}\eta = \begin{cases} 1 \, if \ \eta \ge 0, \\ -1 \, if \ \eta < 0, \end{cases}$$

$x = D_\eta \eta, \; s_j^0 = [s_{1j}^0 ... s_{nj}^0]^T, \; r_j = [r_{1j} ... r_{nj}]^T, \; a_j = r_j + Ds_j^0, a_{m+j} = r_j - Ds_j^0, j = \overline{1,m}, A = (a_j^T), j = \overline{1,2m},$

$\tilde{D} = \{ D \in R^{n \times n} \, | \, D = diag(d_1, ..., d_n), \; d_k = \pm 1 \}$.

Следующая теорема определяет критерии существования ε-оптимальных управлений.

Теорема 6. *Неравенство*

$$min_{\|\eta\| = \varepsilon} \, max_{G \in \hat{G}_1} \, min_{S \in \hat{S}} \; \eta^T SG\eta \ge \vartheta > 0 \tag{43}$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

$(a) \quad \forall \eta \; \exists j (\sigma_j^+(\eta) > 0 \quad или \quad \sigma_j^-(\eta) < 0)$,

$(b) \quad \forall \eta \; \exists j (\sigma_j^+(\eta) \sigma_j^-(\eta) > 0),$

$(c) \quad \forall \eta \; \exists j (\left| \eta^T s_j^0 \right| > r_j^T x),$

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$(d)\quad \left.\begin{array}{l} x^T(r_j + D_\eta\, s_j^0) \ge 0 \\ x^T(r_j - D_\eta\, s_j^0) \ge 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = 0,$$

$(e)\quad \forall D \in \tilde{D}$ *система* $Ax \ge 0, x \ge 0, x \ne 0$ *не совместна*,

$(f)\quad \exists p \in R^{2m}, \nu \in R^n, p > 0, \nu > 0\, (A^T p = \nu)$,

(g) *существуют q линейно независимых строк матрицы A, содержащих такую* $q \times (q-1)$ *подматрицу*

$$B = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \ldots a_{i_1 j_{q-1}} \\ a_{i_2 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_2 j_{q-1}} \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i_q j_1} a_{i_q j_2} \ldots a_{i_q j_{q-1}} \end{bmatrix},$$

что выполнены неравенства $\Delta_k \Delta_{k+1} < 0, k = \overline{1, q-1}$, *где* $\Delta_k, k = \overline{1, q}$, *обозначает определитель порядка* $q-1$*, полученный из B удалением ее k-й строки.*

(В (a), (b), (c) предполагается, что вектор η нормирован, $\|\eta\| = 1$, и $j = \overline{1, m}$.)

Доказательство теоремы 6. Так как функции $\sigma_j^+(\eta), \sigma_j^-(\eta)$ в (18), (19) непрерывны и сфера $\{\eta \mid \|\eta\| = \varepsilon\}$ является компактным в R^n множеством, неравенство (43) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено

$$\max\nolimits_{G \in \hat{G}_1} \min\nolimits_{S \in \hat{S}} \eta^T S G \eta > 0$$

для любой точки η на этой сфере. В соответствии с (37) последнее утверждение справедливо тогда и только тогда, когда обеспечено условие (a). Действительно,

$$\max\nolimits_{G \in \hat{G}_1} \min\nolimits_{S \in \hat{S}} \eta^T S G \eta = \varepsilon \sum\nolimits_{j=1}^m |\sigma_j|,$$

где

$$\begin{array}{lll} \sigma_j = \sigma_j^+ > 0 & \textit{при} & \sigma_j^+ > 0, \\ \sigma_j = \sigma_j^- < 0 & \textit{при} & \sigma_j^- < 0, \\ \sigma_j = 0 & & \textit{в осталных случаях.} \end{array}$$

Но $\sigma_j^- \ge \sigma_j^+$, так как из (18), (19) следует, что

$$\sigma_j^- - \sigma_j^+ = \sum\nolimits_{j=1}^m (s_{ij}'' - s_{ij}') |\eta_i| \ge 0.$$

Поэтому $\sigma_j = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma_j^+ \le 0$ и $\sigma_j^- \ge 0$, т.е. условия (a), (b) равносильны условию (43). Докажем теперь критерий (c). Используя выражения для величин s_{ij}^0, r_{ij}, имеем

$$s_{ij}' = s_{ij}^0 - r_{ij}, \quad s_{ij}'' = s_{ij}^0 + r_{ij}, \quad |s_{ij} - s_{ij}^0| \le r_{ij},$$

и σ_j^+, σ_j^- можно представить в следующей форме:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_j^+ = \sum\nolimits_{i=1}^n (s_{ij}^0 \eta_{i\,i} - r_{ij} |\eta_i|), \\ \sigma_j^- = \sum\nolimits_{i=1}^n (s_{ij}^0 \eta_i + r_{ij} |\eta_i|). \end{array}\right\}$$

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Тогда (a) можно представить в виде (c). Условие (d) равносильно (c), так как (c) означает, что не существует такого $\eta \neq 0$, для которого справедлива левая часть условия (d). Так как $D_\eta \in \tilde{D}$ условие (d) равносильно условию (e), где можно считать, что вектор x не зависит от величины η. Применив теперь теорему 2.30 из работы [16], имеем следующую альтернативу: существует такое x, что

$$Ax \geq 0, x \geq 0, x \neq 0 \tag{44}$$

либо существует $\tilde{p}$, $\tilde{p} > 0, \tilde{A}^T \tilde{p} = 0$, где $\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} A^T & E \end{bmatrix}$.
Для того, чтобы доказать (g), заметим, что (44) можно представить в виде

$$Ax \geq 0, x \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 1. \tag{45}$$

Применив к системе (45) теорему Фан Цзы о несовместных линейных системах неравенств [17], получаем (g), и теорема 6 полностью доказана.

Доказательство теоремы 3. Утверждение (II) очевидно, так как достаточность условия (17) следует из теоремы 4, а необходимость следует из (26) в силу того, что $S(t) \in \tilde{S}$. Докажем теперь утверждение (I).

Необходимость условия (16). Допустим, что $rank\, S^0 < n.$ Тогда существует вектор $\eta, \|\eta\| = 1$, ортогональный ко всем векторам $s_j^0, j = \overline{1,m}.$ Согласно утверждению (II) существование робастного в малой окрестности $\varepsilon -$оптимального управления влечет справедливость неравенства (43) в достаточно малой окрестности S^0. Но тогда

$$0 = \left| \sum_{i=1}^{n} s_{ij}^0 \eta_i \right| > \sum_{i=1}^{n} r_{ij} |\eta_i| > 0,$$

и, следовательно, предположение, что $rank\, S^0 < n$ неверно, и необходимость условия (16) доказана.

Достаточность условия (16). Обозначим $s_j^0 = [s_{1j}^0 ... s_{nj}^0]^T$, $\hat{s}_j^0 = s_j^0 / \|s_j^0\|$, $x = [|\eta_1| ... |\eta_n|]^T$, $\hat{r}_j = r_j / \|r_j\|$. Так как выполнено (16), существует такое $\delta > 0$, что

$$min_{\|\eta\|=1}\, max_{1 \leq j \leq m} \left| \eta^T \hat{s}_j^0 \right| = \delta.$$

С другой стороны $x^T \hat{r}_j \|r_j\| / \|s_j\| \leq \|r_j\| / \|s_j^0\| \leq \rho = max_{1 \leq j \leq m} \|r_j\| / \|s_j\|$. При $\rho < \delta$ имеем

$$min_{\|\eta\|=1}\, max_{1 \leq j \leq m} \left| \eta^T \hat{s}_j^0 \right| > \rho.$$

Тогда при всех $\eta, \|\eta\| = 1$, существует такое $j = \overline{1,m}$, что $|\eta^T \hat{s}_j^0| > \rho \geq x^T \hat{r}_j \|r_j\| / \|s_j^0\|$, и выполнено условие (c). Применив теорему 6, получаем (43), где $\tilde{S}$ - окрестность S^0, определяемая неравенствами $\|r_j\| \leq \rho \|s_j^0\|$, $j = \overline{1,m}$.
Теорема 3 доказана полностью.

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ЛИТЕРАТУРА

[1] Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *А. А. Красовского*. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987 — с. 604–636.

[2] *Щипанов Г. В.* Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. — Автоматика и телемеханика, 1939, № 1, с. 49–66.

[3] *Лузин Н. Н., Кузнецов П. И.* К абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений. [Сообщ.] I, II – Докл. АН СССР, Нов. Сер. 1946, т. 51, № 4, с. 247–249; № 5, с. 331–333.

[4] *Петров Б. Н*. Избранные труды. — М.: Наука, 1983. т. 1. Теория автоматического управления.

[5] *Кухтенко А. И.* Проблема инвариантности в автоматике. — К., 1963.

[6] Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / Под ред. *Е. Н. Розенвассера и Р. М. Юсупова.* — М.: Энергия, 1971.

[7] *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981.

[8] *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем автоматического управления. — М.: Энергия, 1969.

[9] *Поспелов Г. С.* О принципах построения некоторых видов самонастраивающихся систем автоматического управления // Самонастраивающиеся автоматические системы. — М., 1964, с. 97-108.

[10] *Пенев Г. Д., Неокесарийский В. Н.* Алгоритмы адаптивного управления и оптимизация движения робота-манипулятора // Вопросы механики и процессов управления, вып.3 — Л., ЛГУ, 1979, с. 143–159.

[11] *Пенев Г. Д*. Адаптивное отслеживание программных движений нелинейных нестационарных систем // Вопросы механики и процессов управления, вып.10 — Л., ЛГУ.1987, с. 129–138.

[12] *Penev G. D.* Robust and Adaptive Control of Non-Linear and Quasi-Linear Systems. Preprints of the International Symposium of Non-Linear Control Systems (NOLCOS'95) Tahoe-City, California, USA, 1995, vol.1, p. 331–335.

[13] *Penev G. D.* Design of invariant control laws based on the impulse sensitivity of dynamic systems. Proceed. of the 6-th St. Petersburg Symposium on Adaptive Systems Theory. Sept. 7-9, 1999. Saint Petersburg, Russia, 1999, v.1, p. 156-159.

[14] *Пенев Г. Д.* Адаптивное управление квази-линейными нестационарными динамическими системами. Вестник ЛГУ, № 7, 1978, с. 43–48.

[15] *Penev G. D.* Neural robust control of dynamic systems. Proc. of the Intern. Conf. on Informatics and Control. St.Petersburg, SPIIRAS, v.2, 1997, p. 592–599.

[16] *Ашманов С. А.* Линейное программирование. — М.: Наука, 1981.

[17] *Fan Ky.* On systems of linear inequalities.// Linear Inequalities and Related Systems. Edited by*H. W. Kuhn and A. W. Taker*, 1956, p. 214–262.

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru