ПРОСТЕЙШИЕ ЦИКЛЫ В БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ ДОВЕРИЯ: РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ВОЗМОЖНОСТЬ ЕГО ПРОТИВОРЕЧИВОГО ЗАДАНИЯ

С.И. Николенко[1], А.Л. Тулупьев*[2]

[1]Санкт-Петербургский Государственный Университет
198904, Санкт-Петербург, Библиотечная пл., д. 2
<sergey@logic.pdmi.ras.ru>

[2]Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д. 39
<alt@iias.spb.su>

УДК 681.3
С.И. Николенко, А.Л. Тулупьев. **Простейшие циклы в байесовских сетях доверия: распределение вероятностей и возможность его противоречивого задания** // Труды СПИИРАН. Вып. 2. Том 1. — СПб: СПИИРАН, 2004.

Аннотация. *Одной из основных проблем развития теории байесовских сетей доверия является проблема наличия направленных циклов в графе этой сети. В частности, возникает проблема определения непротиворечивости такой сети. В работе рассматривается байесовская сеть, представляющая собой цикл из n вершин. Предлагаются методы работы с такой сетью. Доказывается, что в общем случае для определения непротиворечивости необходимо рассмотреть совокупное распределение вероятностей всех вершин графа. — Библ. 19 назв.*

UDC 681.3
S.I. Nikolenko, A.L. Tulupyev. **Simple Cycles in Bayesian Belief Networks: Probabilistic Distribution and an Inconsitent Assignment** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2. Vol. 1.— SPb: SPIIRAS, 2004.

Abstract. *One of the major problems in developing the theory of bayesian belief networks remains the problem of having directed cycles in the belief network graph. In this paper we consider a belief network consisting of a single cycle of n vertices. We suggest techniques for handling this network. We prove that in order to check consistency in the general case one has to consider the joint probability distribution of all the vertices in the graph. — Bibl. 19 items.*

1. Введение

В самых различных областях человеческой деятельности часто возникают проблемы прогнозирования эффектов тех или иных действий, или, наоборот, проблемы диагностирования причин тех или иных явлений. Один из подходов к решению таких задач предоставляет аппарат *байесовских сетей доверия*.

Основная идея байесовской сети доверия заключается в том, что слишком большое для прямого анализа множество событий (или булевых переменных) структурируется при помощи специального графа, где связаны друг с другом вершины, отвечающие зависимым друг от друга случайным событиям, а получающаяся структура поддаётся достаточно простому анализу. Существуют алгоритмы и для определения вероятностного распределения стоков графа (следствий из истоков-причин), и для анализа полученной информации о причинах для выявления следствий (т.н. *пропагация свидетельств*).

*Работа выполнена при частичной поддержке Фонда содействия отечественной науке по программе «Выдающиеся ученые. Кандидаты и доктора наук РАН», 2004 г.

Байесовские сети доверия — давно и хорошо изученный аппарат (см. [12], [15–19]). Байесовские сети доверия широко используются в биологии ([11], [9]), медицине ([13], [14]), для оценки рисков ([10]) и во многих других целях.

На схожих идеях основан и аппарат *алгебраических байесовских сетей*, к которым также применимы результаты настоящей работы. Этот аппарат был предложен В.И. Городецким, рассматривался в работах [1–7] и более подробно описан в [8].

Одной из основных трудностей, возникающих в описании аппарата байесовских сетей доверия, является наличие направленных циклов в соответствующем модели графе — так называемых *циклов обратной связи*. Как правило, байесовские сети определяются как сети, описываемые ацикличным графом, но проблема от этого не исчезает: в реальной модели циклы, тем не менее, могут возникнуть. Аппарат алгебраических байесовских сетей разрешает наличие циклов, но по-прежнему не даёт однозначных ответов на вопросы, возникающие при их рассмотрении.

Одним из таких вопросов является вопрос противоречивости алгебраической байесовской сети. Эксперты предоставляют лишь небольшую часть распределения вероятностей, остальное нужно достраивать по законам распределения вероятностей. Иногда данные, полученные от экспертов, оказываются противоречивыми.

В настоящей статье мы рассматриваем байесовскую сеть доверия, представляющую собой направленный цикл из n вершин; каждая вершина содержит булеву переменную (одно из двух означиваний атомарной пропозициональной формулы). Мы предлагаем метод определения совместных вероятностей событий, соответствующих вершинам этого цикла.

2. Основные определения

Начнём с определения байесовской сети доверия:

Байесовская сеть доверия (БСД) состоит из:

1. Множества *переменных* и множества *направленных рёбер* между переменными, образующих *направленный граф*;
2. Конечного набора взаимоисключающих состояний для каждой из переменных (в дальнейшем мы без потери общности предполагаем, что этот набор — {0,1});
3. Тензоры условных вероятностей $p(\tilde{x}|\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$, соответствующей каждой переменной x и её родителям $y_1,\ldots,y_n$.

В отличие от [12] мы не требуем, чтобы в графе байесовской сети отсутствовали циклы. Кроме того, мы также в настоящей статье не заостряем внимания на требовании d-разделимости, обычно накладываемое на распределения условных вероятностей — в ситуации, рассматриваемой в этой статье, это требование не играет существенной роли, а обобщение этого понятия и накладываемых им ограничений на случай наличия циклов в произвольной байесовской сети остаётся интересной открытой проблемой.

В дальнейшем мы рассматриваем исключительно простейшую циклическую бай-

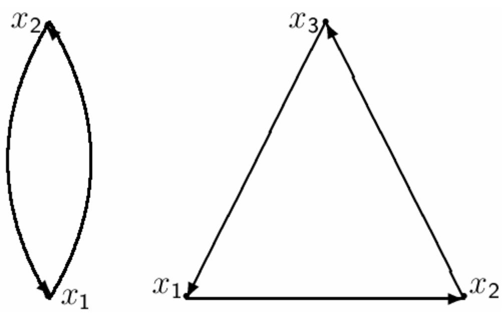

Рис. 1. Простейшие циклы — из двух и трёх вершин

есовскую сеть: цикл, состоящий из n вершин. В такой ситуации у каждой вершины x есть только один родитель y, а, значит, полным описанием распределения условных вероятностей, требуемым в определении байесовской сети, служат два числа: $p(x \mid y)$ и $p(x \mid \overline{y})$. Отметим, что вероятности $p(\overline{x} \mid y)$ и $p(\overline{x} \mid \overline{y})$ однозначно восстанавливаются по формуле $p(x \mid \widetilde{y}) = 1 - p(\overline{x} \mid \widetilde{y})$. На рис. 1 можно увидеть простейшие циклы, из двух и трёх вершин.

Одной из важнейших задач, возникающих при рассмотрении байесовской сети, является выяснение совокупного распределения вероятностей всех участвующих в сети вершин. Как правило, информации для полного определения этого распределения недостаточно; в таком случае нужно описать множество допустимых распределений, найти явный вид ограничений на неизвестные параметры. Эта задача для цикла из n вершин будет решена в следующих разделах настоящей работы.

3. Семантика цикла в байесовской сети

Рассмотрим цикл на n вершинах. Предположим, что, как обычно, заданы тензоры условных вероятностей вероятности из определения БСД:

$$p(x_2 \mid x_1),\ p(x_2 \mid \overline{x}_1),\ p(x_3 \mid x_2),\ p(x_3 \mid \overline{x}_2),\ \dots,\ p(x_1 \mid x_n),\ p(x_1 \mid \overline{x}_n).$$

Используя простейшие свойства вероятности, можно записать следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} p(x_1) = p(x_1 \mid x_n)p(x_n) + p(x_1 \mid \overline{x}_n)(1 - p(x_n)), \\ p(x_2) = p(x_2 \mid x_1)p(x_1) + p(x_2 \mid \overline{x}_1)(1 - p(x_1)), \\ \dots \\ p(x_n) = p(x_n \mid x_{n-1})p(x_{n-1}) + p(x_n \mid \overline{x}_{n-1})(1 - p(x_{n-1})). \end{cases}$$

Эта система имеет очень простую структуру и может быть решена за линейное время. Отметим, что все условные вероятности уже даны по условию, и мы решаем систему относительно маргинальных вероятностей $p(x_i)$. Обозначая $\xi_{ij} = p(x_i \mid \overline{x}_j) - p(x_i \mid x_j)$, видим, что система имеет вид $\mathbf{AP} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} p(x_1 \mid \overline{x}_n) \\ p(x_2 \mid \overline{x}_1) \\ p(x_3 \mid \overline{x}_2) \\ \vdots \\ p(x_n \mid \overline{x}_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы системы, разложив его по первой строке:

$$\det \mathbf{A} = 1 + (-1)^n \xi_{1n}\xi_{21}\xi_{32}\dots\xi_{n,n-1}.$$

Мы видим, что у системы может быть несколько решений, только если $\xi_{ij} = \pm 1$ для всех i (здесь и далее мы часто заменяем $p(x_0)$ на $p(x_n)$ и обратно для краткости). Это соответствует случаю, когда все x_i семантически эквивалентны, т.е. описывают одно и то же утверждение x. В этом случае каждая из переменных x_i соответствует либо x, либо $\overline{x}$, и, таким образом, $p(\tilde{x}_i \mid \tilde{x}_j)$ равно *0* или *1*. Тогда, действительно, на $p(x)$ не налагается никаких ограничений, и каждое значение $p(x)$ даст решение системы. Однако этот случай на практике бесполезен, т.к. нет никакой пользы (а на самом деле есть вред) от использования нескольких вершин графа для обозначения одного и того же события. По этим причинам в дальнейшем мы рассматриваем невырожденный случай.

Как мы уже видели, в невырожденном случае эта система даёт точечные вероятности всех вершин цикла. Мы также можем определить все условные вероятности $p(\tilde{x}_i \mid \tilde{x}_j)$, рекурсивно используя следующую формулу (мы вновь заменяем x_0 на x_n по необходимости):

$$p(x_i \mid x_j) = p(x_i \mid x_{i-1})p(x_{i-1} \mid x_j) + p(x_i \mid \overline{x}_{i-1})(1 - p(x_{i-1} \mid x_j)).$$

Следующая формула позволяет нам вычислить также совместные вероятности любых двух x_i: $p(\tilde{x}_i\tilde{x}_j) = p(\tilde{x}_i)p(\tilde{x}_j \mid \tilde{x}_i)$.

4. Ограничения на совместные распределения более чем двух вершин

В предыдущей части мы показали, что непротиворечивый цикл единственным образом определяет вероятности своих вершин и совместные вероятности любой пары вершин. Однако больше никакой информации о совместных распределениях вероятности он не предоставляет. Мы, конечно, можем наложить на совместные распределения обычные ограничения. Например, можно получить следующую систему линейных ограничений для цикла из трёх вершин:

$$\begin{cases} p(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ p(x_1x_2) - p(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ p(x_1x_3) - p(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ p(x_2x_3) - p(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ p(x_1) - p(x_1x_2) - p(x_1x_3) + p(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ p(x_2) - p(x_1x_2) - p(x_2x_3) + p(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ p(x_3) - p(x_1x_3) - p(x_2x_3) + p(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ 1 - p(x_1) - p(x_2) - p(x_3) + p(x_1x_2) + p(x_2x_3) + p(x_1x_3) - p(x_1x_2x_3) \ge 0. \end{cases}$$

Решая эту задачу линейного программирования (максимизируя и минимизируя $p(x_1x_2x_3)$ как целевую функцию над полученным выше множеством линейных ограничений), можно получить интервальную оценку вероятности $p(x_1x_2x_3)$. В данном случае задача линейного программирования тривиальна, однако в задачах большей размерности она существенно сложнее (количество неизвестных и ограничений экспоненциально растёт с ростом количества вершин в цикле). Фиксируя решение такой задачи (в данном случае — фиксируя $p(x_1x_2x_3)$), легко полностью вычислить распределение вероятности:

$$
\begin{aligned}
&p(\bar{x}_1 x_2 x_3) = p(x_2 x_3) - p(x_1 x_2 x_3),\\
&p(x_1 \bar{x}_2 x_3) = p(x_1 x_3) - p(x_1 x_2 x_3),\\
&p(x_1 x_2 \bar{x}_3) = p(x_1 x_2) - p(x_1 x_2 x_3),\\
&p(\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3) = p(x_3) - p(\bar{x}_1 x_2 x_3) - p(x_1 \bar{x}_2 x_3),\\
&p(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3) = p(x_2) - p(\bar{x}_1 x_2 x_3) - p(x_1 x_2 \bar{x}_3),\\
&p(x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) = p(x_1) - p(x_1 \bar{x}_2 x_3) - p(x_1 x_2 \bar{x}_3),\\
&p(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) = 1 - p(x_1) - p(\bar{x}_1 x_2) - p(\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3).
\end{aligned}
$$

Аналогичные соотношения верны и для циклов с произвольным количеством вершин, но если в данном случае пространство допустимых решений одномерно (фиксируя $p(x_1 x_2 x_3)$, можно однозначно определить всё распределение), то в циклах высшей размерности степеней свободы у такой системы будет больше. Подробное описание этих систем ограничений см. в [8].

Из приведённого выше алгоритма немедленно вытекает очевидный способ определения, противоречивы ли исходные данные, т.е. существует ли распределение вероятностей на переменных цикла, удовлетворяющее заданным условным вероятностям. Следует решить приведённую выше задачу линейного программирования, и, если решений нет, исходная задача противоречива, если есть — непротиворечива. В следующем разделе мы покажем, что в общем случае нельзя уменьшить размерность решаемой задачи. Иными словами, рассмотрение распределений вероятности меньшего порядка, чем n, может привести к неверным выводам.

5. Нижние оценки сложности проверки на непротиворечивость

В этом разделе мы представляем второй главный результат настоящей работы, а именно сложный пример, который показывает, что для корректного решения вопроса о противоречивости байесовского цикла необходимо рассмотреть совместное распределение вероятности всех его вершин, и никакое рассмотрение менее чем n вершин однозначно верного ответа не даст.

Рассмотрим цикл из n вершин со следующими условными вероятностями:

$$p(x_i \mid x_{i-1}) = 0,\ p(x_i \mid \bar{x}_{i-1}) = \frac{1}{n-2}, \qquad i = 2, \ldots, n-1.$$

$$p(x_1 \mid x_n) = \frac{1}{n-1},\ p(x_1 \mid \bar{x}_n) = \frac{1}{n-1},\ p(x_n \mid x_{n-1}) = \frac{1}{n-1},\ p(x_n \mid \bar{x}_{n-1}) = \frac{n-3}{(n-1)(n-2)}.$$

Система из раздела 3 в данном случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n-2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n-2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{(n-1)(n-2)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \\ \vdots \\ p(x_{n-1}) \\ p(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-2} \\ \frac{1}{n-2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n-2} \\ \frac{n-3}{(n-1)(n-2)} \end{pmatrix},$$

и, решая систему и вычисляя совместные вероятности $p(x_i x_j)$, мы получаем:

$$p(x_i) = \frac{1}{n-1}, \; i = 1,\ldots,n-1; \qquad p(x_n) = \frac{n-2}{(n-1)^2}.$$

$$p(x_i x_j) = 0, \; i \neq j, \; i,j \neq n; \qquad p(x_i x_n) = \frac{1}{(n-1)^2}, \; i \neq n.$$

Суть происходящего заключается в следующем: переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ делят всё вероятностное пространство на равные части с вероятностью каждой из них $\frac{1}{n-1}$. При этом x_n должно пересекаться с каждым из них, и $P(x_i x_n) = \frac{1}{(n-1)^2}$, так что, если сложить вероятности всех этих пересечений, общая вероятность была бы равна $p(x_n) = \frac{1}{(n-1)}$, но на самом деле она меньше, и, следовательно, исходные данные противоречивы.

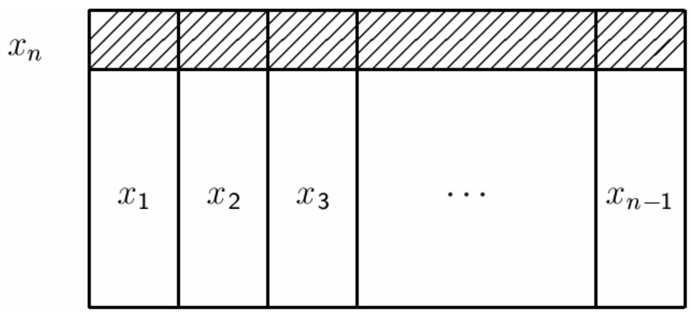

Рис. 2. Модель совместного распределения переменных

Но всякое совместное распределение менее чем *n* событий непротиворечиво: если эти переменные не включают x_n, можно просто разрезать пространство на требуемое количество частей вероятностями по $\frac{1}{(n-1)}$, а если они всё же включают x_n, то сумма вероятностей пересечений не больше, чем $\frac{n-2}{(n-1)^2}$, что в точности равно данной изначально вероятности. Таким образом, мы можем сконструировать непротиворечивую модель любого распределения менее чем *n* вершин, но общее распределение всё же противоречиво (наглядно модель взаимного расположения переменных показана на рис. 2).

Для полноты картины приведём также формальное доказательство противоречивости *n*-кратного распределения. Заметим, что

$$p(x_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{n-1} x_n) = p(x_1 x_n) - p(x_1 x_n x_2) - p(x_1 x_n \bar{x}_2 x_3) - \ldots$$
$$\ldots - p(x_1 x_n \bar{x}_2 \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_{n-2} x_{n-1}) = p(x_1 x_n) = \frac{1}{(n-1)^2},$$

Труды СПИИРАН. 2004. Вып. 2. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2004. Issue 2. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

т.к. $p(x_1 x_n) = 0$, $i = 2,\ldots,n-1$. Аналогичные вычисления показывают, что

$$p(\overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{i-1} x_i \overline{x}_{i+1} \ldots \overline{x}_{n-1} x_n) = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Складывая все вероятности дизъюнктных подмножеств x_n, получаем

$$p(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} p(\overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{i-1} x_i \overline{x}_{i+1} \ldots \overline{x}_{n-1} x_n) = \frac{1}{n-1},$$

но $p(x_n) = \frac{n-2}{(n-1)^2} < \frac{1}{n-1}$, и мы пришли к противоречию.

6. Заключение

Мы рассмотрели простейшую ситуацию — изолированный цикл из n вершин в байесовской сети доверия. Для этой ситуации извлечение доступной информации о распределениях сводится к решению системы линейных уравнений с несложной структурой. Остаётся открытым вопрос о том, как в эти вычисления вмешаются остальные вершины сети, связанные с циклом, вопрос о вычислениях в нескольких “сцепленных” циклах и т.п.

В настоящей статье доказано, что для однозначного ответа на вопрос о непротиворечивости в общем случае необходимо рассматривать совместные распределения всех вершин сети. Однако не исключено, что существуют достаточные условия непротиворечивости, проверка которых будет проще, чем описанный здесь алгоритм, и не потребует восстановления всего распределения вероятностей над цепочками конъюнкций вида $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_{n-1} \tilde{x}_n$. Такие достаточные условия представляли бы интерес для практической реализации представленного аппарата. Их поиск также остаётся открытой проблемой. Кроме того, получающиеся задачи линейного программирования имеют вполне определённую структуру. Возможно, для этого подкласса задач удастся найти более эффективные алгоритмы, чем общие, либо переформулировать задачи так, чтобы стали очевидными более эффективные методы их решения.

Ещё одним вариантом поиска ответа на вопрос о непротиворечивости может стать численное стохастическое моделирование функционирования байесовской сети. Анализ сходимости результатов моделирования может дать вероятностное обоснование гипотезы о непротиворечивости или, напротив, с достаточной степенью достоверности опровергнуть её. Это предположение также предстоит исследовать.

Литература

[1] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети для представления и обработки знаний с неопределенностью // 4-я Санкт-Петербургская конференция Региональная информатика–95: Тез. докл. Ч.1. СПб., 1995. С.51–52.

[2] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Генерация выборки с заданным распределением зависимых случайных событий на основе алгебраической байесовской сети // 4-я Санкт-Петербургская конференция Региональная информатика-95: Тез. докл. Ч.1. СПб., 1995. С.50–51.

[3] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость баз знаний с интервальной мерой вероятности // 4-я Санкт-Петербургская конференция Региональная информатика-95: Труды. СПб., 1996.
[4] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью. // РАН. Изв. акад. наук. Теория и системы управления. 1997. Т.5. С.33–42.
[5] *Городецкий В.И.* Моделирование недоопределенных знаний // SCM'98: Сборник докладов. Т.1. СПб., 1998. С.98–102.
[6] *Городецкий В.И.* Интервальные вероятностные меры неопределенности в инженирии знаний // Теоретические основы и прикладные задачи интеллектуальных информационных технологий. СПб.: СПИИРАН, 1998. С.44–58.
[7] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость баз знаний с количественными мерами неопределенности // КИИ'98. Сборник научных трудов. Т.1. Пущино, 1998. С.100–106.
[8] *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети. Логико-вероятностный подход к моделированию баз знаний с неопределённостью. СПб.: СПИИРАН, 2000. 292 с.
[9] *Firedman N., Barash Y..* Context-Specific Bayesian Clustering for Gene Expression Data // Journal of Computational Biology. 2002. Vol.9. P. 169–191,
[10] *Fenton N.E., Neil M.* Making Decisions: Using Bayesian Nets and MCDA // Knowledge-Based Systems. 2001. Vol. 14/ P.307–325.
[11] *Friedman N., Linial M., Nachman I., and D. Pe'er.* Using Bayesian Networks to Analyze Expression Data // Journal of Computational Biology. 2000. Vol. 7. P. 601–620.
[12] *Finn V. Jensen.* Bayesian Networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, 2002.
[13] *Lucas P.* Comparison of rule-based and Bayesian network approaches in medical diagnostic systems. // Artificial Intelligence in Medicine (AIME2001) / S. Quaglini, P. Barahona, S. Andreassen (eds.). LNAI2101. Berlin: Springer, 2001. P. 283–292.
[14] *Lucas P.* Bayesian model-based diagnosis. Technical Report, 2000. // International Journal of Approximate Reasoning. 2001. Vol. 27(2). P. 99–119).
[15] *Patterson D.W.* Introduction to Artificial Intelligence and Expert Systems. Prentice-Hall International, 1990. 450 p.
[16] *Pearl J.* How to Do with Probabilities what People Say You Can't // Artificial Intelligence Applications. / Ed. Weisbin C.R. // IEEE, North Holland. 1985. — pp. 6–12.
[17] *Pearl J.* Probabilistic Reasoning Using Graphs // Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Eds. Bouchon B., Yager R.R. Berlin etc., Springer-Verlag, 1987. P.201–202.
[18] *Pearl J.* Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1988.
[19] *Pearl J., Geiger D.* On the Logic of Causal Models // Machine Intelligence & Pattern Recognition (Uncertainty in Artificial Intelligence 4). / Eds. Kanal L.N., Lemmer J.F. 1990. Elsevier Science Publishers B.V., North Holland. Vol. 9. P.3–14.