ВЕРОЯТНОСТНАЯ СЕМАНТИКА БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПОЧКИ ФРАГМЕНТОВ ЗНАНИЙ

С.И. Николенко[1], А.Л. Тулупьев[1,2]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет
198904, Санкт-Петербург, Библиотечная площадь., д. 2
<sergey@logic.pdmi.ras.ru>

[2]Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия ВО, д. 39
<alt@iias.spb.su>

УДК 681.3
С.И. Николенко, А.Л. Тулупьев. **Вероятностная семантика байесовских сетей в случае линейной цепочки фрагментов знаний** // Труды СПИИРАН. Вып. 2, т. 2. — СПб.: Наука, 2005.
Аннотация: *В статье подробно рассмотрены байесовские сети, представляемые в виде линейной цепочки фрагментов знании. Рассмотрены как байесовские сети доверия, основанные на условных вероятностях, так и алгебраические байесовские сети, основанные на маргинальных совместных вероятностях. Показана взаимосвязь между этими объектами. Явно выписаны семейства вероятностей, отвечающих линейным цепочкам фрагментов знаний в обоих случаях. — Библ. 29 назв.*

UDC 681.3
S.I. Nikolenko, A.L. Tulupyev. **Probabilistic semantics of Bayesian networks in the case of a linear chain of knowledge patterns** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2005.
Abstract: *The article considers in detail Bayesian networks that may be represented as linear chains of knowledge patterns. We study both Bayesian belief networks, based on the conditional probabilities, and algebraic Bayesian networks, based on the joint marginal probabilities. We show relations between these two objects and explicitly describe the families of distributions corresponding to linear chains of knowledge patters in both cases. — Bibl. 29 items.*

1. Введение

Алгебраические байесовские сети (АБС) и байесовские сети доверия (БСД) — важный инструмент в обработке знаний с неопределённостью. История БСД началась с работ Дж. Пиэрла, который в публикациях [25]28] и др. дал систематическое описание этого аппарата. Рассмотренные в [1–7, 11, 12] АБС во многом схожи с БСД, однако имеют более богатую семантику, допускают использование интервальных оценок вероятностей и за счёт разработанных алгоритмов поддержания непротиворечивости допускают представление циклов из фрагментов знаний.

В процессе изучения аппарата АБС иногда возникают проблемы понимания, связанные с отсутствием хорошо разработанного и систематизированного аппарата несложных примеров и частных случаев. Кроме того, алгоритмы для обработки частных случаев могут оказаться значительно эффективнее общих алгоритмов, яснее и проще для реализации. Важные частные случаи могут использоваться достаточно часто, чтобы отдельное их рассмотрение заслуживало внимания.

В настоящей статье мы рассмотрим один из таких частных случаев — линейную цепочку фрагментов знаний в алгебраической байесовской сети и байесовской сети доверия. Этот случай представляет самостоятельный интерес, поскольку сам по себе является достаточно гибким инструментом. С другой стороны, вырождение дерева фрагментов в цепь приводит к существенному упрощению исследуемого объекта. В работе мы сконцентрируемся на вероят-

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ностной семантике таких цепей, которая, с одной стороны, служит несколько упрощённым введением в семантику АБС вообще, а, с другой стороны, понимание её полезно при непосредственной программной реализации АБС.

Кроме АБС, мы в настоящей статье рассмотрим также вероятностную семантику линейных цепочек узлов в БСД. По тематике БСД существует множество вводных курсов, монографий и учебных пособий (правда, все они издаются за рубежом и практически недоступны российским читателям), но, как правило, в них либо пренебрегают вероятностной семантикой, либо она играет второстепенную роль. Мы хотим обратить внимание изучающих эти аппараты на некоторые теоретические аспекты, поскольку они играют важную роль и в программной реализации, и для дальнейшего осмысления теоретического материала.

2. АБС и БСД как подходы к моделированию баз фрагментов знаний с неопределенностью

Архитектура обоих подходов — и АБС, и БСД — в данном случае одинакова: это вероятностные модели баз фрагментов знаний. В БСД моделью фрагмента знаний является одно из представлений тензора условной вероятности, т.е. многомерная таблица из условных вероятностей узлов-потомков при условии различных означиваний узлов-предков. При этом интервальные оценки плохо инкорпорируются в условно-вероятностные математические модели ФЗ. Но есть и положительные черты — не надо решать сложные вопросы о непротиворечивости вероятностных означиваний.

Вследствие этого БСД обычно изображают в виде направленного графа, узлами которого являются атомарные пропозициональные формулы, а рёбра указывают на причинно-следственную связь между суждениями (для задания БСД должны быть заданы условные вероятности узла-стока при условии всевозможных означиваний узлов-истоков). Как правило, на БСД накладываются также дополнительные условия независимости, так, чтобы узлы сети, не связанные между собой (слова «не связанные» употреблены в весьма специальном смысле; подробнее об условиях независимости и понятии d-разделимости см. [20–22, 27–29]), были условно независимы относительно набора узлов, их разделяющих.

В АБС моделью фрагмента знаний является одно из представлений тензора совместной вероятности — идеал цепочек конъюнкций с распределением вероятностей над ним. Главное преимущество такого способа моделирования естественным образом вытекает из главного отличия АБС от БСД — возможность учёта и обработки интервальных оценок вероятностей элементов этого идеала. При таком подходе эта обработка — и априорный, и даже, по-видимому, апостериорный вывод — сводится к решению задач линейного программирования (см. [3–7, 10–13]).

В настоящей работе мы сосредоточимся на двух простейших случаях: случай изолированного фрагмента знаний и случай цепи ФЗ, имеющих общие элементы только попарно. Мы рассмотрим вероятностную семантику АБС- и БСД-моделей для каждого из этих случаев: таким образом, *целью* настоящей работы является описание распределений вероятностей и их семейств, задаваемых линейными цепями фрагментов знаний в БСД и АБС. Случаи эти, с одной стороны, достаточно просты для понимания, а с другой стороны, обязательно должны быть систематически проанализированы, так как никакая программная реализация этих аппаратов не сможет пройти мимо настолько базовых случаев, а анализ всяких более сложных конструкций неизбежно будет опираться на результаты, описанные в настоящей статье.

В выводах по работе мы упомянем одно из возможных перспективных направлений для практического развития и применения полученных результатов — представление (и его исследование) вероятностных зависимостей между бинарными ответами в психологическом тесте и степенью выраженности связанной с ними психологической черты.

Еще раз подчеркнем, что мы рассматриваем определенный класс байесовских сетей: АБС и БСД, построенные над пропозициональными формулами.

3. Основные обозначения

В дальнейшем мы будем, как правило, обозначать логические переменные через x,y,z,u,v,w. Мы обозначаем отрицание x через $\bar{x}$. $\tilde{x}$ обозначает либо x, либо $\bar{x}$, причём в рамках одной формулы все такие символы должны означать одно и то же (если они не являются индексами суммирования). Мы используем стандартные обозначения теории вероятностей — $p(x)$, $p(x \mid y)$.

Большими латинскими буквами — X,Y,Z — мы, как правило, обозначаем цепи конъюнкций переменных вида $X = x_1x_2...x_n$. Тильда над такой цепью означает, что оно может включать в себя отрицания переменных, а множество (равно как и отдельная переменная) с тильдой, употреблённое в каком-либо соотношении, означает на самом деле несколько соотношений, включающих в себя все возможные комбинации переменных и их отрицаний. Так, например, тензор условных вероятностей $p(\tilde{y} \mid \tilde{X})$, где $X = x_1x_2$, состоит из восьми условных вероятностей: $p(y \mid x_1x_2)$, $p(y \mid \bar{x}_1x_2)$, $p(y \mid x_1\bar{x}_2)$, $p(y \mid \bar{x}_1\bar{x}_2)$ плюс ещё четыре для $\bar{y}$: $p(\bar{y} \mid x_1x_2)$, $p(\bar{y} \mid \bar{x}_1x_2)$, $p(\bar{y} \mid x_1\bar{x}_2)$, $p(\bar{y} \mid \bar{x}_1\bar{x}_2)$.

Однако, прежде чем рассуждать о вероятностях, определённых на пропозициональных переменных, следует сказать несколько слов о том, что лежит в основе такого способа моделирования неопределённости отдельных суждений и фрагментов знаний, иначе говоря — о формализации вероятностей истинности пропозициональных формул.

4. Вероятность истинности пропозициональной формулы по Нильссону

Мы воспользуемся подходом Н. Нильссона [23] (в [17–19, 21] содержится более глубокая и строгая формализация указанного подхода); сам Нильссон в [24] вернулся к вопросу о вероятностях на пропозициональных формулах и, в частности, указал, что существовали работы по этой тематике и до его основополагающей публикации. Отметим, что на самом деле ещё Дж. Буль рассуждал о вероятностях над пропозициональными формулами [16]; изложение подхода Нильссона на русском языке доступно, например, в [9], внесшего концепцию *вероятностной логики* в исследования по искусственному интеллекту.

Содержательно подход Н. Нильссона состоит в следующем. Дан конечный набор пропозициональных формул. Все возможные истинностные означивания этого назовем *возможными мирами*. Все непротиворечивые означивания назовем *допустимыми мирами*. Рассмотрим множество допустимых миров как множество элементарных событий. Зададим на нем распределение вероятностей,

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

подчиняющихся двум требованиям: вероятности элементарных событий неотрицательны и сумма вероятностей всех элементарных событий равна единице. Тогда вероятностью истинности формулы будем считать сумму вероятностей тех допустимых миров, в которых она принимает значение «истина».

Формальное изложение подхода Н. Нильсона основано на использовании теоремы о СДНФ. Рассмотрим Q — множество квантов, т.е. множество всех возможных означиваний цепочек конъюнкций атомарных пропозициональных формул из заранее заданного алфавита — как множество элементарных событий. Зададим на нем исходное распределение вероятностей

$$p^{\circ} : Q \to [0;1],$$

такое, что

$$\forall (q \in Q) \;\; p^{\circ}(q) \geq 0;$$

$$\sum_{q \in Q} p^{\circ}(q) = 1.$$

Введем вероятность $p^{\circ} : 2^{Q} \to [0;1]$ следующим образом:

$$\forall (S \subseteq Q) \;\; p(S) := \sum_{q \in S} p^{\circ}(q).$$

На этом шаге мы получили вероятностное пространство $\left\langle Q, 2^{Q}, p \right\rangle$. Определим вероятностную меру на множестве F — множество всех возможных пропозициональных формул над вышеуказанным заданным алфавитом атомарных пропозициональных формул — следующим образом:

$$\forall (f \in F) \;\; p(f) = p(S(f)),$$

где функция $S(f)$ сопоставляет пропозициональной формуле f множество тех и только тех квантов, которые входят в СДНФ этой формулы. Такое множество по теореме о СДНФ существует и единственно.

Взяв за основу такое распространение вероятности на множество пропозициональных формул, мы получим новое вероятностное пространство: $\left\langle Q, F, p \right\rangle$. Эта структура вероятностного пространства по Нильссону задает вероятность над всеми пропозициональными формулами, построенными над множеством атомарных формул A.

Отметим, что, исходя из вышеописанного способа введения вероятности на пропозициональных формулах, мы получим $p(true) = 1$ и $p(false) = 0$, что согласуется с нашими интуитивными представлениями.

Теперь, формально объяснив происходящее, обратимся непосредственно к моделированию фрагментов знаний. Первым рассмотренным нами способом моделирования станут алгебраические байесовские сети, поскольку рассмотрение байесовских сетей доверия будет целесообразно проводить, уже изучив АБС и постоянно сравнения БСД с ними.

5. Фрагменты знаний — узлы алгебраической байесовской сети

Фрагмент знаний в АБС определяется следующим образом:

Определение. Пусть $\mathrm{X} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\} \subseteq \Phi_0, k \leq n$, — подмножество [некоторого заранее заданного алфавита] элементарных пропозиций и K — идеал цепочек конъюнкций над X, т.е. множество всевозможных различных конъюнкций длиной не более k, составленных из символов множества X без повторов и без различения порядка следования. Например, ФЗ третьего порядка выглядит так:

$$K_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}.$$

Пусть на множестве X введен частичный порядок «$\leq$», который отвечает порядку, задаваемому отношением включения. Частично упорядоченное множество $A = \{\mathrm{X}, < K, \mu >, \leq\}$, где μ — множество вероятностных мер [или множество интервальных оценок значений вероятностных мер], поставленных в соответствие конъюнкциям множества K , назовем *фрагментом знаний порядка* k.

Это означает, что изначально, на уровне базовых определений, в моделирование фрагментов знаний при помощи АБС заложено рассмотрение *семейств* распределений вероятностей (μ), а не единичных распределений, как в случае БСД (хотя существуют предпосылки к расширению формализма БСД так, чтобы он включал и интервальные оценки вероятностей).

Отметим, что для полного задания вероятностного распределения на всех формулах из Q достаточно задать вероятности цепочек, вошедших в соответствующий фрагмент знаний.

Вероятности остальных формул, по соображениям элементарной пропозициональной логики, будут через них выражаться: другие цепочки — за счёт применения, возможно, неоднократного, соотношений $p(x) = 1 - p(\bar{x})$ и $p(\bar{x}\tilde{Z}) = p(\tilde{Z}) - p(x\tilde{Z})$, а более сложные формулы — благодаря теореме о СДНФ.

Уже на уровне изолированного фрагмента знаний в АБС необходимо учитывать то, что сеть может оказаться противоречивой. Проверка непротиворечивости проводится посредством проверки ограничений, накладываемых на вероятности цепочек атомарных пропозициональных формул пропозициональной логикой (т.е. вытекающих из вложенности тех или иных цепочек друг в друга) и аксиомами вероятности. Приведём для ясности ограничения, накладываемые на вероятности цепочек положительных означиваний переменных в ФЗ из трёх переменных:

$$\begin{cases} p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\ p(x_1x_2) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\ p(x_1x_3) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\ p(x_2x_3) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\ p(x_1) - p(x_1x_2) - p(x_1x_3) + p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\ p(x_2) - p(x_1x_2) - p(x_2x_3) + p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\ p(x_3) - p(x_1x_3) - p(x_2x_3) + p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\ 1 - p(x_1) - p(x_2) - p(x_3) + p(x_1x_2) + p(x_2x_3) + p(x_1x_3) - p(x_1x_2x_3) \geq 0. \end{cases}$$

В случае, если значения вероятностей некоторых цепочек заданы не однозначно, а в виде интервальных оценок, проверка непротиворечивости происходит посредством решения задачи линейного программирования, имеющей в общем случае экспоненциальную от количества логических переменных сложность. Это соответствует проверке алгебраической байесовской сети из двух пересекающихся фрагментов знаний на непротиворечивость *в целом* (см. [3, 6, 11]) для определения различных видов непротиворечивости и более подробного их рассмотрения.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Подводя итог этому разделу, отметим, что рассмотренный изолированно фрагмент знаний в байесовской сети доверия соответствует семейству распределений вероятностей, каждое из которых полностью задаётся вероятностями, присвоенными квантам — цепочкам положительно означенных переменных. Однако не всякое присваивание этим вероятностям величин из отрезка [0;1] будет задавать непротиворечивый фрагмент знаний (т.е. будет соответствовать единой вероятностной мере, введённой на булевых формулах с соответствующими переменными): нужно, чтобы выполнялись линейные условия, вытекающие из тривиальных соображений теории вероятностей.

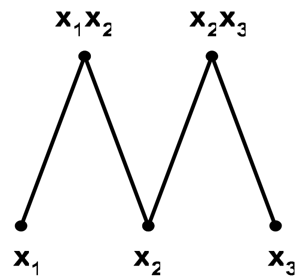

Рис.1. Два пересекающихся ФЗ второго порядка.

6. Линейные цепи фрагментов знаний АБС с точечными оценками

АБС представляет собой множество фрагментов знаний, построенных над подмножествами одного, общего множества переменных. Прежде всего, ограничим рассмотрение настоящей статьи случаем, когда квантам присваиваются только точечные оценки. В теории АБС также рассматривается случай интервальных оценок (см. [5, 6, 11, 12]), но для наших целей точечных оценок будет пока достаточно.

Для начала составим сеть из двух фрагментов знаний. Очевидно, что два ФЗ в АБС могут пересекаться несколькими различными способами — в зависимости от числа общих переменных. На Рис.1 изображён простейший случай, в котором фрагменты знаний пересекаются по одной переменной. С точки зрения моделируемой ситуации это означает, что два экспертных суждения включают в себя один и тот же объект, однако связывают его с непересекающимися множествами объектов.

В этом случае для непротиворечивости сети уже недостаточно непротиворечивости каждого из ФЗ в отдельности. Нужно также, чтобы в обоих фрагментах существовали согласованные вероятностные меры — те, в которых мера общей переменной будет одинаковой. Если, в соответствии со введённым выше определением, фрагментам знаний соответствуют множества $A_1 = \{\mathrm{X}_{,1} < K_1, \mu_1 >, \leq\}$ и $A_2 = \{\mathrm{X}_2, < K_2, \mu_2 >, \leq\}$, то всей АБС соответствует частично упорядоченное множество:

$$A = \{\mathrm{X}_1 \cup \mathrm{X}_2, < K, \{\mu : \mu|_{K_1} = \mu_1, \mu|_{K_2} = \mu_2\} >, \leq\},$$

где K — множество конъюнкций, составленных из переменных $\mathrm{X}_1 \cup \mathrm{X}_2$, а порядок продолжается тривиальным образом. Отметим, что в эту запись требование согласованности по общей переменной входит автоматически.

Наличие пересечения, разумеется, налагает дополнительные ограничения на возможные значения вероятностей квантов. Выпишем эти ограничения в случае, изображённом на Рис.1: два фрагмента знаний, каждый из двух переменных, пересекаются по переменной x_2 (здесь мы ведём речь о внешней непротиворечивости — см. [11, 12] для подробного рассмотрения):

$$\begin{cases} p(x_1x_2) \geq 0, \\ p(x_2x_3) \geq 0, \\ p(x_1) - p(x_1x_2) \geq 0, \\ p(x_2) - p(x_1x_2) \geq 0, \\ p(x_2) - p(x_2x_3) \geq 0, \\ p(x_3) - p(x_2x_3) \geq 0, \\ 1 - p(x_1) - p(x_2) + p(x_1x_2) \geq 0, \\ 1 - p(x_2) - p(x_3) + p(x_2x_3) \geq 0. \end{cases}$$

Отметим, что все эти ограничения тривиальным образом вытекают из ограничений, выписанных в предыдущем разделе для фрагмента знаний из трёх переменных, но не наоборот. Это связано с разницей между понятиями внутренней непротиворечивости (которую мы здесь проверяем) и непротиворечивости в целом АБС. Непротиворечивость в целом гарантирует наличие распределения, которое непротиворечивым образом продолжается на весь надстроенный над сетью фрагмент знаний. Однако, как уже отмечалось, её проверка в общем случае вычислительно очень сложна. Проверка внутренней непротиворечивости проще, но в общем случае не гарантирует наличие такого распределения. Однако в рассматриваемом в настоящей статье достаточно простом частном случае (а также вообще в случае сети без циклов) проверки внешней непротиворечивости оказывается достаточно (см. теорему 6 главы 3 [12]).

Действительно, в нашем тривиальном примере можно указать непротиворечивое продолжение всякого внутренне непротиворечивого распределения вероятностей на весь ФЗ. Легко видеть, что если положить $p(x_1x_3) = p(x_1x_2x_3) = \min\{p(x_1x_2), p(x_1x_3)\}$, то из выписанных выше аксиом будут следовать ограничения, соответствующие ФЗ из трёх переменных (для проверки последнего ограничения нужно сложить две последних аксиомы и вспомнить, что $1 - p(x_2) \geq 0$).

Все эти результаты допускают тривиальное обобщение на случай произвольного пересечения ФЗ произвольной размерности. Отметим лишь, что в полученной АБС не должно быть циклов — иначе результат о совпадении внешней непротиворечивости и непротиворечивости в целом не верен. Общий вид ограничений, накладываемых в таком случае на совокупное распределение вероятностей, получается простым объединением ограничений, внутренних для каждого из фрагментов знаний.

Подводя итог, отметим, что семейство распределений вероятностей, удовлетворяющих условию непротиворечивости в целом АБС из двух ФЗ, совпадает со множеством распределений, для которых верна внешняя непротиворечивость. Общий вид такого семейства проще всего записать как семейство, удовлетворяющее объединению ограничений, налагаемых на каждый из фрагментов знаний.

7. Пересечение ФЗ третьего порядка

В предыдущем разделе мы рассмотрели вероятностную семантику линейных цепей АБС, т.е. описали (в том числе и в общем виде) множества распределений вероятностей, отвечающие таким сетям. Прежде чем перейти к рассмотрению байесовских сетей доверия, рассмотрим ещё два частных случая, которые полезно иметь в виду и в теоретических рассмотрениях, и при программной реализации как наглядный пример таких множеств. Мы рассмотрим точечное пересечение фрагментов знаний размерностей 2 и 3 (см. Рис. 2), а также пересечение двух фрагментов знаний размерности 3 по ФЗ размерности 2 (см. рис. 3).

Вероятности элементов АБС, полученной точечным пересечением ФЗ размерностей 2 и 3, должны удовлетворять следующему набору ограничений:

$$\begin{cases} p(x_1x_2x_3)\ge 0, \\ p(x_3x_4)\ge 0, \\ p(x_1x_2)-p(x_1x_2x_3)\ge 0, \\ p(x_1x_3)-p(x_1x_2x_3)\ge 0, \\ p(x_2x_3)-p(x_1x_2x_3)\ge 0, \\ p(x_1)-p(x_1x_2)-p(x_1x_3)+p(x_1x_2x_3)\ge 0, \\ p(x_2)-p(x_1x_2)-p(x_2x_3)+p(x_1x_2x_3)\ge 0, \\ p(x_3)-p(x_1x_3)-p(x_2x_3)+p(x_1x_2x_3)\ge 0, \\ p(x_3)-p(x_3x_4)\ge 0, \\ p(x_4)-p(x_3x_4)\ge 0, \\ 1-p(x_1)-p(x_2)-p(x_3)+p(x_1x_2)+p(x_2x_3)+p(x_1x_3)-p(x_1x_2x_3)\ge 0, \\ 1-p(x_3)-p(x_4)+p(x_3x_4)\ge 0. \end{cases}$$

Вероятности элементов АБС, полученной пересечением двух ФЗ размерностей 3 по ФЗ размерности 2, должны удовлетворять таким ограничениям:

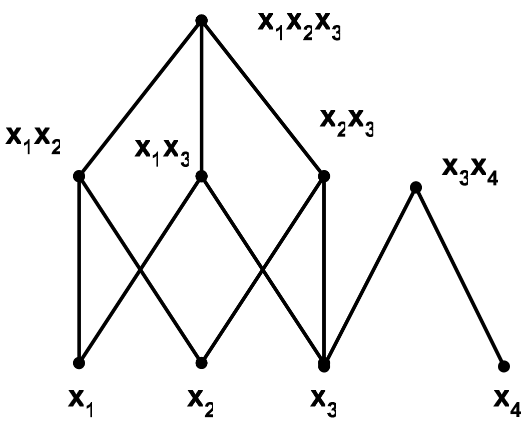

Рис. 2. Пересечение ФЗ размерностей 2 и 3.

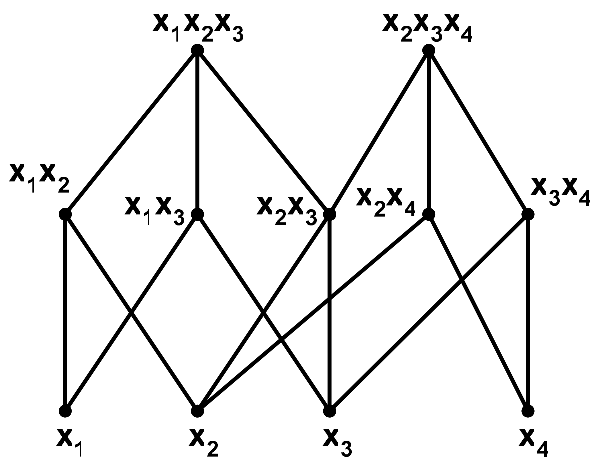

Рис.3. Пересечение ФЗ размерностей 3 и 3.

$$
\begin{cases}
p(x_1x_2x_3)\geq 0,\\
p(x_2x_3x_4)\geq 0,\\
p(x_1x_2)-p(x_1x_2x_3)\geq 0,\\
p(x_1x_3)-p(x_1x_2x_3)\geq 0,\\
p(x_2x_3)-p(x_1x_2x_3)\geq 0,\\
p(x_2x_4)-p(x_2x_3x_4)\geq 0,\\
p(x_3x_4)-p(x_2x_3x_4)\geq 0,\\
p(x_1)-p(x_1x_2)-p(x_1x_3)+p(x_1x_2x_3)\geq 0,\\
p(x_2)-p(x_1x_2)-p(x_2x_3)+p(x_1x_2x_3)\geq 0,\\
p(x_3)-p(x_1x_3)-p(x_2x_3)+p(x_1x_2x_3)\geq 0,\\
p(x_2)-p(x_2x_3)-p(x_2x_4)+p(x_2x_3x_4)\geq 0,\\
p(x_3)-p(x_2x_3)-p(x_3x_4)+p(x_2x_3x_4)\geq 0,\\
p(x_4)-p(x_2x_4)-p(x_3x_4)+p(x_2x_3x_4)\geq 0,\\
1-p(x_1)-p(x_2)-p(x_3)+p(x_1x_2)+p(x_2x_3)+p(x_1x_3)-p(x_1x_2x_3)\geq 0,\\
1-p(x_2)-p(x_3)-p(x_4)+p(x_2x_3)+p(x_3x_4)+p(x_2x_4)-p(x_2x_3x_4)\geq 0.
\end{cases}
$$

Теперь, уделив внимание важным частным случаям АБС, можно перейти к подробному рассмотрению байесовских сетей доверия — рассмотрению тем более необходимому, что в русскоязычной литературе вероятностная семантика байесовских сетей доверия практически не освещалась.

Узлы байесовской сети доверия

Узлы БСД с вероятностной точки зрения представляют собой атомарные пропозициональные формулы, оценки вероятностей совокупностей которых — основной предмет байесовских сетей вообще. Узлы БСД делятся на два класса. Первый класс — узлы, не имеющие предков. Как правило, они малочисленны по сравнению с узлами второго класса — узлами, которые имеют предшественников.

Узлы, не имеющие предков, задают маргинальное распределение вероятности вида $p(\widetilde{x})$. В нашем случае, когда $\widetilde{x}$ представляет собой пропозициональную формулу с одним из возможных означиваний: x или $\overline{x}$, — тензор мар-

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

гинальной вероятности однозначно задается числом $p \in [0;1]$, поскольку при известном $p(x) = p$, исходя из аксиоматики вероятностей, мы получим $p(\bar{x}) = 1 - p(x) = 1 - p$. Таким образом, узел БСД $\tilde{x}$, не имеющий предков, однозначно задает маргинальное распределение вероятностей вида $p(\tilde{x})$.

Часто для удобства принимают соглашение, что распределение вероятностей узла без предков может быть записано как $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x} \mid \varnothing)$, поскольку при рассуждениях о процессах, происходящих в БСД, удобно рассуждать об условных вероятностях, не обращаясь в редких случаях к упоминанию маргинальных. Запись $p(\tilde{x} \mid \varnothing)$ означает буквально: «вероятность истинности означивания $\tilde{x}$, обусловленного пустым множеством предков (предшественников)».

Узел БСД $\tilde{y}$ второго класса имеет непустое множество предков. Такой узел в общем случае характеризуется тензором условных вероятностей вида $p(\tilde{y} \mid \tilde{X}) = p(\tilde{y} \mid \tilde{x}_1 ... \tilde{x}_m)$, о котором будет подробнее рассказано в следующем пункте: этот тензор и есть представление фрагмента знаний в терминологии БСД.

8. Фрагмент знаний в байесовской сети доверия

ФЗ в БСД (другими словами, информация, соответствующая одному узлу в графе БСД) представляет собой тензор условных вероятностей $p(\tilde{y} \mid \tilde{X})$, представленный в виде таблицы точечных значений. Обычно таблица задаётся только половиной величин — вероятностями $p(y \mid \tilde{X})$ — так как другая половина однозначно по ним восстанавливается при помощи соотношения $p(\bar{y} \mid \tilde{X}) = 1 - p(y \mid \tilde{X})$.

Этот тензор предоставляет некоторые сведения о распределении вероятностей над цепочкой вида $p(\tilde{y}\tilde{X})$, однако, как правило, не определяет это распределение однозначно (чуть позже мы рассмотрим выводы, которые можно сделать из задания такого тензора, во всех деталях). Рассмотрим для примера задание тензора условных вероятностей для случая $X = x_1 x_2$ вкупе с базовыми аксиомами вероятности. Получим следующую формулу для вычисления $p(y)$:

$$p(y) = p(x_1 x_2) p(y \mid x_1 x_2) + p(x_1 \bar{x}_2) p(y \mid x_1 \bar{x}_2)) + p(\bar{x}_1 x_2) p(y \mid \bar{x}_1 x_2) + p(\bar{x}_1 \bar{x}_2) p(y \mid \bar{x}_1 \bar{x}_2).$$

Таким образом, $p(y)$ однозначно определяется по $p(y \mid \tilde{x}_1 \tilde{x}_2)$ и $p(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2)$, однако если они не определены, то и результата однозначного не получится. В общем случае, когда $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, мы получим классическую формулу теории вероятностей:

$$p(y) = \sum_{\tilde{X}} p(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 ... \tilde{x}_n) p(y \mid \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 ... \tilde{x}_n).$$

Заранее отметим, что при рассмотрении БСД даже в простейшем их виде на семейство вероятностей будут наложены дополнительные ограничения, связанные с требованием условной независимости узлов сети (в вышерассмотренном примере, в частности, для БСД предполагалось бы выполнение соотношения $p(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_1) p(\tilde{x}_2)$). При рассмотрении одного фрагмента знаний такие требования приводят к условной независимости истоков узла-фрагмента, и выписанные выше формулы превращаются в более удобные:

$$p(y)=p(x_1)p(x_2)p(y\mid x_1x_2)+p(x_1)(1-p(x_2))p(y\mid x_1\bar{x}_2))+$$
$$+(1-p(x_1))p(x_2)p(y\mid \bar{x}_1x_2)+(1-p(x_1))(1-p(x_2))p(y\mid \bar{x}_1\bar{x}_2),$$

что в общем случае описывается формулой

$$p(y)=\sum_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_n} p(\tilde{x}_1)p(\tilde{x}_2)\ldots p(\tilde{x}_n)p(y\mid \tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_n).$$

Также следует отметить, что эти условия, наложенные на всю сеть, частью которой является рассматриваемый нами ФЗ, гарантируют, что оценки вероятностей на входе ФЗ (в случае ФЗ из двух переменных это $p(x_1)$ и $p(x_2)$) будут точечными. А, следовательно, и полученные оценки $p(y)$ будут также точечными. Интервальные оценки величин вероятности в БСД в литературе систематически не рассматриваются. Всякий раз, когда возникает такая необходимость, исследователи прибегают к символьным вычислениям (да и то рассматривают интервальную оценку только одного из значений).

Вопросы непротиворечивости в данном случае тривиальны — нужно, чтобы все оценки лежали в интервале $[0;1]$, и выполнялись условия $p(\bar{y}\mid \tilde{X})+p(y\mid \tilde{X})=1$ (они, как правило, выполняются автоматически).

В случае, рассматриваемом в настоящей статье, можно ограничиться случаем даже не $\tilde{X}$, а $\tilde{x}$ — цепочки из одного символа, т.к. в цепи ФЗ узел может иметь только одного предшественника или никакого. Напомним также, что если узел не имеет предшественников (является истоком графа), то вероятность соответствующего события согласно аксиоматике БСД должна быть задана в рамках начальных данных.

Вернёмся теперь к строению семейства распределения вероятностей, который задаёт фрагмент знаний в БСД. Несмотря на то, что все величины вероятностей, входящих в задание тензора условных вероятностей $p(\tilde{y}\mid \tilde{X})$, точечные, сам тензор задает семейство распределений вероятностей над цепочками конъюнкций вида $\tilde{y}\tilde{X}$. Охарактеризуем строение этого семейства вероятностей.

Пусть $\Pr[\tilde{Z}]$ — это семейство всех возможных распределений вероятностей над означиваниями аргументных мест в цепочке конъюнкций $\tilde{Z}$. Согласно вероятностной аксиоматике и подходу Н. Нильссона к введению вероятностей на пропозициональных формулах будут выполнены следующие условия:

$$\forall p^{\circ}\in \Pr[\tilde{Z}]\begin{cases}\forall \tilde{Z}\quad p^{\circ}(\tilde{Z})\geq 0,\\ \sum\limits_{\tilde{Z}} p^{\circ}(\tilde{Z})=1.\end{cases}$$

Исходя из введенных обозначений, $\Pr[\tilde{X}]$ — семейство всех возможных распределений вероятностей над означиваниями аргументных мест в цепочке $\tilde{X}$, а $\Pr[\tilde{y}\tilde{X}]$ — семейство всех возможных распределений вероятностей над означиваниями аргументных мест в цепочке $\tilde{y}\tilde{X}=\tilde{y}\tilde{x}_1\ldots\tilde{x}_m$. Наша задача сводится к выделению из семейства $\Pr[\tilde{y}\tilde{X}]$ его подсемейства, определяемого тензором условных вероятностей $p(\tilde{y}\mid \tilde{X})$.

По определению условной вероятности имеет место соотношение: $\forall\tilde{y}\forall\tilde{X}\;\; p(\tilde{y}\mid \tilde{X})p(\tilde{X})=p(\tilde{y}\tilde{X})$. Тогда множество распределений вероятностей,

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

имеющее вид

$$\Pr[\tilde{y}\tilde{X}]_{p(\tilde{y}|\tilde{X})} := \left\{p \in \Pr[\tilde{y}\tilde{X}] : p(\tilde{y}\tilde{X}) = p(\tilde{y} \mid \tilde{X})p^{\circ}(\tilde{X}),\ \ p^{\circ} \in \Pr[\tilde{X}]\right\},$$

и будет являться искомым подсемейством распределений вероятностей над $\tilde{y}\tilde{X}$, индуцированным известным (заданным) тензором условных вероятностей $p(\tilde{y} \mid \tilde{X})$.

Отметим свойство распределений вероятностей, участвующих в определении подсемейства $\Pr[\tilde{y}\tilde{X}]_{p(\tilde{y}|\tilde{X})}$: $\forall\tilde{X}\ \ p(\tilde{X}) = p^{\circ}(\tilde{X})$. Равенство выводится следующим образом:

$$p(\tilde{X}) = p(y\tilde{X}) + p(\bar{y}\tilde{X}) = p(y \mid \tilde{X})p^{\circ}(\tilde{X}) + p(\bar{y} \mid \tilde{X})p^{\circ}(\tilde{X}) = \left(p(y \mid \tilde{X}) + p(\bar{y} \mid \tilde{X})\right)p^{\circ}(\tilde{X}) = p^{\circ}(\tilde{X}).$$

Итак, исходя из анализа отдельного узла байесовской сети доверия, можно сделать следующие выводы:

- если рассматриваемый узел не имеет предков, то он однозначно задает маргинальное распределение вероятностей; указанное распределение вероятностей (над одним аргументным местом) определяется одним числом $p \in [0;1]$;
- если рассматриваемый узел $\tilde{y}$ имеет предков $\tilde{X}$ и задан тензор условных вероятностей $p(\tilde{y} \mid \tilde{X})$, то этому узлу формально соответствует семейство распределений вероятностей вида $\Pr[\tilde{y}\tilde{X}]_{p(\tilde{y}|\tilde{X})}$; при рассмотрении узла в контексте всей БСД, к которой он принадлежит, существующие БСД-исчисления из семейства $\Pr[\tilde{y}\tilde{X}]_{p(\tilde{y}|\tilde{X})}$ выбирают лишь одно распределение вероятностей.

В следующем разделе мы перейдём собственно к случаю, являющемуся основным предметом рассмотрения: к цепочкам из фрагментов знаний.

9. Два связанных фрагмента знаний в байесовской сети доверия

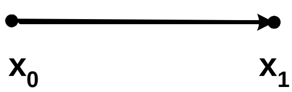

Рис. 4. БСД из двух узлов.

Сначала рассмотрим простейшую цепь узлов БСД, состоящую из двух узлов — $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_1$ (см. Рис. 4). Как уже было показано ранее, тензор условных вероятностей $p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)$ формально задает семейство распределений вероятностей над означиваниями $\tilde{x}_1\tilde{x}_0$:

$$\Pr[\tilde{x}_1\tilde{x}_0]_{p(\tilde{x}_1|\tilde{x}_0)} := \left\{p \in \Pr[\tilde{x}_1\tilde{x}_0] : p(\tilde{x}_1\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)p^{\circ}(\tilde{x}_0),\ \ p^{\circ} \in \Pr[\tilde{x}_0]\right\}.$$

Учитывая небольшое количество участвующих элементов, множество $\Pr[\tilde{x}_1\tilde{x}_0]_{p(\tilde{x}_1|\tilde{x}_0)}$ можно представить и в явном виде:

$$\begin{cases} p(x_1x_0) = p(x_1 \mid x_0)p, \\ p(x_1\bar{x}_0) = p(x_1 \mid \bar{x}_0)(1-p), \\ p(\bar{x}_1x_0) = p(\bar{x}_1 \mid x_0)p, \\ p(\bar{x}_1\bar{x}_0) = p(\bar{x}_1 \mid \bar{x}_0)(1-p), \end{cases}$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

где p представляет вероятность $p^{\circ}(x_0)$ и пробегает как связанная переменная единичный отрезок: $p \in [0;1]$.

При рассмотрении узла $\tilde{x}_1$ в контексте цепи из двух элементов мы исключаем из возможных распределений из семейства $\Pr[\tilde{x}_1\tilde{x}_0]_{p(\tilde{x}_1|\tilde{x}_0)}$ все, кроме одного, которое определяется известным распределением (характеристикой начального узла $\tilde{x}_0$) $p(\tilde{x}_0)$. Исходя из определения условной вероятности, БСД, состоящая из двух узлов $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_1$, задает единственное распределение вероятностей над $\tilde{x}_1\tilde{x}_0$:

$$p(\tilde{x}_1\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)p(\tilde{x}_0).$$

Для сравнения с явным видом семейства вероятностей $\Pr[\tilde{x}_1\tilde{x}_0]_{p(\tilde{x}_1|\tilde{x}_0)}$ полученный результат распишем более подробно:

$$\begin{cases} p(x_1x_0) = p(x_1 \mid x_0)p, \\ p(x_1\bar{x}_0) = p(x_1 \mid \bar{x}_0)(1-p), \\ p(\bar{x}_1x_0) = p(\bar{x}_1 \mid x_0)p, \\ p(\bar{x}_1\bar{x}_0) = p(\bar{x}_1 \mid \bar{x}_0)(1-p), \end{cases}$$

где $p = p(x_0)$, т.е. p здесь уже не связанная переменная, а известная величина. Именно за счет того, что p полагается известной величиной, несмотря на то, что тензор $p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)$ может представлять семейство распределений вероятностей, сама рассматриваемая БСД, в характеристике узла которой этот тензор участвует, задает единственное распределение вероятностей из семейства $\Pr[\tilde{x}_1\tilde{x}_0]$ или, что более точно, из семейства $\Pr[\tilde{x}_1\tilde{x}_0]_{p(\tilde{x}_1|\tilde{x}_0)}$. Хотя сеть целиком представляет единственное распределение вероятностей, элементы этой сети можно рассматривать и отдельно — в качестве своеобразных “чёрных ящиков”, или функций, которые получают на вход вероятности своих истоков и выдают вероятности стоков. В начале этого параграфа в качестве такой функции мы рассмотрели одиночный фрагмент знаний — узел $\tilde{x}_1$. Вполне ожидаемо оказалось, что он задаёт распределение вероятностей с одним параметром — вероятностью своего истока $\tilde{x}_0$.

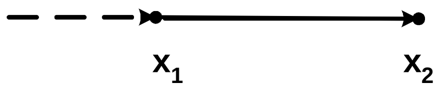

Рис.5. БСД из двух узлов с предками.

Конечно, сеть, состоящая всего из двух элементов — далеко не единственный случай погружения двух связанных фрагментов знаний в байесовскую сеть (собственно говоря, всякая сеть состоит из таких фрагментов, как граф состоит из рёбер и вершин, которые этими рёбрами соединяются). В рамках нашего рассмотрения, однако, другой случай всего один, и связан он с тем, что у узла $\tilde{x}_0$ может быть в рамках цепи предшественник (см. Рис.5). В таком случае данный фрагмент сети следует рассматривать именно как функцию от вероятности предшественника $\tilde{x}_0$. Мы не будем сейчас подробно на этом останавливаться, так как в дальнейшем приведём подробный разбор всех вообще байесовских сетей, представляющих собой цепи фрагментов знаний.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

10. Цепь из трёх фрагментов знаний в БСД и требования d-разделимости

В этом случае заданы тензор маргинальной вероятности $p(\tilde{x}_0)$ и два тензора условной вероятности $p(\tilde{x}_1 | \tilde{x}_0)$ и $p(\tilde{x}_2 | \tilde{x}_1)$ (см. Рис.6 для сравнения БСД и АБС в этом случае), исходя только из заданных тензоров маргинальной и условной вероятностей, мы можем привести следующее описание семейств вероятности из $\Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2]$, согласующихся с исходными данными:

$$\left\{ p^\circ \in \Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2] : \begin{array}{l} \forall\tilde{x}_0\ p^\circ(\tilde{x}_0) = \sum\limits_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2} p^\circ(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_0), \\ \forall\tilde{x}_0\forall\tilde{x}_1\ p^\circ(\tilde{x}_0\tilde{x}_1) = \sum\limits_{\tilde{x}_2} p^\circ(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_1 | \tilde{x}_0) \times p^\circ(\tilde{x}_0), \\ \forall\tilde{x}_1\forall\tilde{x}_2\ p^\circ(\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = \sum\limits_{\tilde{x}_0} p^\circ(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_2 | \tilde{x}_1) \times p^\circ(\tilde{x}_1), \\ \forall\tilde{x}_1\ p^\circ(\tilde{x}_1) = \sum\limits_{\tilde{x}_0\tilde{x}_2} p^\circ(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) \end{array} \right\}.$$

Поскольку, как было показано ранее, по $p(\tilde{x}_0)$ и $p(\tilde{x}_1 | \tilde{x}_0)$ распределение $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1)$ восстанавливается однозначно: $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_1 | \tilde{x}_0)p(\tilde{x}_0)$, причем $p(\tilde{x}_1) = \sum\limits_{\tilde{x}_0} p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1)$, а, следовательно, $p(\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_2 | \tilde{x}_1)p(\tilde{x}_1)$, описание множества распределений вероятностей над $\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ можно упростить:

$$\left\{ p^\circ \in \Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2] : \begin{array}{l} \forall\tilde{x}_0\forall\tilde{x}_1\ p^\circ(\tilde{x}_0\tilde{x}_1) = \sum\limits_{\tilde{x}_2} p^\circ(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1), \\ \forall\tilde{x}_1\forall\tilde{x}_2\ p^\circ(\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = \sum\limits_{\tilde{x}_0} p^\circ(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_1\tilde{x}_2) \end{array} \right\}.$$

Одним из частных результатов анализа представления тензоров совместной вероятности в теории алгебраических байесовских сетей ([4, 6, 11, 12]) является утверждение о том, что тензор вида $p^\circ(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2)$ однозначно задается набором маргинальных вероятностей положительно означенных цепочек конъюнкций: $p^\circ(x_0)$, $p^\circ(x_1)$, $p^\circ(x_2)$, $p^\circ(x_0x_1)$, $p^\circ(x_0x_2)$, $p^\circ(x_1x_2)$, $p^\circ(x_0x_1x_2)$.

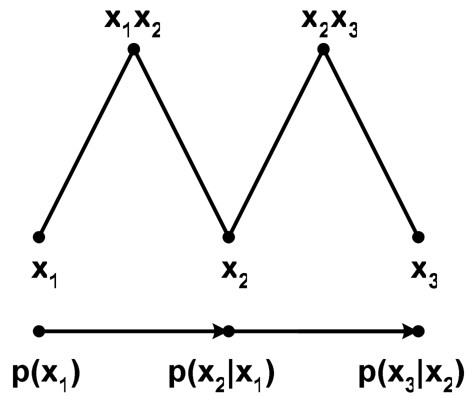

Рис.6. АБС и БСД из двух ФЗ на трёх переменных.

В случае рассматриваемой цепи из трех узлов пять из семи указанных вероятностей оказываются заданными точечно:

$$p^\circ(x_0) = p(x_0),$$
$$p^\circ(x_0x_1) = p(x_0)p(x_1 | x_0),$$
$$p^\circ(x_1) = p(x_0)p(x_1 | x_0) + p(\bar{x}_0)p(x_1 | \bar{x}_0),$$
$$p^\circ(x_1x_2) = p^\circ(x_1)p(x_2 | x_1),$$
$$p^\circ(x_2) = p^\circ(x_1)p(x_2 | x_1) + p^\circ(\bar{x}_1)p(x_2 | \bar{x}_1).$$

Величины же $p^\circ(x_0x_2)$ и $p^\circ(x_0x_1x_2)$ остаются неопределёнными, вернее, недоопределёнными. Дело в том, что аксиоматика вероятностей накладывает известные из теории АБС требования на величины вероятностей положительно-означенных цепочек конъюнкций (фактически эти ограничения базируются на формулах включений-исключений и тривиальных соображениях теории вероятностей):

$$\begin{cases} p^{\circ}(x_0x_1x_2)\geq 0, \\ p^{\circ}(x_0x_1)-p^{\circ}(x_0x_1x_2)\geq 0, \\ p^{\circ}(x_0x_2)-p^{\circ}(x_0x_1x_2)\geq 0, \\ p^{\circ}(x_1x_2)-p^{\circ}(x_0x_1x_2)\geq 0, \\ p^{\circ}(x_0)-p^{\circ}(x_0x_1)-p^{\circ}(x_0x_2)+p^{\circ}(x_0x_1x_2)\geq 0, \\ p^{\circ}(x_1)-p^{\circ}(x_0x_1)-p^{\circ}(x_1x_2)+p^{\circ}(x_0x_1x_2)\geq 0, \\ p^{\circ}(x_2)-p^{\circ}(x_0x_2)-p^{\circ}(x_1x_2)+p^{\circ}(x_0x_1x_2)\geq 0, \\ 1-p^{\circ}(x_0)-p^{\circ}(x_1)-p^{\circ}(x_2)+p^{\circ}(x_0x_1)+p^{\circ}(x_0x_2)+p^{\circ}(x_1x_2)-p^{\circ}(x_0x_1x_2)\geq 0. \end{cases}$$

Ограничения, представленные выше, зададут интервальные границы для величин $p^{\circ}(x_0x_2)$ и $p^{\circ}(x_0x_1x_2)$; в свою очередь, выбор одного из фиксированных значений одной из величин $p^{\circ}(x_0x_2)$ или $p^{\circ}(x_0x_1x_2)$ сузит (но необязательно сведет к точке) интервал возможных значений другой величины. Чтобы определить границы интервалов, в пределах которых могут изменяться величины $p^{\circ}(x_0x_2)$ или $p^{\circ}(x_0x_1x_2)$, требуется решить ряд задач линейного программирования.

Подводя промежуточный итог, отметим, что без учета дополнительных требований набор тензоров $p(\tilde{x}_0)$, $p(\tilde{x}_1\,|\,\tilde{x}_0)$ и $p(\tilde{x}_2\,|\,\tilde{x}_1)$ задает характеризующееся двумя степенями свободы подсемейство распределений вероятностей из $\Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2]$.

Однако для того, чтобы наша цепь представляла собой БСД в классическом смысле этого термина, нужно также учесть уже упоминавшееся, но до сих пор не использованное свойство d-разделимости узлов, которое входит в определение байесовских сетей доверия ([27, 28]). В случае цепи трёх (или более) узлов оно проявляет себя как свойство условной независимости. Напомним определение. Говорят, что $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ *условно независимы* относительно узла $\tilde{w}$, если

$$\forall\tilde{u}\forall\tilde{v}\forall\tilde{w}\ \ p(\tilde{u}\tilde{v}\tilde{w})p(\tilde{w})=p(\tilde{u}\tilde{w})p(\tilde{v}\tilde{w}).$$

Если $p(\tilde{w})$ не обращается в 0, формулу из определения условной независимости можно переписать в виде:

$$\frac{p(\tilde{u}\tilde{v}\tilde{w})p(\tilde{w})}{p^2(\tilde{w})}=\frac{p(\tilde{u}\tilde{w})p(\tilde{v}\tilde{w})}{p^2(\tilde{w})},$$

$$\frac{p(\tilde{u}\tilde{v}\tilde{w})}{p(\tilde{w})}=\frac{p(\tilde{u}\tilde{w})}{p(\tilde{w})}\times\frac{p(\tilde{v}\tilde{w})}{p(\tilde{w})},$$

$$p(\tilde{u}\tilde{v}\,|\,\tilde{w})=p(\tilde{u}\,|\,\tilde{w})\times p(\tilde{v}\,|\,\tilde{w}).$$

Последняя формула похожа на определение независимости $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, «обусловленное» аргументным местом $\tilde{w}$. Содержательно условная независимость $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ относительно $\tilde{w}$ говорит о том, что если мы знаем означивание $\tilde{w}$ (т.е. знаем, имеет ли место w или $\overline{w}$), знание означивания одной из оставшихся переменных не повлияет на нашу оценку вероятности ни одного из означиваний другой переменной.

В БСД из рассматриваемого примера узлы $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_2$ условно независимы от узла $\tilde{x}_1$. Еще раз подчеркнем, что это утверждение вытекает из определения БСД.

Рассмотрим теперь наш пример с учетом требования условной независимости, которое принимает вид $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2)p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1)p(\tilde{x}_1\tilde{x}_2)$.

Поскольку тензор условных вероятностей $p(\tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1)$ задан, а, значит, существует и определен, вероятности вида $p(\tilde{x}_1)$ в нуль не обращаются. Следовательно, мы можем разделить обе части равенства на $p(\tilde{x}_1)$:

$$p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = \frac{p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1)p(\tilde{x}_1\tilde{x}_2)}{p(\tilde{x}_1)},$$

$$p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1)\times\frac{p(\tilde{x}_1\tilde{x}_2)}{p(\tilde{x}_1)},$$

$$p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1)p(\tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1).$$

Также из рассмотрения случая БСД-цепи из двух узлов нам известно (согласно определению условной вероятности), что $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)p(\tilde{x}_0)$. Тогда распределение вероятностей над $\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ из исходных данных $p(\tilde{x}_0)$, $p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)$ и $p(\tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1)$ определяется однозначно:

$$p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_0)p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)p(\tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1).$$

Исходя из анализа цепи из трех узлов, представляющей собой БСД, мы приходим к выводу, что исходные данные $p(\tilde{x}_0)$, $p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)$ и $p(\tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1)$:

- задают подсемейство семейства распределений вероятностей $\Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2]$ с двумя степенями свободы, если в рассмотрение не принимается требование условной независимости узлов $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_2$ от узла $\tilde{x}_1$, вытекающее из требования d-разделимости БСД, входящего в определение последней;
- задают однозначно распределение $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_0)p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)p(\tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1)$, если вышеуказанное требование условной независимости соблюдается.

Завершая рассмотрение примера, подчеркнем, что выделение *единственного* распределения вероятностей из семейства возможных распределений стало осуществимо за счет использования *особой гипотезы*, *дополняющей* исходные численные данные и говорящей об условной независимости.

11. Цепь узлов БСД, состоящая из четырех и более элементов

В рассматриваемом общем примере (см. Рис.7 для сравнения АБС и БСД в данном случае) нам задана БСД с узлами $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \ldots, \tilde{x}_k$, где $k \geq 3$; задана также единственная маргинальная вероятность $p(\tilde{x}_0)$; кроме того, заданы тензоры условных вероятностей $p(\tilde{x}_i \mid \tilde{x}_{i-1})$ для $i = 1(1)k$. Как и в предыдущих случаях, зададимся вопросом: какое подсемейство или элемент семейства распределений вероятностей $\Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_k]$ задает рассматриваемая цепь узлов БСД? Анализ, как и в предыдущем разделе, построен на разборе двух случаев: когда мы не учитываем условие d-разделимости, т.е. не считаем определенные

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

узлы цепи условно независимыми, и когда мы учитываем указанное условие, т.е. полагаем, что определенные узлы цепи условно независимы относительно тех узлов, которые оказались между двумя исходными.

В первую очередь покажем, что

- маргинальные вероятности вида $p(\tilde{x}_j)$, где $j = 0(1)k$, и
- маргинальные вероятности вида $p(\tilde{x}_{i-1}\tilde{x}_i)$, где $i = 1(1)k$,

определяются однозначно по имеющимся данным. Более того, мы покажем, что, учитывая существование и определенность тензоров $p(\tilde{x}_i \mid \tilde{x}_{i-1})$, где $i = 1(1)k$, что гарантирует нам $\forall \tilde{x}_j \; p(\tilde{x}_j) > 0$ при $j = 0(1)(k-1)$, между тремя наборами тензоров вероятностей: набором исходных данных

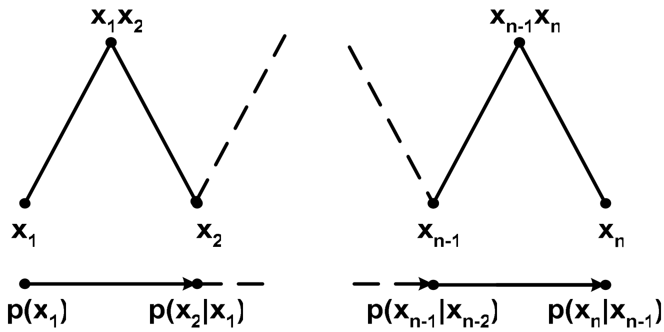

Рис.7. Линейные цепи ФЗ в АБС и БСД.

$$\mathbf{P} := \{p(\tilde{x}_0), p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0), \ldots, p(\tilde{x}_k \mid \tilde{x}_{k-1})\},$$

набором тензоров совместных вероятностей пар сопряженных (соседствующих) узлов

$$\mathbf{P}_{\sim} := \{p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1), \ldots, p(\tilde{x}_{k-1}\tilde{x}_k)\}$$

и набором вероятностей положительно означенных аргументных мест и их пар, соответствующих сопряженным (соседствующим) узлам

$$\mathbf{P}_{+} := \{p(x_0), p(x_1), \ldots, p(x_k), p(x_0x_1), p(x_1x_2), \ldots, p(x_{k-1}x_k)\},$$

существует взаимнооднозначное соответствие. Поясним, что под взаимнооднозначным соответствием здесь понимается возможность однозначного восстановления по любому одному заданному набору данных двух других.

Начнём с э008-Morozov2квивалентности $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_{\sim}$. Сначала покажем, используя метод математической индукции, что по данным из $\mathbf{P}$ можно восстановить данные из $\mathbf{P}_{\sim}$. Для доказательства базы индукции воспользуемся определением условной вероятности: $\forall \tilde{x}_0 \forall \tilde{x}_1 \; p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1) := p(\tilde{x}_0)p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)$. Таким образом, мы восстановили первый элемент $\mathbf{P}_{\sim}$.

Проделаем теперь индукционный переход. Пусть нам известны исходные данные, а также восстановлены первые j элементов $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1), \ldots, p(\tilde{x}_{j-1}\tilde{x}_j)$ множества $\mathbf{P}_{\sim}$. Покажем, как восстановить его $(j+1)$-й элемент $p(\tilde{x}_j\tilde{x}_{j+1})$.

Во-первых, мы можем вычислить $p(\tilde{x}_j) = \sum_{\tilde{x}_{j-1}} p(\tilde{x}_{j-1}\tilde{x}_j)$. Во-вторых, нам задан тензор $p(\tilde{x}_{j+1} \mid \tilde{x}_j)$. Тогда, по определению условной вероятности:

$$p(\tilde{x}_j\tilde{x}_{j+1}) = p(\tilde{x}_{j+1} \mid \tilde{x}_j)p(\tilde{x}_j).$$

Индукционный переход успешно завершен.

Покажем теперь, что по данным из $\mathbf{P}_{\sim}$ можно восстановить данные из $\mathbf{P}$. Обратим внимание, что, по условию, $\forall \tilde{x}_j \; p(\tilde{x}_j) > 0$ при $j = 0(1)(k-1)$. Рассмот-

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

рим теперь произвольный элемент $p(\tilde{x}_{j+1} \mid \tilde{x}_j)$ (при $j = 0(1)(k-1)$) множества **P**, подлежащий восстановлению. Тензор $p(\tilde{x}_j \tilde{x}_{j+1})$ из множества $\mathbf{P}_{\sim}$ нам известен. Мы можем восстановить вероятность $p(\tilde{x}_j) = \sum_{\tilde{x}_{j+1}} p(\tilde{x}_j \tilde{x}_{j+1})$, причем нам известно, что $\forall \tilde{x}_j \; p(\tilde{x}_j) > 0$. Тогда, основываясь на определении условной вероятности $p(\tilde{x}_j \tilde{x}_{j+1}) = p(\tilde{x}_{j+1} \mid \tilde{x}_j) p(\tilde{x}_j)$, мы приходим к выводу, что

$$p(\tilde{x}_{j+1} \mid \tilde{x}_j) = \frac{p(\tilde{x}_j \tilde{x}_{j+1})}{p(\tilde{x}_j)}.$$

Таким образом, взаимнооднозначное соответствие между множествами **P** и $\mathbf{P}_{\sim}$ установлено, и для завершения доказательства достаточно показать взаимнооднозначное соответствие между $\mathbf{P}_{+}$ и $\mathbf{P}_{\sim}$. Отметим, что по тензору совместных вероятностей $p(\tilde{x}_j \tilde{x}_{j+1})$ однозначно восстанавливаются величины:

$$p(x_j) = \sum_{\tilde{x}_{j+1}} p(x_j \tilde{x}_{j+1}),$$

$$p(x_{j+1}) = \sum_{\tilde{x}_j} p(\tilde{x}_j x_{j+1}),$$

$$p(x_j x_{j+1}) = p(x_j x_{j+1}).$$

В свою очередь, по набору величин $p(x_j)$, $p(x_{j+1})$, $p(x_j x_{j+1})$, однозначно восстанавливаются вероятности означиваний $p(\tilde{x}_j \tilde{x}_{j+1})$:

$$p(x_j x_{j+1}) = p(x_j x_{j+1}),$$

$$p(x_j \bar{x}_{j+1}) = p(x_j) - p(x_j x_{j+1}),$$

$$p(\bar{x}_j x_{j+1}) = p(x_{j+1}) - p(x_j x_{j+1}),$$

$$p(\bar{x}_j \bar{x}_{j+1}) = 1 - p(x_j) - p(x_{j+1}) + p(x_j x_{j+1}).$$

Анализу отношений множеств вероятностных означиваний вида $p(\tilde{x}_j \tilde{x}_{j+1})$ и $p(x_j)$, $p(x_{j+1})$, $p(x_j x_{j+1})$ и уделяется подробное внимание в публикациях по фрагментам знаний алгебраических байесовских сетей ([1, 3–7]). В данный же момент установленные соотношения позволяют заключить, что взаимнооднозначное соответствие между множествами $\mathbf{P}_{+}$ и $\mathbf{P}_{\sim}$ действительно существует. Если же мы обратимся к проведённому в начале статьи рассмотрению алгебраических байесовских сетей, то сможем отметить, что задание вида $\mathbf{P}_{+}$ совпадает с заданием алгебраической байесовской сети, состоящей из цепи фрагментов знаний размерности 2, где соседние ФЗ точечно пересекаются. Таким образом, наше рассмотрение структуры распределения вероятностей также относится и к этому случаю.

Поскольку отношением взаимнооднозначного соответствия связаны **P** и $\mathbf{P}_{\sim}$, а также $\mathbf{P}_{\sim}$ и $\mathbf{P}_{+}$, множества **P** и $\mathbf{P}_{+}$ также связаны отношение взаимнооднозначного соответствия. Установленные связи позволят нам далее охарактеризовать структуру подсемейства, задаваемого рассматриваемой цепью узлов БСД, семейства распределений вероятностей $\Pr[\tilde{x}_0 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_k]$.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

12. Структура подсемейства распределений вероятности

Структура подсемейства распределений вероятности, задаваемого рассматриваемой цепью узлов БСД (данные в форме $\mathbf{P}$) при отсутствии требования условной независимости, имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{l} p^{\circ}\in \Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_k]: \\ \qquad \forall\tilde{x}_0\ p^{\circ}(\tilde{x}_0):=\sum\limits_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_k} p^{\circ}(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_k)=p(\tilde{x}_0), \\ \qquad \forall j=1(1)k\ \forall\tilde{x}_{j-1}\forall\tilde{x}_j\ p^{\circ}(\tilde{x}_{j-1}\tilde{x}_j):= \\ \qquad\qquad := \sum\limits_{\tilde{x}_0\ldots\tilde{x}_{j-2}\tilde{x}_{j+1}\ldots\tilde{x}_k} p^{\circ}(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_k)=p(\tilde{x}_j\mid\tilde{x}_{j-1})\times p^{\circ}(\tilde{x}_{j-1}), \\ \qquad \forall j=1(1)k\ \forall\tilde{x}_j\ p^{\circ}(\tilde{x}_j):=\sum\limits_{\tilde{x}_{j-1}} p^{\circ}(\tilde{x}_{j-1}\tilde{x}_j) \end{array}\right\}.$$

Наиболее простой вид определение этого подсемейства распределений примет, если мы воспользуемся данными, представленными в виде $\mathbf{P}_{\sim}$:

$$\left\{\begin{array}{l} p^{\circ}\in \Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_k]: \\ \forall j=1(1)k\forall\tilde{x}_{j-1}\forall\tilde{x}_j\ p^{\circ}(\tilde{x}_{j-1}\tilde{x}_j):=\sum\limits_{\tilde{x}_0\ldots\tilde{x}_{j-2}\tilde{x}_{j+1}\ldots\tilde{x}_k} p^{\circ}(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_k)=p(\tilde{x}_{j-1}\tilde{x}_j) \end{array}\right\}.$$

Такая форма позволяет понять, что из всех возможных распределений, составляющих $\Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_k]$, в подсемейство распределений, задаваемых рассматриваемой цепью узлов БСД (при отсутствии требования условной независимости), вошли только те распределения, в которых маргинальные вероятности вида $p^{\circ}(\tilde{x}_j\tilde{x}_{j+1})$ совпадают с маргинальными вероятностями вида $p(\tilde{x}_j\tilde{x}_{j+1})$ из задания исходных данных в виде $\mathbf{P}_{\sim}$.

Чтобы судить о степенях свободы в интересующем нас подсемействе распределений, удобно рассмотреть еще один вариант описания указанного подсемейства, опирающийся на $\mathbf{P}_{+}$:

$$\left\{\begin{array}{l} p^{\circ}\in \Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_k]: \\ \forall j=1(1)k\ p^{\circ}(x_{j-1}x_j):=\sum\limits_{\tilde{x}_0\ldots\tilde{x}_{j-2}\tilde{x}_{j+1}\ldots\tilde{x}_k} p^{\circ}(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_{j-2}x_{j-1}x_j\tilde{x}_{j+1}\ldots\tilde{x}_k)=p(x_{j-1}x_j), \\ \forall i=0(1)k\ p^{\circ}(x_i):=\sum\limits_{\tilde{x}_0\ldots\tilde{x}_{i-1}\tilde{x}_{i+1}\ldots\tilde{x}_k} p^{\circ}(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_{i-1}x_j\tilde{x}_{i+1}\ldots\tilde{x}_k)=p(x_i) \end{array}\right\}.$$

Тогда число степеней свободы будет равно числу всех тех положительно означенных цепочек конъюнкций длиной две атомарные пропозиции и более, вероятности которых не заданы в виде $\mathbf{P}_{+}$. Комбинаторные вычисления приводят к следующему числу степеней свободы: $(2^{k+1}-1)-(k+1)-k$. $(2^{k+1}-1)$ — это число элементов в идеале положительно означенных цепочек конъюнкций над $(k+1)$ атомарными пропозициями. Распределение вероятностей над таким идеалом, если оно непротиворечиво, однозначно определяет распределение вероятностей вида $p^{\circ}(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_k)$. $(k+1)$ — это число атомарных пропозициональных формул; их вероятности присутствуют в $\mathbf{P}_{+}$. k — это число положительно означенных цепочек конъюнкций вида x_jx_{j+1}; их вероятности также

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

присутствуют в $\mathbf{P}_+$.

Отметим, что вероятности элементов идеала положительно означенных цепочек конъюнкций над $x_0, x_1, x_2 \ldots, x_k$, не вошедшие в $\mathbf{P}_+$, не могут изменяться абсолютно произвольно. Все вероятности элементов идеала взаимосвязаны линейными неравенствами, вытекающими из аксиоматики вероятности. Поэтому в общем случае вероятности элементов идеала, не вошедшие в $\mathbf{P}_+$, будут изменяться в подынтервале единичного интервала $[0;1]$. Подводя промежуточный итог, можно заметить, что множество распределений вероятностей, погружённое в объемлющее линейное пространство $[0;1]^{k+1}$, является полиэдром. Максимизация и минимизация линейных функций на нём (многие необходимые вычисления приводятся к такому виду) представляет собой задачу линейного программирования.

Учет требования условной независимости существенно упрощает картину: из всех возможных распределений вероятностей $\Pr[\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_k]$, отвечающих исходным данным в форме $\mathbf{P}$, остается только одно, структура которого выглядит следующим образом: $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_k) = p(\tilde{x}_0)p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)p(\tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1)\ldots p(\tilde{x}_k \mid \tilde{x}_{k-1})$, или, записывая более кратко, $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_k) = p(\tilde{x}_0) \prod_{i=1(1)k} p(\tilde{x}_j \mid \tilde{x}_{j-1})$. Если же использовать в нашем случае обозначение множества предков:

$$par[\tilde{x}_j] = \tilde{x}_{j-1}, \quad j = 1(1)k\,, \; par[\tilde{x}_0] = \varnothing\,,$$

которое часто применяется в подобном контексте, то запись становится совсем единообразной (и совпадает с тем, что можно найти в учебниках и монографиях, посвященным байесовским сетям доверия):

$$p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_k) = \prod_{i=0(1)k} p(\tilde{x}_j \mid par[\tilde{x}_j]).$$

Справедливость формулы доказывается по индукции. Доказательство для более сложной структуры БСД, чем цепь, можно найти, например, в [20], мы же здесь докажем справедливость формулы для нашего частного случая — цепи узлов БСД. Базой индукции является результат, полученный для цепи узлов БСД, состоящей из трех элементов: $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_0)p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)p(\tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1)$.

Требование d-разделимости БСД в случае цепи узлов БСД имеет следующую формулировку на языке условной независимости:

$$\forall(\tilde{x}_0 \ldots \tilde{x}_i, \tilde{x}_j \ldots \tilde{x}_k : j - i > 1)$$
$$\forall(\tilde{x}_r : i < r < j) \;\; p(\tilde{x}_0 \ldots \tilde{x}_i \tilde{x}_j \ldots \tilde{x}_k \mid \tilde{x}_r) = p(\tilde{x}_0 \ldots \tilde{x}_i \mid \tilde{x}_r) p(\tilde{x}_j \ldots \tilde{x}_k \mid \tilde{x}_r),$$

то есть, любые два узла цепи условно независимы относительно любого узла, находящегося между ними в указанной цепи. Теперь индукционный переход становится практически очевидным. Действительно, пусть мы уже знаем, что $p(\tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_{k-1}) = p(\tilde{x}_0)p(\tilde{x}_1 \mid \tilde{x}_0)p(\tilde{x}_2 \mid \tilde{x}_1)\ldots p(\tilde{x}_{k-1} \mid \tilde{x}_{k-2})$. Добавим следующую переменную по определению условной вероятности. Свойство условной независимости в данном случае проявляет себя как $p(\tilde{x}_k \mid \tilde{x}_0\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_{k-1}) = p(\tilde{x}_k \mid \tilde{x}_{k-1})$, так как $\tilde{x}_k$ не зависит от $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$ при условии $\tilde{x}_{k-1}$. Отсюда и получаем искомое.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

13. Заключение

В настоящей статье мы рассмотрели вероятностную семантику линейных цепей фрагментов знаний на примере двух моделей: алгебраических байесовских сетей и байесовских сетей доверия.

В случае точечных оценок вероятностей и при соблюдении гипотезы условной независимости (естественной для многих приложений) для каждой цепи фрагментов знаний в байесовской сети доверия можно построить цепь фрагментов знаний в алгебраической байесовской сети так, что обе цепи будут задавать одно и то же распределение вероятностей. Обратное утверждение верно в случае цепи фрагментов знаний в АБС, в которой [цепи] фрагменты знаний попарно могут иметь не более одной общей атомарной пропозиции.

При отказе от гипотезы условной независимости оба варианта цепей фрагментов знаний в общем случае задают семейство распределений вероятностей. Точечные оценки вероятностей, приписанные элементам этих цепей фрагментов знаний, задают «граничные условия» для распределений, входящих в соответствующие семейства. Гипотеза условной независимости позволяет выделить единственного представителя семейства распределений, который обладает особыми свойствами.

В качестве дальнейшего теоретического направления работы можно указать анализ семантики ациклических АБС и БСД, анализ семантики изолированных циклов и БСД с допустимыми циклами. Кроме того, особый интерес представляют циклы обратной связи (направленные циклы), недопустимые ни в одном из существующих БСД-исчислений [20].

С точки зрения конкретных приложений совпадение семантики линейных цепей фрагментов знаний АБС и БСД может оказаться, например, особенно полезным при автоматическом поиске, формальном представлении и последующем анализе вероятностных зависимостей внутри множества бинарных ответов на вопросы психологических тестов, а также связей этих ответов (по-видимому, даже с учётом внутренней структуры указанных зависимостей) с уровнями выраженности измеряемой психологической характеристики.

Удобство представления этих связей и зависимостей вместе с возможностью их интерпретации в рамках сразу двух математических аппаратов (АБС и БСД) могут быть использованы при определении окончательного набора вопросов, наиболее точно отражающих структуру связей между ответами испытуемых и степенью проявления у них измеряемой психологической характеристики. Кроме того, использование АБС позволило бы поставить вопрос о количественном измерении степени согласованности (непротиворечивости) ответов испытуемого на вопросы теста. Это направление явилось бы естественным развитием работ [8, 14, 15].

Литература

[1] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети для представления и обработки знаний с неопределенностью // 4-я Санкт-Петербургская конференция «Региональная информатика-95»: Тезисы докладов, ч.1. СПб., 1995. С. 51–52.

[2] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Генерация выборки с заданным распределением зависимых случайных событий на основе алгебраической байесовской сети // 4-я Санкт-Петербургская конференция «Региональная информатика-95»: Тезисы докладов, ч.1. СПб., 1995. С.50–51.

[3] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость баз знаний с интервальной мерой вероятности // 4-я Санкт-Петербургская конференция «Региональная информатика-95»: Труды. СПб., 1996.
[4] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // РАН. Известия академии наук. Теория и системы управления. Т.5 (1997). С. 33–42.
[5] *Городецкий В.И.* Моделирование недоопределенных знаний // SCM'98. Сборник докладов. Т.1. СПб., 1998. С.98–102.
[6] *Городецкий В.И.* Интервальные вероятностные меры неопределенности в инженерии знаний // Теоретические основы и прикладные задачи интеллектуальных информационных технологий. СПб.: СПИИРАН, 1998. С. 44–58.
[7] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость баз знаний с количественными мерами неопределенности // КИИ'98. Сборник научных трудов. Т.1. Пущино, 1998. с.100–106.
[8] *Ельяшевич А.М., Лещинский И.Ф., Ярошевская Е.Ю.* Применение методов математического моделирования для анализа результатов психологического тестирования // 2-ая Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике». Пенза, 2002.
[9] Логика и компьютер. М., Наука, 1990. 240 с.
[10] *Николенко С.И., Тулупьев А.Л.* Простейшие циклы в байесовских сетях доверия: распределение вероятностей и возможность его противоречивого задания. // Труды СПИИРАН. Вып. 2, т. 1. СПб.: Наука, 2004. С. 119–126.
[11] *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети. Логико-вероятностный подход к моделированию баз знаний с неопределённостью. СПб, СПИИРАН, 2000. 292 с.
[12] *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: теоретические основы и непротиворечивость. СПб.: СПИИРАН, 1995. 72 с.
[13] *Тулупьев А.Л., Николенко С.И.* Учёт направленных циклов в байесовских сетях доверия: семантика и вопросы сложности. Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сб. научных трудов III международного научно-практического семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте», М., Физматлит, 2005. С. 376–382.
[14] *Ярошевская Е.Ю.* Методика индивидуальной погрешности измерения психометрических характеристик при разработке и применении психодиагностических опросников // Математическое моделирование: естественно-научные, технические и гуманитарные приложения. Сб. научн. трудов. СПб.: ЛГОУ им.А.С.Пушкина, 2005.
[15] *Ярошевская Е.Ю.* Исследование вида функциональных зависимостей вероятности ответов на вопросы психодиагностических опросников // Математическое моделирование: естественно-научные, технические и гуманитарные приложения. Сб. научн. трудов. СПб.: ЛГОУ им.А.С.Пушкина, 2005.
[16] *Boole G*. An Investigation of the Laws of Thought, on which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. Dover Publications, 1854/1953. 424 pp. (Unabridged reproduction of 1854 edition.)
[17] *Fagin R., Halpern J.Y., Megiddo N*. A Logic for Reasoning about Probabilities. Report RJ 6190(60900) 4/12/88, pp. 1–41.
[18] *Fagin R., Halpern J.Y*. Uncertainty, Belief, and Probability // Proc. of 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Morgan Kaufmann Publ., Detroit, Michigan, USA. 1989. pp. 1161–1167.
[19] *Fagin R., Halpern J.Y*. Uncertainty, Belief, and Probability-2. Proc. of the IEEE Symposium on Logic and Computer Science, vol. 7(1991), pp. 160--173.
[20] *Jensen, Finn V.* Bayesian Networks and Decision Graphs. Springer-Verlag, 2002.
[21] *Halpern J.Y*. Reasoning about Uncertainty. The MIT Press, 2003. 480 pp.
[22] *Korb K.B*., Nicholson A.E. Bayesian Artificial Intelligence. Chapman and Hall/CRC, 2004. 364 pp.
[23] *Nilsson N.J*. Probabilistic Logic. Artificial Intelligence, vol. 28 (1986). Elsevier Science Publishers B.V., North Holland, pp. 71–87.
[24] *Nilsson N.J*. Probabilistic Logic Revisited. Artificial Intelligence, vol. 59 (1993). Elsevier Science Publishers B.V., North Holland, pp. 39–42.
[25] *Pearl J.* How to Do with Probabilities what People Say You Can't. // Artificial Intelligence Applications. Ed. Weisbin C.R., IEEE, North Holland.1985. — pp. 6–12.

[26] *Pearl J*. Fusion, Propagation, and Structuring in Belief Networks. Artificial Intelligence, vol. 29(1986). Elsevier Science Publishers B.V., North Holland, pp. 241–288.
[27] *Pearl J.* Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems. Morgan Kaufmann Publishers, 1988. 552 pp.
[28] *Pearl J.* Causality: Models, Reasoning, and Inference. Cambridge University Press, 2000. 386 pp.
[29] *Studeny M., Bouckaert R.* On chain graph models for description of conditional independence structures. The Annals of Statistics, vol. 26, no. 4 (1998), pp. 1434–1495.