ДЕРЕВО СМЕЖНОСТИ С ИДЕАЛАМИ КОНЪЮНКТОВ КАК АЦИКЛИЧЕСКАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ БАЙЕСОВСКАЯ СЕТЬ

А. Л. Тулупьев[♦]

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178

<alt@iias.spb.su>

УДК 681.3

Тулупьев А. Л. **Дерево смежности с идеалами конъюнктов как ациклическая алгебраическая байесовская сеть** // Труды СПИИРАН. Вып. 3, т. 1. — СПб.: Наука, 2006.

Аннотация. *Предлагается новый подход к определению ациклических алгебраических байесовских сетей (ААБС). Они определяются как дерево смежности с идеалами цепочек конъюнкций в узлах, при этом на идеалах заданы точечные или интервальные оценки вероятности истинности. На языке матриц изложены требования непротиворечивости к заданию вероятностного распределения на идеале цепочек конъюнкций; затем на основе нового определения рассматриваются вероятностная семантика и свойства ААБС.* — Библ. 26 назв.

UDC 681.3

Tulupyev A. L. **Join Tree with Conjunctions Ideals as an Acyclic Algebraic Bayesian Network** // SPIIRAS Proceedings. Issue 3, vol. 1. — SPb.: Nauka, 2006.

Abstract. *We introduce a new approach to the definition of acyclic algebraic Bayesian networks (AABNs). They are defined as join trees with conjunctions ideals in the nodes and those ideals are assigned with point- or interval-valued probabilistic estimates. In terms of matrix calculi we describe the consistency requirements for probabilistic distribution assignment over a conjunction ideal. Then, in accordance to the new definition, we consider probabilistic semantics and characteristics of AABNs.* — Bibl. 26 items.

1. Введение

Целью настоящей работы является формальное определение и исследование класса алгебраических байесовских сетей (АБС), структура которых представляет собой дерево смежности с идеалами цепочек конъюнкций в узлах. Такие АБС называются *ациклическими*.

Ранее для определения класса ациклических АБС вводилось понятие *цикла идеалов* цепочек конъюнкций (или цикла фрагментов знаний, что одно и то же со структурной точки зрения). Определение цикла включает в себя индуктивные элементы и опирается на достаточно сложные формулировки о соотношениях весов в графе, составляющем основу цикла [11, 12]. После того как определение дано, ациклической АБС считалась та АБС, которая циклов не содержит.

Указанный подход к определению ацикличности неудобен. Из-за наличия индукции, особого соотношения весов на графах, отрицания в определении получающийся формальный объект достаточно трудно изучать, хотя ключевая особенность самого объекта достаточно проста — свидетельство, поступающее в ациклическую АБС, может прийти в каждый конкретный идеал конъюнктов (фрагмент знаний) только одним путем; таким образом исключаются конфликты

[♦]Часть результатов, представленных в настоящей работе, получена в рамках работ по госконтракту № 02.442.11.7289, шифр 2006-РИ-19.0/001/211.

между апостериорными оценками, полученными разными путями, для одних и тех же элементов.

Определение, основанное на рассмотрении графа, лежащего в основе ациклической АБС, как *дерева смежности* (join tree [18, 22, 23], этот объект изучается и интенсивно используется в теории байесовских сетей доверия (БСД) [26]), является заметно более «прямолинейным» и удобным для разработки структур данных в программных приложениях. Этот класс деревьев применяется именно в тех ситуациях, когда необходимо конвертировать байесовскую сеть доверия, содержащую допустимый направленный цикл или циклы, в структуру, которая уже никаких циклов не содержит (в так называемое *дерево сочленений*, junction tree [22, 23]).

Задачами данной работы является введение соответствующей системы определений, раскрытие вероятностной семантики алгебраических байесовских сетей, представимых в виде дерева смежности с идеалами конъюнктов в узлах, рассмотрение соотношений степеней непротиворечивости (локальной, экстернальной, интернальной, глобальной) на получающихся АБС и, наконец, исследование апостериорного вывода в них.

2. Основные обозначения и терминология

Подходы к введению вероятности на пропозициональных формулах, определение конъюнкта, кванта, идеала конъюнктов, перенумерация квантов и конъюнктов рассматривались в нескольких предшествующих работах [2–8, 11, 12, 14], в том числе опубликованных в Трудах СПИИРАН [9, 10, 15], поэтому соответствующие определения и теоретические положения будут здесь изложены схематично.

Пусть имеется множество атомарных пропозициональных формул

$$A = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

которые представляют собой простейшие высказывания о предметной области, истинность которых нам удается оценить. Введем обозначение аргументного места (или литерала, что является синонимом) $\tilde{x}$. Аргументное место может принимать одно из двух значений $\tilde{x} \in \{x, \bar{x}\}$, где $x \in A$, а $\bar{x}$ — его логическое отрицание.

Набор всех возможных пропозициональных формул над A обозначим $F = F(A)$, а набор *квантов* — цепочек конъюнкций аргументных мест максимальной длины со всеми возможными означиваниями, обозначим как $Q = Q(A) = \{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n\}$. Напомним, что символ операции конъюнкции $\wedge$ в цепочках, как правило, опускается.

Мы рассматриваем на самом деле *классы* цепочек конъюнкций. В частности мы не различаем цепочки конъюнкций с одинаковым набором аргументных мест и/или атомарных пропозициональных формул. По умолчанию считаем, что пустая конъюнкция эквивалентна тождественной истине: $e_\wedge \equiv \mathbf{T}$, а пустая дизъюнкция эквивалентна тождественной лжи: $e_\vee \equiv \mathbf{F}$.

Идеалом цепочек конъюнкций над заданным множеством атомарных формул назовем все непустые положительно-означенные цепочки конъюнкций атомарных пропозициональных формул:

$$C = C(A) = \left\{ x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} : (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in 2^{\{\overline{1(1)m}\}}, k = \overline{1(1)m} \right\}.$$

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Частичный порядок на идеале определяется отношением вхождения цепочек; здесь существенно отметить, что вхождение определяется для множеств атомарных пропозиций, составляющих соответствующие цепочки. Более глубоко со свойствами идела можно познакомиться в [1].

На диаграммах, рисунках и в некоторых других случаях удобно использовать синонимичные обозначения для идеала цепочек конъюнкций

$$C(A) = \langle A \rangle = A^{\Delta}.$$

Элементы идеала будем называть *конъюнктами*, наряду с термином *идеал цепочек конъюнкций* будет синонимично употребляться *идеал конъюнктов*.

Определение идеала конъюнктов $C(A)$ исключает из него пустой конъюнкт $e_{\wedge} \equiv \mathbf{T}$, однако множество $A^{\Diamond} = C(A) \cup \{e_{\wedge}\}$ также является идеалом. Идеал с пустым конъюнктом также будет использоваться в дальнейших выкладках.

По теореме о совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ):

$$\forall (f \in F)\ \exists ! (S_f \subseteq Q):\ f \equiv \bigvee_{q \in S_f} q.$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем функцию

$$S : F \to 2^Q,$$

$$S(f) = S_f,$$

где S_f — множество квантов, участвующих в СДНФ пропозициональной формулы f.

Для сокращения записи последовательности из n аргументных мест вида $\tilde{x}_i$ используется обозначение $\tilde{X} = \tilde{X}_{[n]} = \tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_n$. Аналогичное обозначение используется и для положительно-означенной цепочки конъюнкций: $X = X_{[n]} = x_1 \ldots x_n$. Индекс в квадратных скобках опускается, если его значение в контексте очевидно. Когда в одной и той же математической формуле вхождение $\tilde{X}$ случается два и более раза, предполагается, что означивания аргументных мест, построенных над одной и той же атомарной пропозицией, совпадают.

Нашей ближайшей задачей является введение вероятностей на пропозициональных формулах. Прежде чем приступить к ее решению, рассмотрим два поясняющих примера.

Пример 1 (два атома). Пусть $A = \{x_1, x_2\}$.
Тогда $Q = \{\tilde{x}_1\tilde{x}_2\} = \{x_1x_2, x_1\bar{x}_2, \bar{x}_1x_2, \bar{x}_1\bar{x}_2\}$; $C = \{x_1, x_2, x_1x_2\}$; $\tilde{X} = \tilde{x}_1\tilde{x}_2$; $X = x_1x_2$.•

Пример 2 (три атома). Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3\}$.
Тогда
$Q = \{\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\} = \{x_1x_2x_3, x_1x_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_2x_3, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1x_2x_3, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\}$;
$C = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$; $\tilde{X} = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$; $X = x_1x_2x_3$.•

Математически строгое изложение подхода Н. Нильссона [оригинальный вклад — 24, 25, последующие формализации других авторов — 19, 20] к введению вероятности на пропозициональных формулах $F(A)$ основывается на теореме о СДНФ. Рассмотрим Q как множество элементарных событий. Зададим на нем исходное распределение вероятностей (дискретную плотность вероятности) $p^\circ : Q \to [0;1]$, такое, что

$$\forall (q \in Q)\ \ p^\circ(q) \geq 0; \tag{1}$$

$$\sum_{q \in Q} p^\circ(q) = 1. \tag{1'}$$

Введем вероятность $p : 2^Q \to [0;1]$ следующим образом:

$$\forall (S \subseteq Q)\ \ p(S) = \sum_{q \in S} p^\circ(q).$$

На этом шаге мы получили вероятностное пространство $\langle Q, 2^Q, p \rangle$. Определим вероятностную меру на множестве F следующим образом:

$$\forall (f \in F)\ \ p(f) = p(S(f)).$$

Взяв за основу такое распространение вероятности на множество пропозициональных формул, мы получим новое вероятностное пространство: $\langle Q, F, p \rangle$. Эта структура вероятностного пространства по Н. Нильссону задает вероятность над всеми пропозициональными формулами, построенными над множеством атомарных формул A.

Исходя из вышеописанного способа введения вероятности на пропозициональных формулах, мы получим $p(\mathbf{T}) = 1$ и $p(\mathbf{F}) = 0$, что согласуется с нашими интуитивными представлениями.

Интервальную оценку вероятности пропозициональной формулы f будем обозначать $\mathbf{p}(f) = \left[p^-(f);\ p^+(f)\right]$.

3. Непротиворечивость оценок вероятности истинности над идеалом

Условия (1–1’), накладываемые аксиоматикой вероятностной логики на вероятности квантов, не допускают произвольного назначения оценок вероятностей. Те же условия опосредованно накладывают существенные ограничения на возможности для назначения оценок вероятностей над идеалом конъюнктов.

Прежде чем приступить к формализации непротиворечивости в случае точечных и интервальных оценок вероятности над конъюнктами и квантами, введем несколько дополнительных обозначений и соглашений.

$[m]_2^r$ — двоичная запись неотрицательного целого числа $m < 2^r$, состоящая ровно из r двоичных цифр, то есть $(\underbrace{0 \ldots 0}_{r})_2 \leq m = [m]_2^r \leq (\underbrace{1 \ldots 1}_{r})_2$. Обратим внимание, что в записи присутствует нужное количество ведущих нулей, если это необходимо. Кроме того, с числом, представленном в этой форме, также можно выполнять побитовые логические операции. Нижний индекс в записи $[m]_2^r$ будем, как правило, опускать: $[m]^r$.

Обозначим $\mathbf{Q}^{(n)}$ — вектор точечных оценок вероятностей квантов над n атомарными пропозициональными формулами, $\mathbf{P}^{(n)}$ — вектор точечных оценок вероятностей конъюнктов из идеала цепочек конъюнкций, построенного над n атомарными пропозициональными формулами. Для того, чтобы взаимнооднозначно сопоставить компоненте вектора вероятность определенной пропозиции, на множестве квантов и конъюнктов требуется ввести перенумерацию. Вопросы перенумерации были детально рассмотрены в [14, 15], здесь же мы приведем табл. 1, позволяющую на интуитивном уровне освоить правила сопоставления номера, кванта и конъюнкта. В табл. 2 показано, как идеалы более высокого порядка получаются умножением идеалов предшествующих порядков, при этом элементы идеала-результата выстраиваются в порядке, соответствующем нумерации из табл. 1.

Отметим, что при перенумерации для удобства элементы в конъюнкциях располагаются слева направо, начиная со старшего индекса. В остальных случаях, как правило, в конъюнкциях элементы располагаются по возрастанию индексов слева направо.

Таблица 1

Перенумерация квантов и конъюнктов
(*здесь*: отрицание атомов обозначено подчеркиванием)

Нумерация			$A = \{x_1\}$		$A = \{x_1, x_2\}$		$A = \{x_1, x_2, x_3\}$		$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	
№$_{10}$	№$_2$	[№]^4	Q	$A^\Diamond$	Q	$A^\Diamond$	Q	$A^\Diamond$	Q	$A^\Diamond$
0	0_2	0000_2	$\underline{x}_1$	$e_\wedge$	$\underline{x}_2\underline{x}_1$	$e_\wedge$	$\underline{x}_3\underline{x}_2\underline{x}_1$	$e_\wedge$	$\underline{x}_4\underline{x}_3\underline{x}_2\underline{x}_1$	$e_\wedge$
1	1_2	0001_2	x_1	x_1	$\underline{x}_2x_1$	x_1	$\underline{x}_3\underline{x}_2x_1$	x_1	$\underline{x}_4\underline{x}_3\underline{x}_2x_1$	x_1
2	10_2	0010_2			$x_2\underline{x}_1$	x_2	$\underline{x}_3x_2\underline{x}_1$	x_2	$\underline{x}_4\underline{x}_3x_2\underline{x}_1$	x_2
3	11_2	0011_2			x_2x_1	x_2x_1	$\underline{x}_3x_2x_1$	x_2x_1	$\underline{x}_4\underline{x}_3x_2x_1$	x_2x_1
4	100_2	0100_2					$x_3\underline{x}_2\underline{x}_1$	x_3	$\underline{x}_4x_3\underline{x}_2\underline{x}_1$	x_3
5	101_2	0101_2					$x_3\underline{x}_2x_1$	x_3x_1	$\underline{x}_4x_3\underline{x}_2x_1$	x_3x_1
6	110_2	0110_2					$x_3x_2\underline{x}_1$	x_3x_2	$\underline{x}_4x_3x_2\underline{x}_1$	x_3x_2
7	111_2	0111_2					$x_3x_2x_1$	$x_3x_2x_1$	$\underline{x}_4x_3x_2x_1$	$x_3x_2x_1$
8	1000_2	1000_2							$x_4\underline{x}_3\underline{x}_2\underline{x}_1$	x_4
9	1001_2	1001_2							$x_4\underline{x}_3\underline{x}_2x_1$	x_4x_1
10	1010_2	1010_2							$x_4\underline{x}_3x_2\underline{x}_1$	x_4x_2
11	1011_2	1011_2							$x_4\underline{x}_3x_2x_1$	$x_4x_2x_1$
12	1100_2	1100_2							$x_4x_3\underline{x}_2\underline{x}_1$	x_4x_3
13	1101_2	1101_2							$x_4x_3\underline{x}_2x_1$	$x_4x_3x_1$
14	1110_2	1110_2							$x_4x_3x_2\underline{x}_1$	$x_4x_3x_2$
15	1111_2	1111_2							$x_4x_3x_2x_1$	$x_4x_3x_2x_1$

Таблица 2

Произведение идеалов
(идеал-левый множитель умножается почленно на идеал-результат из предыдущей строки)

Число атомов	Левый множитель	Умножение идеалов	Результат умножения
1	—	(Начальное состояние)	$[e\ x_1]$
2	$[e\ x_2]$	$[\ e[e\ x_1]\ x_2[e\ x_1]\ ]$	$[e\ x_1\ x_2\ x_2x_1]$
3	$[e\ x_3]$	$[\ e[e\ x_1\ \ x_2\ x_2x_1]\ x_3[e\ x_1\ \ x_2\ x_2x_1]\ ]$	$[e\ x_1\ x_2\ x_2x_1\ x_3\ x_3x_1\ \ x_3x_2\ x_3x_2x_1]$
4	$[e\ x_4]$	$[\ e[e\ x_1\ x_2\ x_2x_1\ x_3\ x_3x_1\ \ x_3x_2\ x_3x_2x_1]\ x_4\ [e\ x_1\ x_2\ x_2x_1\ x_3\ x_3x_1\ \ x_3x_2\ x_3x_2x_1]\ ]$	$[e\ x_1\ \ x_2\ x_2x_1\ x_3\ x_3x_1\ \ x_3x_2\ x_3x_2x_1\ \ x_4\ x_4x_1\ x_4x_2\ x_4x_2x_1\ x_4x_3\ x_4x_3x_1\ \ x_4x_3x_2\ x_4x_3x_2x_1]$

Краткая запись $\widetilde{X}[j]$ обозначает j-й квант, а $(\wedge X)[i]$ — i-й конъюнкт, где обозначенные кванты и конъюнкты стоятся над атомарными пропозициями из цепочки X.

В векторе, содержащем оценки вероятностей, элементы нумеруются сверху вниз, начиная с нуля. При сделанных предположениях векторы для квантов и конъюнктов над двумя и тремя атомарными пропозициональными формулами будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{Q}^{(2)} = \begin{pmatrix} p(\bar{x}_2\bar{x}_1) \\ p(\bar{x}_2 x_1) \\ p(x_2\bar{x}_1) \\ p(x_2 x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\bar{x}_1\bar{x}_2) \\ p(x_1\bar{x}_2) \\ p(\bar{x}_1 x_2) \\ p(x_1 x_2) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} p(e_\wedge) \\ p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_2 x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_1 x_2) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q}^{(3)} = \begin{pmatrix} p(\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1) \\ p(\bar{x}_3\bar{x}_2 x_1) \\ p(\bar{x}_3 x_2\bar{x}_1) \\ p(\bar{x}_3 x_2 x_1) \\ p(x_3\bar{x}_2\bar{x}_1) \\ p(x_3\bar{x}_2 x_1) \\ p(x_3 x_2\bar{x}_1) \\ p(x_3 x_2 x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \\ p(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \\ p(\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3) \\ p(x_1 x_2\bar{x}_3) \\ p(\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3) \\ p(x_1\bar{x}_2 x_3) \\ p(\bar{x}_1 x_2 x_3) \\ p(x_1 x_2 x_3) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} p(e_\wedge) \\ p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_2 x_1) \\ p(x_3) \\ p(x_3 x_1) \\ p(x_3 x_2) \\ p(x_3 x_2 x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_1 x_2) \\ p(x_3) \\ p(x_1 x_3) \\ p(x_2 x_3) \\ p(x_1 x_2 x_3) \end{pmatrix}.$$

Обозначим вектор, состоящий из 2^n нулей, как $\mathbf{0}^{[n]}$, вектор той же размерности, состоящий из единиц, как $\mathbf{1}^{[n]}$, единичную матрицу размерности $2^n \times 2^n$ как $\mathbf{E}^{(n)}$, нулевую матрицу той же размерности — как $\mathbf{0}^{(n)}$. Если размерность будет очевидна из контекста, то верхний индекс в нулевом и единичном векторе, а также в нулевой и единичной матрице будем опускать.

Рекуррентным образом определим два семейства матриц. Пусть

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и укажем сразу же, что

$$\mathbf{I}_1 \times \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{(1)}.$$

Тогда для $n \geq 2$ матрицы порядка n будем строить из матриц порядка $(n-1)$:

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & -\mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n-1} & \mathbf{J}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{n-1} \end{bmatrix},$$

матрицы одинакового порядка останутся обратными друг к другу:

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n \times \mathbf{I}_n = \mathbf{E}^{(n)}.$$

<u>Утверждение 1.</u> *Для любого $n \geq 1$ верхний элемент первого столбца матрицы $\mathbf{I}_n$ равен единице, остальные его элементы равны нулю, кроме того, сумма элементов в каждом из оставшихся столбцов равна нулю.*

Доказательство. Применим метод математической индукции. База индукции — матрица $\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. В первом столбце единичным является лишь верхний элемент, оставшийся равен нулю. Сумма элементов второго столбца равна нулю. Истинность базы индукции доказана.

Пусть теперь Утверждение 1 справедливо для матрицы $\mathbf{I}_{n-1}$, покажем его справедливость для матрицы

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & -\mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что сумма элементов в каждом столбце из $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} \\ -\mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}$ равна нулю «по построению», поскольку каждому элементу в верхней половине столбца соответствует противоположный ему в нижней. Сумма элементов в каждом столбце из $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, кроме первого, равна нулю, поскольку по индуктивному предположению сумма элементов в каждом столбце из $\mathbf{I}_{n-1}$, начиная со второго, равна нулю, а в нижней половине любого столбца из $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ находятся только нули. Первый элемент первого столбца матрицы $\mathbf{I}_{n-1}$ равен единице, а все остальные элементы в этом столбце равны нулю по индуктивному предположению. Поскольку в матрице $\mathbf{I}_n$ под $\mathbf{I}_{n-1}$ стоит нулевая матрица $\mathbf{0}$, в первом столбце матрицы $\mathbf{I}_n$ первый элемент сверху будет равен единице, а остальные — нулю. Индуктивный переход выполнен, утверждение доказано. •

<u>Утверждение 1'.</u> *Для любого $n \geq 1$ последний элемент последней строки матрицы $\mathbf{I}_n$ равен единице, остальные его элементы равны нулю, кроме того, сумма элементов в каждой из оставшихся строк равна нулю.*

Доказательство. Аналогично доказательству Утверждения 1. •

Пусть $j = 0(1)(2^n - 1)$ индексирует конъюнкты, а $i = 0(1)(2^n - 1)$ — кванты, тогда при выбранном подходе к перенумерации квантов и конъюнктов, а также на основе формулы включений–исключений в [14, 15] было показано, что

$$p(\widetilde{X}[j]) = \underline{\sum_{\substack{i=(2^n-1)(-1)0, \\ j=j\wedge\wedge i}} \big(\sim (i \oplus \oplus j)}\, p(\wedge(X)[i])\big), \qquad (2)$$

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$p(\wedge(X)[i]) = \sum_{\substack{j=(2^n-1)(-1)0, \\ i=i\wedge\wedge j}} p(\widetilde{X}[j]), \tag{2'}$$

где $\wedge\wedge$ — логическая операция побитового «или», $\oplus\oplus$ — логическая операция побитового «исключающего или», а выражение $\sim(i \oplus\oplus j)$ приобретает значение единица, если в числе-результате операции побитового исключающего или содержится четное число единичных битов, и значение минус единица, если в указанном результате нечетное число единичных битов.

Пользуясь (2) и (2'), покажем, что матрицы $\mathbf{I}_n$ и $\mathbf{J}_n$ позволяют установить соответствие между вектором вероятностей квантов и вектором вероятностей конъюнктов, записанное в виде

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{Q}^{(n)}, \tag{3}$$

$$\mathbf{J}_n \times \mathbf{Q}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n)}. \tag{3'}$$

Заметим, что соотношения (2) и (2') являются линейными и позволяют выразить $\mathbf{Q}^{(n)}$ через $\mathbf{P}^{(n)}$ и наоборот. Значит, каждому соотношению соответствует матрица линейного преобразования. Требуется показать, что матрицы $\mathbf{I}_n$ и $\mathbf{J}_n$ как раз и являются такими матрицами. Сначала установим справедливость соотношения (3).

<u>Утверждение 2'.</u> *Рассмотрим матрицу* $\mathbf{I}_n$ *и выражение (2). Пусть* $j = 0(1)(2^n - 1)$ *индексирует столбцы матрицы (а значит и конъюнкты), а* $i = 0(1)(2^n - 1)$ *индексирует строки матрицы (а значит и кванты), тогда элемент* $I_{j,i}^{(n)}$ *матрицы* $\mathbf{I}_n$*, стоящий в* j*-той строке,* i*-том столбце приобретает значение «ноль», когда* $j \neq j \wedge\wedge i$.

Замечание. Это утверждение говорит о том, что в матрице $\mathbf{I}_n$ нулевые элементы появляются в тех же случаях, когда нулевые коэффициенты стояли бы в выражении (2). В формальной записи выражения (2) члены с нулевыми коэффициентами просто не входят в сумму.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Базой индукции будет случай с $n = 1$. Построим соответствующую матрицу:

		i	
		0	1
j	0	0=0∧∧0 (истинно) ненулевой элемент (1)	0=0∧∧1 (истинно) ненулевой элемент (–1)
	1	1=1∧∧0 (ложно) 0	1=1∧∧1 (истинно) ненулевой элемент (1)

В получившейся матрице нулевой элемент появляется именно там, где выполнено условие $j \neq j \wedge\wedge i$. В остальных ячейках элементы ненулевые. База индукции доказана.

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Перейдем к рассмотрению индукционного перехода. Пусть утверждение истинно для всех матриц $\mathbf{I}_k$, при $k < n$, $n > 1$. Покажем, что оно истинно и для $k = n$. Пусть индекс j и i индексируют строки и столбцы матрицы $\mathbf{I}_n$, как указано в условии, а индексы j^* и i^* — строки и столбцы матрицы $\mathbf{I}_{n-1}$. Матрица $\mathbf{I}_n$ строится из блоков одинаковой размерности так, что ее элементы индексируются следующим образом:

		$[i]^n$	
		$[i]^n=0[i^*]^{n-1}$	$[i]^n=1[i^*]^{n-1}$
$[j]^n$	$[j]^n=0[j^*]^{n-1}$	$I^{(n-1)}_{j^*,i^*}$	$-I^{(n-1)}_{j^*,i^*}$
	$[j]^n=1[j^*]^{n-1}$	$I^{(n)}_{j,i}=0$	$I^{(n-1)}_{j^*,i^*}$

Для каждого из четырех блоков рассмотрим выполнение соответствующего логического условия:

		$[i]^n$	
		$[i]^n=0[i^*]^{n-1}$	$[i]^n=1[i^*]^{n-1}$
$[j]^n$	$[j]^n=0[j^*]^{n-1}$	$j=j\wedge\wedge i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0[j^*]^{n-1}=0[j^*]^{n-1}\wedge\wedge 0[j^*]^{n-1}\Leftrightarrow$ $j^*=j^*\wedge\wedge i^*.$ Ноль встречается там, где стоят нулевые элементы в матрице $\mathbf{I}_{n-1}$	$j=j\wedge\wedge i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0[j^*]^{n-1}=0[j^*]^{n-1}\wedge\wedge 1[i^*]^{n-1}\Leftrightarrow$ $j^*=j^*\wedge\wedge i^*.$ Ноль встречается там, где стоят нулевые элементы в матрице $\mathbf{I}_{n-1}$
	$[j]^n=1[j^*]^{n-1}$	$j=j\wedge\wedge i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1[j^*]^{n-1}=1[j^*]^{n-1}\wedge\wedge 0[i^*]^{n-1}$ Ложно из-за сочетания первых битов. Все элементы равны нулю.	$j=j\wedge\wedge i \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1[j^*]^{n-1}=1[j^*]^{n-1}\wedge\wedge 1[i^*]^{n-1}\Leftrightarrow$ $j^*=j^*\wedge\wedge i^*.$ Ноль встречается там, где стоят нулевые элементы в матрице $\mathbf{I}_{n-1}$

Сравнение двух последних таблиц завершает доказательство индуктивного перехода. Матрица, в которой расположение нулевых элементов диктуется выполнением условия $j \neq j \wedge\wedge i$, содержит их на тех же местах, что и матрица $\mathbf{I}_n$, построенная по определению из матриц $\mathbf{I}_{n-1}$ и нулевой матрицы соответствующей размерности. •

Утверждение 2''. *Рассмотрим матрицу* $\mathbf{I}_n$ *и выражение (2). Пусть* $j = 0(1)(2^n - 1)$ *индексирует столбцы матрицы (а значит и конъюнкты), а* $i = 0(1)(2^n - 1)$ *индексирует строки матрицы (а значит и кванты), тогда ненулевой элемент* $I^{(n)}_{j,i}$ *матрицы* $\mathbf{I}_n$, *стоящий в* j*-той строке,* i*-том столбце приобретает значение «1», когда число ненулевых битов в* $(i \oplus\oplus j)$ *четно, и значение «–1», когда их число в* $(i \oplus\oplus j)$ *нечетно.*

Замечание. В доказательстве мы снова воспользуемся представлением индексов элементов матрицы в двоичной форме и их выражением через индексы подматриц, составляющих рассматриваемую матрицу. На этот раз целью анализа станет определение четности–нечетности числа бит в результате операции побитового исключающего или.

Доказательство. Применим метод математической индукции, воспользовавшись обозначением и подходом к представлению матриц из доказательства Утверждения 2'. Для доказательства базы индукции рассмотрим структуру матрицы $\mathbf{I}_1$:

		i	
		0	1
j	0	$0=0\oplus\oplus0$ Число ненулевых битов равно нулю, т.е. является четным. 1	$1=0\oplus\oplus1$ Число ненулевых битов равно единице, т.е. является нечетным. -1
	1	(По построению матрицы, см. определение и Утверждение 2', элемент нулевой). 0	$0=1\oplus\oplus1$ Число ненулевых битов равно нулю, т.е. является четным. 1

Таким образом, показано, что ненулевые элементы обретают знак согласно четности–нечетности числа ненулевых битов в результате операции побитового исключающего или.

Перейдем к рассмотрению индукционного перехода. Пусть утверждение истинно для всех матриц $\mathbf{I}_k$, при $k < n$, $n > 1$. Покажем, что оно истинно и для $k = n$. Для этого $\sim(i \oplus\oplus j)$ рассмотрим в таблице, устроенной так же, как и вторая таблица из доказательства индукционного перехода в Утверждении 2':

		$[i]^n$	
		$[i]^n=0[i^*]^{n-1}$	$[i]^n=1[i^*]^{n-1}$
$[j]^n$	$[j]^n=0[j^*]^{n-1}$	$\sim(j\oplus\oplus i) = \sim(0[j^*]^{n-1}\oplus\oplus0[i^*]^{n-1}) =$ $=\sim([j^*]^{n-1}\oplus\oplus [i^*]^{n-1}) = \sim(j^*\oplus\oplus i^*)$ Означивания элементов совпадают с означиваниями элементов матрицы $\mathbf{I}_{n-1}$.	$\sim(j\oplus\oplus i) = \sim(0[j^*]^{n-1}\oplus\oplus1[i^*]^{n-1}) =$ $= -\sim([j^*]^{n-1}\oplus\oplus [i^*]^{n-1}) = -\sim(j'\oplus\oplus i^*)$ Означивания элементов противоположны означиваниям элементов матрицы $\mathbf{I}_{n-1}$.
	$[j]^n=1[j^*]^{n-1}$	(По построению матрицы, см. определение и Утверждение 2', все элементы равны нулю.) **0**	$\sim(j\oplus\oplus i) = \sim(1[j^*]^{n-1}\oplus\oplus1[i^*]^{n-1}) =$ $= \sim([j^*]^{n-1}\oplus\oplus [i^*]^{n-1}) = \sim(j^*\oplus\oplus i^*)$ Означивания элементов совпадают с означиваниями элементов матрицы $\mathbf{I}_{n-1}$.

Таким образом, показано, что выражение $\sim(i \oplus\oplus j)$ задает тот же знак у ненулевых элементов матрицы $\mathbf{I}_n$, что и ее определение. •

<u>Утверждение 2.</u> *Рассмотрим матрицу* $\mathbf{I}_n$. *Пусть* $j = 0(1)(2^n - 1)$ *индексирует столбцы матрицы, а* $i = 0(1)(2^n - 1)$ *— строки матрицы, тогда элемент* $I_{j,i}^{(n)}$ *матрицы* $\mathbf{I}_n$, *стоящий в* j*-той строке,* i*-том столбце приобретает значение согласно выражению:*

$$I_{j,i}^{(n)} = \begin{cases} 0, & j \neq j \wedge\wedge i, \\ \sim(j \oplus\oplus i), & j = j \wedge\wedge i. \end{cases}$$

Доказательство. Следует из Утверждений 2’ и 2’’. •

<u>Утверждение 3.</u> *Для* $n \geq 1$ *имеет место* $\mathbf{I}_n \times \mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n \times \mathbf{I}_n = \mathbf{E}^{(n)}$ (*т.е. матрицы* $\mathbf{I}_n$ *и* $\mathbf{J}_n$ *взаимно обратные*).

Доказательство. Производится по индукции. База индукции при $n = 1$:

$$\mathbf{I}_1 \times \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{(1)} \text{ и } \mathbf{J}_1 \times \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{(1)}.$$

Индукционный переход

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & -\mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{0}^{(n-1)} & \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{n-1} & \mathbf{J}_{n-1} \\ \mathbf{0}^{(n-1)} & \mathbf{J}_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} \times \mathbf{J}_{n-1} - \mathbf{I}_{n-1} \times \mathbf{0}^{(n-1)} & \mathbf{I}_{n-1} \times \mathbf{J}_{n-1} - \mathbf{I}_{n-1} \times \mathbf{J}_{n-1} \\ \mathbf{0}^{(n-1)} \times \mathbf{J}_{n-1} + \mathbf{I}_{n-1} \times \mathbf{0}^{(n-1)} & \mathbf{0}^{(n-1)} \times \mathbf{J}_{n-1} + \mathbf{I}_{n-1} \times \mathbf{J}_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(n-1)} & \mathbf{0}^{(n-1)} \\ \mathbf{0}^{(n-1)} & \mathbf{E}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{(n)}.$$

Аналогично рассматривается $\mathbf{J}_n \times \mathbf{I}_n$. •

В случае точечных оценок вероятностей над множеством квантов требования аксиоматики вероятностной логики (1–2) в матрично-векторном виде выразятся таким образом:

$$\mathbf{Q}^{(n)} \geq \mathbf{0}^{[n]},$$
$$\mathbf{Q}^{(n)}\mathbf{1}^{[n]} = 1.$$

Для проверки непротиворечивости назначения точечных оценок вероятностей над идеалом конъюнктов сначала требуется перейти к вероятностям над квантами, а затем проверить, что получившиеся вероятности неотрицательны. Второе условие — условие нормировки — будет выполнено автоматически, поскольку

$$\left(\mathbf{I}_n \times \mathbf{P}^{(n)}\right)\mathbf{1}^{[n]} = \mathbf{P}^{(n)}\left(\mathbf{I}_n^{\mathrm{T}} \times \mathbf{1}^{[n]}\right) \overset{\substack{\text{Утверж–}\\\text{дение 1}}}{=} \mathbf{P}^{(n)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(e_\wedge) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

В матричном виде условие «неотрицательности» (которое обозначается $E^{(n)}$) выражается следующим образом:

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{P}^{(n)} \geq \mathbf{0}^{[n]}.$$

На основе сведений из предметной области над идеалом конъюнктов может быть задано множество (которое обозначается $D^{(n)}$) исходных интервальных оценок вероятностей, представимое в векторном виде как

$$\mathbf{P}_\circ^{-,(n)} \leq \mathbf{P}^{(n)} \leq \mathbf{P}_\circ^{+,(n)},$$

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

где $\mathbf{P}_{\circ}^{-,(n)}$ — вектор, составленный из констант — (исходных) нижних границ вероятностей соответствующих конъюнктов, а $\mathbf{P}_{\circ}^{+,(n)}$ — такой же вектор, но содержащий верхние границы. Компоненты обоих векторов с нулевым индексом всегда равны единице. Объединение двух множеств ограничений, исходящих из аксиоматики вероятностной логики и из предметной области, имеет свое особое обозначение:

$$R^{(n)} = D^{(n)} \cup E^{(n)}.$$

Решая для каждой формулы f из идеала конъюнктов C задачи линейного программирования (ЗЛП) вида

$$p^{-}(f) = \min_{R^{(n)}}\{p(f)\}, \quad p^{+}(f) = \max_{R^{(n)}}\{p(f)\},$$

можно обнаружить несовместность системы ограничений $R^{(n)}$, и тогда признать интервальные оценки вероятностей над идеалом противоречивыми, либо получить уточненные и непротиворечивые оценки вероятностей каждого элемента идеала. Векторы, содержащие уточненные нижние и верхние оценки вероятностей, обозначаются $\mathbf{P}^{-,(n)}$ и $\mathbf{P}^{+,(n)}$ соответственно. Отметим, что показатель (n) часто опускается, если его можно восстановить из контекста. Задачи линейного программирования в векторных обозначениях запишутся таким образом:

$$\mathbf{P}^{-} = \min_{R}\{\mathbf{P}\}, \qquad \mathbf{P}^{+} = \max_{R}\{\mathbf{P}\},$$

где поиск минимума и максимума осуществляется почленно и независимо.

Наконец, заметим, что вероятность любой пропозициональной формулы f из $F(A)$ выражается как сумма вероятностей некоторых квантов из $Q(A)$. Вероятности же квантов линейно выражаются через вероятности конъюнктов. Следовательно, вероятность f линейно выражается через вероятности конъюнктов:

$$\forall(f \in F(A))\, \exists!\ \mathbf{L}^{(n)} : p(f) = \mathbf{L}^{(n)}\mathbf{P}^{(n)},$$

где $\mathbf{L}^{(n)}$ — вектор вещественных констант, совпадающий по размерности с $\mathbf{P}^{(n)}$. Если требуется оценить вероятность формулы f, опираясь на оценки вероятностей элементов идеала конъюнктов, то пополнив множество $R^{(n)}$ уравнением $p(f) = \mathbf{L}^{(n)}\mathbf{P}^{(n)}$ и решив задачи линейного программирования по минимизации и максимизации переменной $p(f)$, мы получим искомую оценку. Если же требуется учесть наше знание об интервальной оценке величины $p(f)$, то подобным же образом множество $R^{(n)}$ пополняется ограничением (3) и ограничением, исходящим из предметной области: $p_{\circ}^{-}(f) \le p(f) \le p(f)_{\circ}^{+}$.

<u>Пример 3.</u> (Множество ограничений $R^{(2)}$). Пусть $A = \{x_1, x_2\}$, тогда

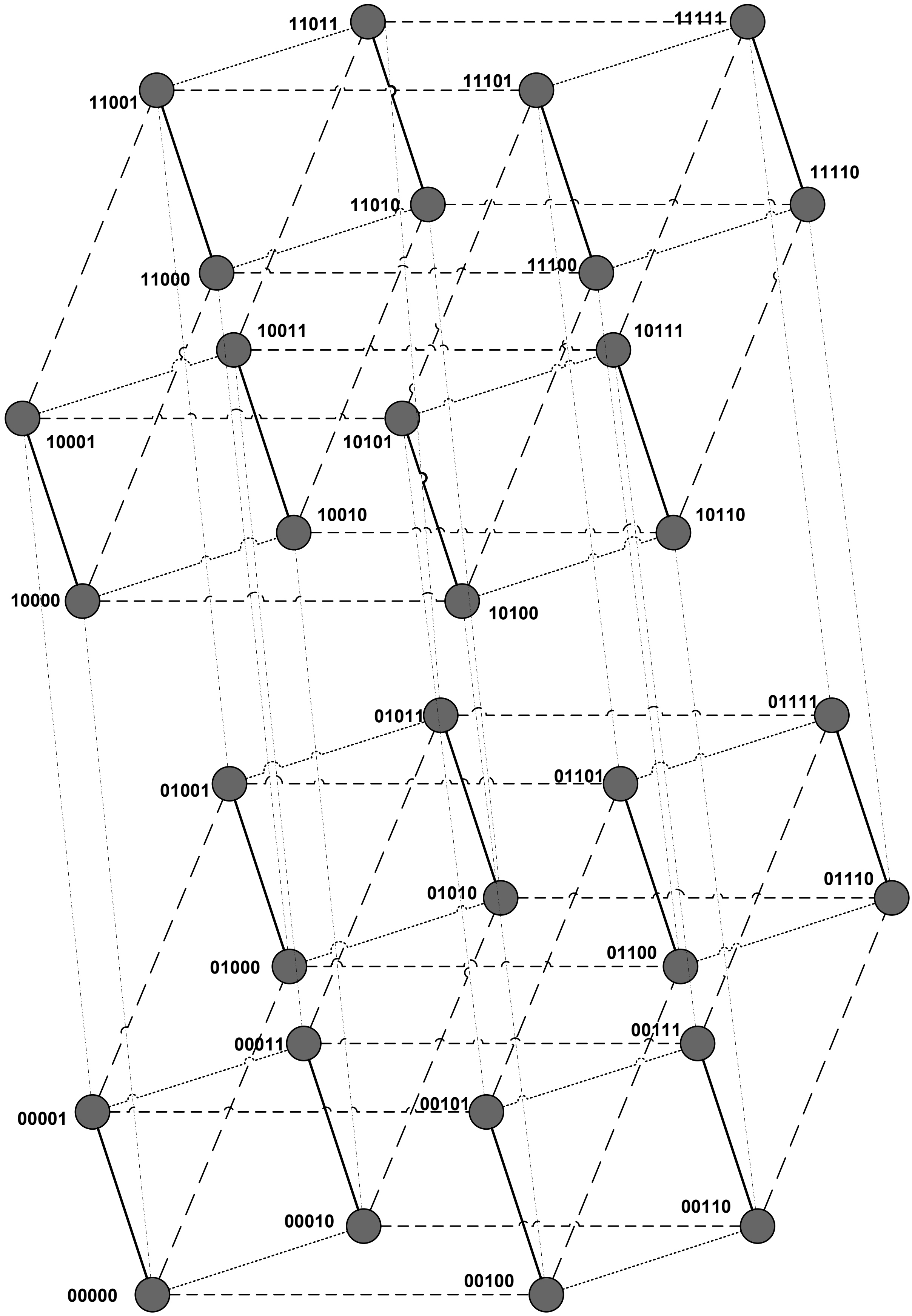

Рис. 1. Идеал 5-го порядка с перенумерованными элементами.
За основу взята цепочка конъюнкций $x_5x_4x_3x_2x_1$. Нуль указывает на отсутствие соответствующего атома в конъюнкте, а единица — вхождение.

$$E^{(2)}=\begin{Bmatrix} p(x_1x_2)\geq 0, \\ p(x_1)-p(x_1x_2)\geq 0, \\ p(x_2)-p(x_1x_2)\geq 0, \\ 1-p(x_1)-p(x_2)+p(x_1x_2)\geq 0 \end{Bmatrix};\ D^2=\begin{Bmatrix} 1\leq 1\leq 1, \\ p_\circ^-(x_1),\leq p(x_1)\leq p_\circ^+(x_1), \\ p_\circ^-(x_2),\leq p(x_2)\leq p_\circ^+(x_2), \\ p_\circ^-(x_1x_2),\leq p(x_1x_2)\leq p_\circ^+(x_1x_2) \end{Bmatrix}.$$

По определению $R^{(2)}=D^{(2)}\cup E^{(2)}$. Заметим, что первое ограничение в $D^{(2)}$ получается из-за участия в векторе вероятностей оценки вероятности пустого конъюнкта, эквивалентного тождественной истине. При вычислениях, разумеется, данное ограничение из рассмотрения исключается. •

Пример 4. (Множество ограничений $E^{(3)}$). Пусть $A=\{x_1,x_2,x_3\}$, тогда

$$E^{(3)}=\begin{Bmatrix} p(x_1x_2x_3)\geq 0, \\ p(x_1x_2)-p(x_1x_2x_3)\geq 0, \\ p(x_1x_3)-p(x_1x_2x_3)\geq 0, \\ p(x_1)-p(x_1x_2)-p(x_1x_3)+p(x_1x_2x_3)\geq 0, \\ p(x_2x_3)-p(x_1x_2x_3)\geq 0, \\ p(x_2)-p(x_1x_2)-p(x_2x_3)+p(x_1x_2x_3)\geq 0, \\ p(x_3)-p(x_1x_3)-p(x_2x_3)+p(x_1x_2x_3)\geq 0, \\ 1-p(x_1)-p(x_2)-p(x_3)+p(x_1x_2)+p(x_1x_3)+p(x_2x_3)-p(x_1x_2x_3)\geq 0 \end{Bmatrix}.$$

Отметим, что структура $D^{(3)}$ сходна со структурой $D^{(2)}$, с тем лишь различием, что в $D^{(3)}$ ограничения накладываются на все конъюнкты из идеала над $\{x_1,x_2,x_3\}$. •

4. Граф смежности и дерево смежности

Для определения графа смежности нам, в первую очередь, необходимо указать объекты, которые станут весами, приписанными его узлам (вершинам). В нашем контексте узлу графа смежности ставится в соответствие идеал цепочек конъюнкций. Заметим, что можно было бы приписать и просто множество атомарных пропозиций, над которыми построен соответствующий идеал. В дальнейшем существенным является то, какие элементы будут общими для весов в соседних узлах. Если бы мы приписали узлам графа множества атомарных пропозиций в качестве весов, то идеал, построенный над пересечением весов соседних вершин, совпал бы с идеалом, который бы получился как пересечение идеалов, построенных над весами в указанных соседних узлах. Поэтому, в конечном итоге, весами могли бы быть и множества атомарных пропозиций и идеалы конъюнктов, построенные над этими множествами. Мы выбираем идеалы, поскольку именно они в совокупности с оценками вероятностей являются математической моделью фрагмента знаний с вероятностной неопределенностью.

Графом смежности называется *ненаправленный граф*, в котором

1) между каждой парой узлов, веса которых содержат общие элементы, существует путь. Следует обратить внимание, что этот путь мо-

жет содержать одно или большее число ребер. Кроме того, узлы с весами, содержащими общие элементы, не обязательно соединены ребром — достаточно, если они соединены путем;

2) в веса каждого из узлов любого пути (в графе) входят все элементы, общие для начального и конечного узлов,
3) вес одного узла не входит полностью в вес никакого другого узла.

Каждому ребру в графе смежности удобно приписать вес — множество общих элементов весов, приписанных тем двум узлам, которые соединяются рассматриваемым ребром. В этом случае вес на ребре называется *сепаратором* (или *разделителем*).

Поскольку мы рассматриваем ненаправленные графы, то *деревом смежности* называется ациклический граф смежности — такой граф, что в нем нет ни одного цикла, то есть пути, начало и конец которого бы совпали.

Несколько примеров, иллюстрирующих два введенных определения, представлены на рис. 2.

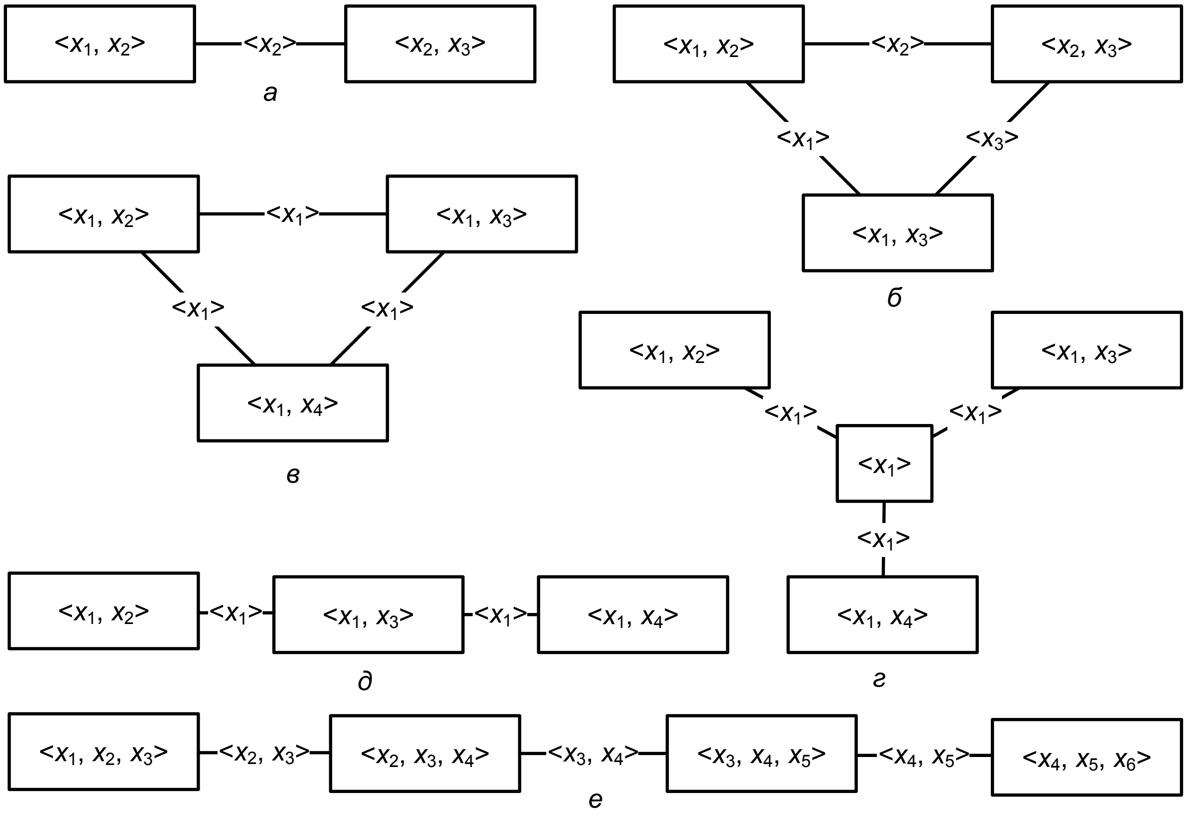

Рис. 2. Примеры к понятию графа и дерева смежности.
а — граф и одновременно дерево смежности; *б* — не граф смежности (нарушено требование 2); *в* — граф смежности, но не дерево (присутствует цикл); *г* — не граф смежности (нарушено требование 3); *д* — граф и одновременно дерево смежности; е — граф и одновременно дерево смежности (фактически линейная цепь идеалов конъюнктов [12, 15]).

5. АБС со структурой дерева смежности и точечными оценками истинности

Идеал конъюнктов с вероятностными оценками истинности является одной из возможных математических, логико-вероятностных моделей фрагмента знаний (ФЗ) с неопределенностью. Совокупность ФЗ образуют базу фрагментов знаний (БФЗ). Ее математической моделью, в свою очередь, станет алгебраическая байесовская сеть (АБС), образованная из идеалов конъюнктов и их оценок истинности. В настоящей работе мы сосредоточимся на АБС, которые представимы в виде дерева смежности и состоят из одной связной компоненты. Заметим, что если компонент связности несколько, то утверждения, попавшие в разные компоненты, полагаются независимыми. Изменение сведений об одних не влечет изменения состояния наших знаний о других.

Нашей задачей является анализ вероятностной семантики дерева смежности, в узлах которого помещены идеалы цепочек конъюнкций с приписанными им оценками вероятности истинности. Мы рассмотрим случаи точечных и интервальных оценок, четыре степени непротиворечивости АБС, представленной в виде такого дерева смежности, а также вопросы, связанные с гипотезой условной независимости и апостериорными выводом, учитывающем эту гипотезу.

Рассмотрим два идеала конъюнктов, поостренных над атомарными пропозициями из цепочек конъюнкций U и V соответственно. Эти цепочки имеют структуру

$$U = XY, \quad V = YZ.$$

Цепочка Y может быть пустой, а цепочки X, Y и Z не имеют общих элементов. Для удобства введем обозначение $W = XYZ$.

Пусть над квантами вида $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ введены *согласованные* распределения вероятностей $p_U\left(\tilde{U}\right)$ и $p_V\left(\tilde{V}\right)$; они согласованы на общей подцепочке:

$$\forall \tilde{Y}\ p_U\left(\tilde{Y}\right) = p_V\left(\tilde{Y}\right).$$

Тогда над квантами вида $\tilde{W}$ можно построить распределение вероятностей $p_W\left(\tilde{W}\right)$, по формуле:

$$p_W\left(\tilde{W}\right) = p_W\left(\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}\right) = \begin{cases} 0, & p_V(\tilde{Y}) = 0, \\ \dfrac{p_V(\tilde{X}\tilde{Y})p_U(\tilde{Y}\tilde{Z})}{p_V(\tilde{Y})} & p_V(\tilde{Y}) \neq 0, \end{cases} \tag{4}$$

маргинализующееся над квантами вида $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ к соответствующим исходным:

$$\forall \tilde{U}\ p_U\left(\tilde{U}\right) = p_W\left(\tilde{U}\right), \quad \forall \tilde{V}\ p_V\left(\tilde{V}\right) = p_W\left(\tilde{V}\right).$$

Такое построение *композиции распределений* случайных бинарных последовательностей (СБП) равносильно утверждению об условной независимости случайных бинарных последовательностей $\hat{X}$ и $\hat{Z}$ при известном означивании $\hat{Y}$. Сама же условная независимость определяется в общем случае как:

$$\forall \tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}\ \ p\left(\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}\right)p\left(\tilde{Y}\right) = p\left(\tilde{X}\tilde{Y}\right)p\left(\tilde{Y}\tilde{Z}\right).$$

Употребление термина условная независимость становиться интуитивно ясным при $p(\tilde{Y}) \neq 0$:

$$\frac{p\left(\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}\right)p\left(\tilde{Y}\right)}{p\left(\tilde{Y}\right)p\left(\tilde{Y}\right)} = \frac{p\left(\tilde{X}\tilde{Y}\right)p\left(\tilde{Y}\tilde{Z}\right)}{p\left(\tilde{Y}\right)p\left(\tilde{Y}\right)},$$

$$\frac{p\left(\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}\right)}{p\left(\tilde{Y}\right)} = \frac{p\left(\tilde{X}\tilde{Y}\right)}{p\left(\tilde{Y}\right)} \cdot \frac{p\left(\tilde{Y}\tilde{Z}\right)}{p\left(\tilde{Y}\right)},$$

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$p\left(\tilde{X}\tilde{Z} \mid \tilde{Y}\right) = p\left(\tilde{X} \mid \tilde{Y}\right) p\left(\tilde{Z} \mid \tilde{Y}\right).$$

Соответствующие факты были доказаны, например, в [10–12].

Пусть каждая из цепочек конъюнкций X и Z разбита на две произвольные непересекающиеся подцепочки: $X = X_1 X_2$ и $Z = Z_1 Z_2$. Тогда справедливы равенства

$$p_W\left(\tilde{X}_s \tilde{Y}\tilde{Z}\right) = \begin{cases} 0, & p_V(\tilde{Y}) = 0, \\ \dfrac{p_V(\tilde{X}_s \tilde{Y}) p_U(\tilde{Y}\tilde{Z})}{p_V(\tilde{Y})}, & p_V(\tilde{Y}) \neq 0, \end{cases}$$

$$p_W\left(\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}_r\right) = \begin{cases} 0, & p_V(\tilde{Y}) = 0, \\ \dfrac{p_V(\tilde{X}\tilde{Y}) p_U(\tilde{Y}\tilde{Z}_r)}{p_V(\tilde{Y})}, & p_V(\tilde{Y}) \neq 0, \end{cases} \qquad (4')$$

$$p_W\left(\tilde{X}_s \tilde{Y}\tilde{Z}_r\right) = \begin{cases} 0, & p_V(\tilde{Y}) = 0, \\ \dfrac{p_V(\tilde{X}_s \tilde{Y}) p_U(\tilde{Y}\tilde{Z}_r)}{p_V(\tilde{Y})}, & p_V(\tilde{Y}) \neq 0, \end{cases}$$

$$r \in \{1, 2\}, \quad s \in \{1, 2\},$$

которые непосредственно вытекают из суммирования левой и правой часть равенства (4) по означиваниям цепочек $\tilde{X}_{3-s}$ и $\tilde{Z}_{3-r}$ соответственно. Кроме того, СБП над любой подцепочкой X и СБП над любой подцепочкой Z условно независимы при известном означивании $\hat{Y}$.

Отметим, что согласованность распределений на квантах $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ равносильна согласованности распределений на соответствующих идеалах конъюнктов над цепочками U и V. Поэтому если распределения над идеалами согласованы в общем подыдеале над цепочкой Y, то указанным выше способом эти два распределения можно распространить до распределения в объемлющем идеале, построенном над атомарными пропозициями из цепочки W. Если фрагменты знаний (т.е. идеалы с оценками вероятностей — точечными в данном случае) над U и V непротиворечивы, то будет непротиворечив и построенный объемлющий их фрагмент знаний над W.

АБС называется *глобально непротиворечивой*, если ее можно погрузить в объемлющий фрагмент знаний, который непротиворечив. «Погрузить» означает то, что в получившемся объемлющем фрагменте знаний сохраняются неизменными оценки истинности тех конъюнктов, которые входили в исходную АБС.

Утверждение 4. *Пусть АБС с точечными оценками истинности представлена в виде дерева смежности*[1] *и каждый фрагмент знаний в этой АБС непротиворечив, тогда сама АБС глобально непротиворечива.*

Доказательство. Выполняется на основе принципа математической индукции. База индукции доказывается для АБС из двух фрагментов знаний. В этом случае для построения объемлющего непротиворечивого фрагмента знаний мы

[1] Особо отметим еще раз, что оценки вероятностей на пересечениях идеалов *согласованы*, т.е. совпадают.

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

используем композицию распределений случайных бинарных последовательностей.

Индуктивный переход. Пусть утверждение справедливо для всех АБС, состоящих из не более чем $n-1$ ($n \geq 3$) фрагментов знаний. Докажем справедливость утверждения для АБС, состоящей из n фрагментов знаний. Поскольку АБС представима в виде дерева смежности, у этого дерева найдется хотя бы один узел-лист (см. Замечание 4.5), связанный ребром только с одним другим фрагментом знаний. Исключим узел-лист из АБС. Получившаяся АБС также представима в виде дерева смежности. По условию индукционного перехода ее можно достроить за счет композиции распределений до непротиворечивого объемлющего ФЗ. Рассмотрим полученный объемлющий ФЗ и ранее исключенный ФЗ-лист. АБС, полученная из этих двух ФЗ, представима в виде дерева смежности, объемлющий ФЗ и ФЗ-лист имеют согласованный распределения вероятностей (так как эти распределения были согласованы у ФЗ-листа и его непосредственного соседа, вошедшего в объемлющий ФЗ). За счет композиции распределений мы можем достроить АБС, состоящую из двух ФЗ, до непротиворечивого объемлющего ФЗ. •

Замечание 4.1. Поскольку композиция распределений СБП коммутативна и ассоциативна, распределение на объемлющем ФЗ над АБС из утверждения 4, построенное за счет серии указанных композиций, не будет зависеть от порядка поглощения фрагментов знаний объемлющими фрагментами знаний.

Замечание 4.2. Поскольку композиция распределений устанавливает условную независимость для двух случайных бинарных последовательностей, разделенных третьей случайной бинарной последовательностью, распределение вероятностей над объемлющим фрагментом знаний из Утверждения 4 будет обладать следующим свойством: если мы получим две или более непересекающиеся компоненты связности из дерева смежности, исключив из его узлов и других сепараторов пропозиции, в которые входит хотя бы одна атомарная пропозиция из некоторого выбранного сепаратора, то тогда СБП, построенные над любыми двумя компонентами связности, будут условно независимы при известном означивании СБП, построенной над выбранным сепаратором.

Замечание 4.3. Композиция не является единственным способом продолжить два согласованных распределения до распределения на объемлющем ФЗ. Контрпримеры приведены в [10, 11].

Замечание 4.4. Однако требование условной независимости (гипотеза условной независимости) двух СБП относительно СБП над общими атомарными пропозициями, делает композицию единственным возможным способом распространения согласованных вероятностных распределений.

Замечание 4.5. В дереве смежности с числом узлов, не меньшем двух, имеется как минимум два узла-листа. База индукции очевидна: в дереве смежности из двух узлов оба узла являются листьями. Пусть теперь все деревья смежности с числом узлов $n-1$, где $n>3$, содержат не менее двух узлов-листьев. Рассмотрим индукционный переход. При добавлении нового узла может иметь место несколько ситуаций. Первая, когда новый узел присоединяется не к листам, не образуя цикла. Тогда он становится сам листом. Число листов возросло. Вторая, когда новый узел крепится к листу. Тогда новый узел становиться листом. Число листов осталось неизменным. Третья ситуация, когда новый узел крепится к двум или более листьям. Эта ситуация недопустима, поскольку в дереве образуется цикл и оно перестает быть деревом. Наконец, четвертая ситуация, когда узел крепится к листу и еще к одной или нескольким

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

вершинам, которые не являются листьями, не образуя при этом цикла. Тогда узел становится сам листом. Число листов не уменьшается. Следовательно, все деревья смежности с числом узлов имеют не менее двух листьев. Индукционный переход завершен [18, 22, 23].

6. Степени непротиворечивости АБС со структурой дерева смежности

Вопросы, связанные с определением и поддержанием заданной степени непротиворечивости АБС, равно как и подходы к определению непротиворечивости фрагмента знаний с точечными и интервальными оценками истинности ставились и изучались в ряде публикаций [3–9, 11–17, 21]; в настоящей работе мы рассмотрим возникающие вопросы в применении к АБС со структурой дерева смежности.

Определения непротиворечивости фрагмента знаний с точечными оценками (по набору оценок на конъюнктах должно восстанавливаться непротиворечивое распределение на квантах) и с интервальными оценками (если для произвольного элемента ФЗ мы выбираем произвольную точку из интервала его оценки, то тогда в интервалах оценок всех других элементов можно выбрать такие точечные значения, что в совокупности с первым выбранным эти значения задают непротиворечивое точечное распределение на элементах ФЗ) были рассмотрены в разделе 3.

АБС считается *локально* непротиворечивой, если каждый фрагмент знаний в сети непротиворечив. Этот уровень непротиворечивости не предъявляет требований к согласованности оценок на формулах, общих для двух или нескольких фрагментов знаний.

АБС считается *экстернально* непротиворечивой, если каждый фрагмент знаний в сети непротиворечив, а также оценки истинности каждой формулы, входящей одновременно в два фрагмента знаний или более, совпадают.

АБС считается *интернально* непротиворечивой, если каждый фрагмент знаний в сети непротиворечив, а также для каждой формулы из АБС для любого точечного значения из интервала оценки ее истинности можно выбрать согласованные (т.е. совпадающие на одинаковых формулах) точечные значения во всех фрагментах знаний, так, что все получившиеся ФЗ с точечными оценками будут непротиворечивы.

АБС считается *глобально* непротиворечивой, если ее с имеющимися оценками можно погрузить в непротиворечивый объемлющий фрагмент знаний и при этом оценки на формулах из АБС не изменятся.

Отметим, что в общем случае из глобальной непротиворечивости следует интернальная, из интернальной — экстернальная, а из экстернальной — локальная. Проверка и поддержание степеней непротиворечивости имеют различную вычислительную сложность: самая вычислительно сложная — глобальная непротиворечивость, затем идет интернальная, экстернальная и, наконец, локальная.

«Идеальным» случаем непротиворечивости является глобальная непротиворечивость, поскольку только она гарантирует существование хотя бы одного «всеобщего» распределения вероятностей над квантами, построенными сразу над всеми атомарными пропозициями из АБС. Но проверка глобальной непротиворечивости по ее определению экспоненциально сложна, поэтому важ-

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ным является рассмотрение отношений степеней непротиворечивостей. В этой связи установлено несколько нетривиальных фактов.

Несовпадение локальной и экстернальной непротиворечивости очевидно: достаточно рассмотреть два пересекающихся ФЗ, у которых не будут совпадать оценки на общих элементах.

Существует пример АБС, состоящей из двух ФЗ (следовательно, эта АБС представима в виде дерева смежности), которая экстернально непротиворечива, но не является интернально непротиворечивой [16, 17]. Вместе с тем в этом примере можно уточнить оценки так, что АБС становится интернально непротиворечивой. Таким образом, результаты поддержания экстенальной и интернальной непротиворечивости могут не совпадать, однако вопрос о существовании экстернально непротиворечивой АБС, которая была бы одновременно интернально *противоречивой* (т.е. оценки истинности элементов этой АБС оказались бы несовместны с требованиями интернальной непротиворечивости), остается открытым.

Существует пример алгебраической байесовской сети, построенной на цикле трех фрагментов знаний второго порядка (рис. 2б), которая является интернально непротиворечивой, но противоречивой глобально [5, 11, 12]. Заметим, что из-за наличия цикла такая АБС не может быть представлена в виде дерева смежности. Оказывается, что в случае ациклических АБС из их интернальной непротиворечивости следует их глобальная непротиворечивость [11, 12]. Ниже мы оформим этот результат для АБС, представимых в виде дерева смежности.

Было показано, что линейная комбинация конечного числа непротиворечивых фрагментов знаний непротиворечива [11, 12]. Линейно комбинируются соответствующие оценки истинности. В интервальных оценках линейно комбинируются нижние и верхние границы соответственно.

Из этого следует, что линейная комбинация конечного набора одинаково непротиворечивых АБС будет являться АБС, непротиворечивой в той же степени, что и исходные АБС [11, 12]. Из этого, в свою очередь, следует, что линейная оболочка конечного набора одинаково непротиворечивых АБС будет являться АБС, непротиворечивой в той же степени, что и исходные АБС [11, 12].

<u>Утверждение 5.</u> *Пусть АБС представима в виде дерева смежности, тогда из ее интернальной непротиворечивости следует ее глобальная непротиворечивость.*

Доказательство. Для АБС, представимой в виде дерева смежности, с точечными оценками истинности Утверждение 5 немедленно следует из Утверждения 4.

Пусть теперь в рассматриваемой алгебраической байесовской сети допускаются интервальные оценки. Рассмотрим произвольную формулу из АБС, выберем произвольную точку из интервальной оценки ее истинности. Поскольку алгебраическая байесовская сеть интернально непротиворечива, то для всех оставшихся формул из этой АБС можно выбрать точки из интервалов их оценок истинности, что получившаяся совокупность точеных оценок на АБС будет интернально непротиворечива. Она, как было показано, будет и глобально непротиворечива. Следовательно, погружение исходной алгебраической байесовской сети в объемлющий фрагмент знаний не приведет к исключению значений из исходных интервальных оценок истинности формул из АБС.

Построим такой объемлющий фрагмент знаний. Для каждой границы каждой оценки формулы из алгебраической байесовской сети построим непротиворечивый фрагмент знаний с точечными оценками, как это было сделано выше. Получится конечный набор непротиворечивых фрагментов знаний. Рассмотрим фрагмент знаний, который строится как линейная оболочка получившегося набора фрагментов знаний. Как было указано, такой фрагмент знаний тоже будет непротиворечивым, при этом он будет содержать в точности те оценки вероятности истинности формул из исходной АБС, которые совпадают с исходными. •

Замечание 5. Утверждение 5 позволяет заметно снизить вычислительную сложность и размерность задач линейного программирования, которые придется решать для проверки глобальной непротиворечивости АБС, представимой в виде дерева смежности, поскольку вместо погружения в объемлющий ФЗ достаточно будет проверить выполнение условий интернальной непротиворечивости рассматриваемой АБС.

7. Распространение свидетельств в АБС со структурой дерева смежности

Настоящий раздел содержит обобщение алгоритмов и результатов, рассмотренных в [12, 15, 17] в основном для линейных цепей фрагментов знаний. Мы сначала вкратце изложим подход к наиболее широкому обобщению алгоритмов апостериорного вывода[2], но потом анализ будет сосредоточен на более узком классе случаев, представляющем, тем не менее, особую важность для теории байесовских сетей.

В [15] было показано, как распространить произвольное свидетельство в цепи с произвольным видом оценок (точечных или интервальных, но обязательно непротиворечивых). Отметим, что в терминах деревьев смежности мы называем такую цепь *путем* (все пути у нас рассматриваются *без самопересечений*).

Пусть в узел дерева смежности (т.е. в идеал цепочек конъюнкций) поступило свидетельство (одного из видов, рассмотренных в [15]: одно детерминированное, кортеж детерминированных, одно недетерминированное, кортеж недетерминированных, одно недетерминированное с неопределенностью, кортеж недетерминированных с неопределенностью). Наша задача состоит в том, чтобы распространить его влияние до каждого фрагмента знаний, входящего в АБС, представленную в виде дерева сочленений.

Заметим, что между узлом, в который поступило свидетельство, и любым другим узлом существует путь (без самопересечений!), поскольку мы рассматриваем только связные графы. Этот путь единственный, поскольку если существовал бы хотя бы еще один отличный от него путь, то тогда оба пути образовали бы цикл. Но циклы в *дереве смежности* невозможны по определению.

Таким образом, между узлом, в который поступило свидетельство, и любым другим узлом существует единственный путь, который мы можем рассматривать как линейную цепь фрагментов знаний. Следовательно, свидетельство может быть распространено вдоль этой цепи по алгоритмам, рассмотренным

---

[2] Эти алгоритмы, например, в [15, 17] строго описаны для линейных цепей фрагментов знаний, мы же будем предлагать их обобщение для АБС, представимой в виде дерева сочленений.

в [15]. Мы можем распространить влияние свидетельства в произвольный узел, а значит, мы можем распространить влияние поступившего свидетельства во все узлы АБС, представимой в виде дерева сочленений — указанный подход позволяет обобщить алгоритмы распространения свидетельства по линейной цепи фрагментов знаний на случай дерева сочленений с фрагментами знаний в узлах (рис. 6).

Рассмотрим более детально обработку свидетельства при его поступлении в отдельный фрагмент знаний — соответствующий идеал конъюнктов построен над атомарными пропозициями цепочки VX, при этом подцепочки V и X общих элементов не имеют. Ограничимся двумя видами свидетельств: кортежем детерминированных свидетельств $\langle \tilde{V} \rangle$ и кортежем недетерминированных свидетельств $\langle p_{[a]}(\tilde{V}) \rangle$. Здесь мы не будем рассматривать подробно расчет вероятности кортежа свидетельств над фрагментом знаний. Соответствующие вычисления описаны, например, в [15, 17].

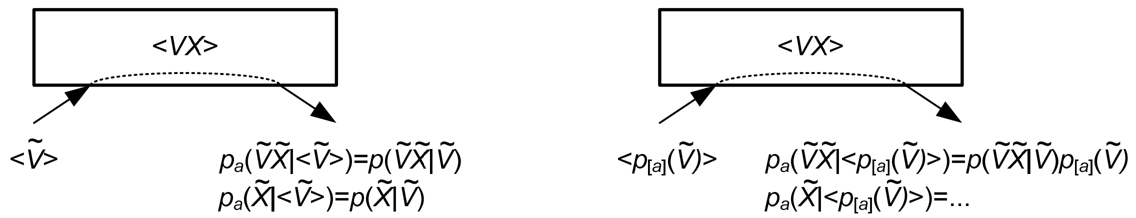

Рис. 3. Обработка свидетельства в отдельном фрагменте знаний.

Кортеж недетерминированных свидетельств фактически рассматривается как набор кортежей детерминированных свидетельств с разным означиванием, построенных над одной и той же цепочкой конъюнкций V, при этом на наборе задано вероятностное распределение $p_{[a]}(\tilde{V})$. Результаты пропагации кортежа недетерминированных свидетельств $\langle p_{[a]}(\tilde{V}) \rangle$ получаются усреднением результатов пропагации кортежей детерминированных свидетельств $\langle \tilde{V} \rangle$, построенных над теми же атомарными пропозициями, по вероятностному распределению $p_{[a]}(\tilde{V})$, заданному над $\tilde{V}$. Заметим, что вероятности $p_{[a]}$ могут быть заданы как над квантами $\tilde{V}$, так и над элементами идеала V^{Δ}.

Кортеж детерминированных свидетельств можно рассмотреть как частный случай кортежа недетерминированных свидетельств, в котором ненулевую вероятность имеет только одно означивание аргументных мест в цепи свидетельств.

Обозначим априорные вероятности элементов идеала как p, а апостериорные вероятности как p_a. При принятых обозначениях влияние кортежей свидетельств выражается следующим набором формул:

$$p_a\left(\tilde{V}\tilde{X} \mid \langle \tilde{V} \rangle\right) = p\left(\tilde{V}\tilde{X} \mid \tilde{V}\right) = \frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\tilde{V}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)} = \frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)} \quad \left[= p\left(\tilde{X} \mid \tilde{V}\right)\right], \tag{5}$$

$$p_a\left(\tilde{X} \mid \langle \tilde{V} \rangle\right) = p\left(\tilde{X} \mid \tilde{V}\right) = \frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}, \tag{6}$$

$$p_a\left(\tilde{V}\tilde{X} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle\right)= p\left(\tilde{V}\tilde{X} \mid \tilde{V}\right)p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)=\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\tilde{V}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)=\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}\right), \tag{7}$$

$$p_a\left(\tilde{X} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle\right)=\sum_{\tilde{V}} p\left(\tilde{X} \mid \tilde{V}\right)p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)=\sum_{\tilde{V}}\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}\right). \tag{8}$$

Обратим внимание на то, что выражение (7) вводит апостериорную вероятность таким образом, что на квантах $\tilde{V}$ она совпадает с вероятностью соответствующего означивания в поступившем кортеже недетерминированных свидетельств:

$$p_a\left(\tilde{V} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle\right)=\sum_{\tilde{X}} p_a\left(\tilde{V}\tilde{X} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle\right)=\sum_{\tilde{X}}\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)=p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\frac{\sum_{\tilde{X}} p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}=$$
$$=p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\frac{p\left(\tilde{V}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}=p_{[a]}\left(\tilde{V}\right). \tag{9}$$

Совпадение условных вероятностей в формуле (5) позволяет нам в случае кортежа детерминированных свидетельств не хранить апостериорные вероятности над всем исходным идеалом конъюнктов $(VX)^{\Delta}$; достаточно хранить апостериорные вероятности над подыдеалом X^{Δ} исходного идеала, в который не входят конъюнкты, содержащие хотя бы один атом из кортежа свидетельств.

Сосредоточимся теперь на анализе важного частного случая. Пусть задана глобально непротиворечивая АБС, представимая в виде дерева смежности. Оценки вероятностей элементов в АБС точечные. Пусть также на вход поступает кортеж недетерминированных свидетельств. Расчеты при распространении свидетельства от фрагмента знаний к фрагменту знаний представлены в виде схемы на рис. 4, они производятся согласно [15].

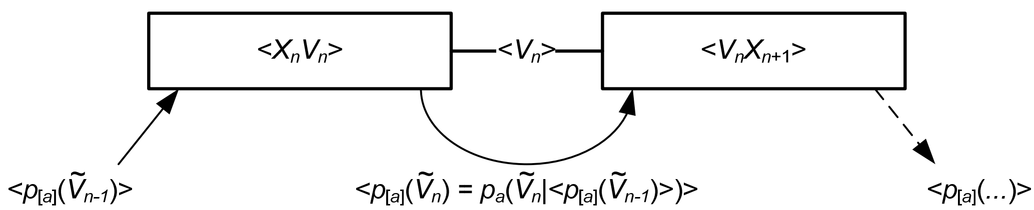

Рис. 4. Распространение влияния свидетельства в случае точечных оценок вероятностей: схема расчетов.

Передача свидетельства между фрагментами знаний может схематично быть описана так:

1) свидетельство поступает в первый фрагмент знаний (на рис. 4 слева);
2) в первом фрагменте знаний рассчитываются апостериорные вероятности для всех элементов;
3) в частности, апостериорные вероятности рассчитываются и для подыдеала, являющегося общим для двух фрагментов знаний;
4) апостериорные вероятности на этом подыдеале формируют новое «виртуальное» свидетельство;
5) оно передается во второй фрагмент знаний;

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

6) во втором фрагменте знаний рассчитываются апостериорные вероятности всех элементов;
7) в силу формулы (9) апостериорные вероятности на общем подыдеале конъюнктов совпадают.

Расчеты ведутся по формулам

$$p_a\left(\tilde{X}_n\tilde{V}_n \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right)\right\rangle\right)=\frac{p\left(\tilde{X}_n\tilde{V}_n\right)}{p\left(\tilde{V}_{n-1}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right), \tag{10}$$

$$p_a\left(\tilde{V}_n \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right)\right\rangle\right)=\sum_{\tilde{X}_n}p\left(\tilde{X}_n\tilde{V}_n \mid \tilde{V}_{n-1}\right)p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right)=\sum_{\tilde{X}_n}\frac{p\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_n\right)}{p\left(\tilde{V}_{n-1}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right), \tag{11}$$

$$p_{[a]}\left(\tilde{V}_n\right)=p_a\left(\tilde{V}_n \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right)\right\rangle\right). \tag{12}$$

$$p_a\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_{n+1} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_n\right)\right\rangle\right)=\frac{p\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}_n\right)=\frac{p\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)}p_a\left(\tilde{V}_n \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right)\right\rangle\right), \tag{13}$$

$$p_a\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_{n+1} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_n\right)\right\rangle\right)=\frac{p\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)}\sum_{\tilde{X}_n}\frac{p\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_n\right)}{p\left(\tilde{V}_{n-1}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right), \tag{13'}$$

$$p_a\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_{n+1} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right)\right\rangle\right):=p_a\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_{n+1} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_n\right)=p_a\left(\tilde{V}_n \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right)\right\rangle\right)\right\rangle\right). \tag{13''}$$

При расчетах надо учитывать, что $\tilde{V}_{n-1}$ имеет общие аргументные места с $\tilde{X}_n\tilde{V}_n$. Означивания общих аргументных мест в формулах (10–13') должны быть согласованными. Далее по цепи фрагментов знаний свидетельство распространяется тем же образом — посредством формирования следующего виртуального свидетельства на подыдеале конъюнктов, общем для текущего и следующего фрагментов знаний. Формально же мы принимаем апостериорную вероятность из (13) еще и как (13'').

Выделим некоторую особенность: цепь фрагментов знаний может быть достаточно длинной, ФЗ, стоящие в начале и в конце этой цепи, могут не иметь общих элементов. При построении объемлющего фрагмента знаний над этой цепью можно было бы ожидать, что конъюнкты, содержащие элементы сразу из двух указанных ФЗ, должны были бы получить интервальную оценку вероятностей. В свою очередь это должно было бы повлечь появление интервальной апостериорной оценки вероятности истинности в последнем ФЗ или даже ранее. Но интервальная оценка (за исключением особых случаев [15, разделы 7 и 9]) в расчетах по вышеприведенным формулам не возникает. Следовательно, на каком-то этапе неявным образом из всего семейства распределений, которое задается цепью ФЗ, выбирается либо какое-то одно распределение (и тогда нужно было бы знать, чем это распределение отличается от других), либо вообще формулы, лежащие в основе процедуры апостериорного вывода, противоречат аксиоматике вероятностей. Стоит задача в явном виде описать распределение вероятностей, используемое имплицитно.

Для дальнейших поисков сформулируем возникшую проблему более четко: существует ли такое распределение вероятностей над фрагментом знаний, объемлющем цепь фрагментов, при котором результаты апостериорного вывода по поступившему кортежу свидетельств в объемлющем фрагменте знаний совпали бы с результатами апостериорного вывода в цепи фрагментов знаний. А если существует, то каким образом это распределение выделяется из семейства возможных распределений вероятностей? Аналогичный вопрос ставится и относительно АБС, представимой в виде дерева смежности: существует ли распределение вероятностей такого же рода над фрагментом знаний, в который может быть погружена исходная АБС, чтобы результаты апостериорного вывода над АБС и объемлющем ее ФЗ совпадали бы.

Снова рассмотрим ситуацию с двумя пересекающимися фрагментами знаний. На них заданы точечные распределения, согласованные на общих элементах. С помощью композиции над объемлющем ФЗ построим общее распределение, согласованное с двумя исходными (рис. 5). Заметим сразу, что таким образом мы воспользовались сформулированной ранее гипотезой условной независимости. Зададимся вопросом, что будет происходить при пропагации свидетельства (или кортежа свидетельств) в таком ФЗ.

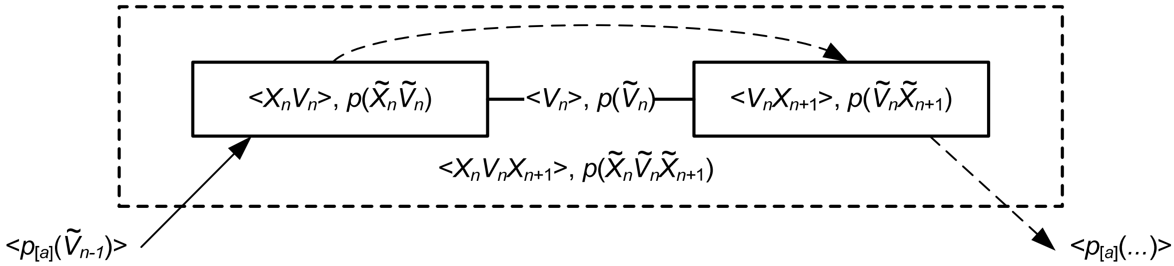

Рис. 5. Распространение влияния свидетельства в случае точечных оценок вероятностей: схема расчетов при продолжении распределения на основе композиции двух исходных.

$$p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right) = \frac{p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)}, \tag{14}$$

$$p_a\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \tilde{V}_{n-1}\right) = \frac{p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)} \cdot \frac{1}{p\left(\tilde{V}_{n-1}\right)}, \tag{15}$$

$$p_a\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \tilde{V}_{n-1}\right) = \sum_{\tilde{X}_n} p_a\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \tilde{V}_{n-1}\right) = \sum_{\tilde{X}_n} \frac{p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_{n-1}\right)}, \tag{16}$$

$$p_a\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \tilde{V}_{n-1}\right) = \sum_{\tilde{X}_n} \frac{p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_{n-1}\right)} = \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)} \sum_{\tilde{X}_n} \frac{p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n\right)}{p\left(\tilde{V}_{n-1}\right)} \tag{16'}$$

$$p_a\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \tilde{V}_{n-1}\right) = \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)} \sum_{\tilde{X}_n} p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n \mid \tilde{V}_{n-1}\right) = \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)} p\left(\tilde{V}_n \mid \tilde{V}_{n-1}\right) \tag{16''}$$

Если задан $\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right)\right\rangle$ — исходный кортеж недетерминированных свидетельств, то по (9) и (16') мы получим

$$p_a\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right)\right\rangle\right) = p_a\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \tilde{V}_{n-1}\right) p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right) =$$
$$= \sum_{\tilde{X}_n} \frac{p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_{n-1}\right)} p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right) = \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)} \sum_{\tilde{X}_n} \frac{p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n\right)}{p\left(\tilde{V}_{n-1}\right)} p_{[a]}\left(\tilde{V}_{n-1}\right). \tag{17}$$

Формула (17) дает тот же результат, что и формула (13'). Следовательно, если над двумя фрагментами знаний построен объемлющий фрагмент знаний с распределением, которое является композицией распределений (4) на исходных фрагментах, то результаты распространения свидетельств по формулам (10–13'') совпадают с результатами распространения свидетельств в объемлющем фрагменте знаний, выполненному по определению (5–8). Или, что то же, при выполнении гипотезы условной независимости вместо формул (5–8) можно использовать формулы (10–13'') для получения тех же результатов апостериорного вывода.

Напомним формулу, использующуюся для определения условной вероятности:

$$p\left(\tilde{X}_n\tilde{V}_n\tilde{X}_{n+1}\right)=p\left(\tilde{V}_n\tilde{X}_{n+1}\mid\tilde{X}_n\right)p\left(\tilde{X}_n\right), \tag{18}$$

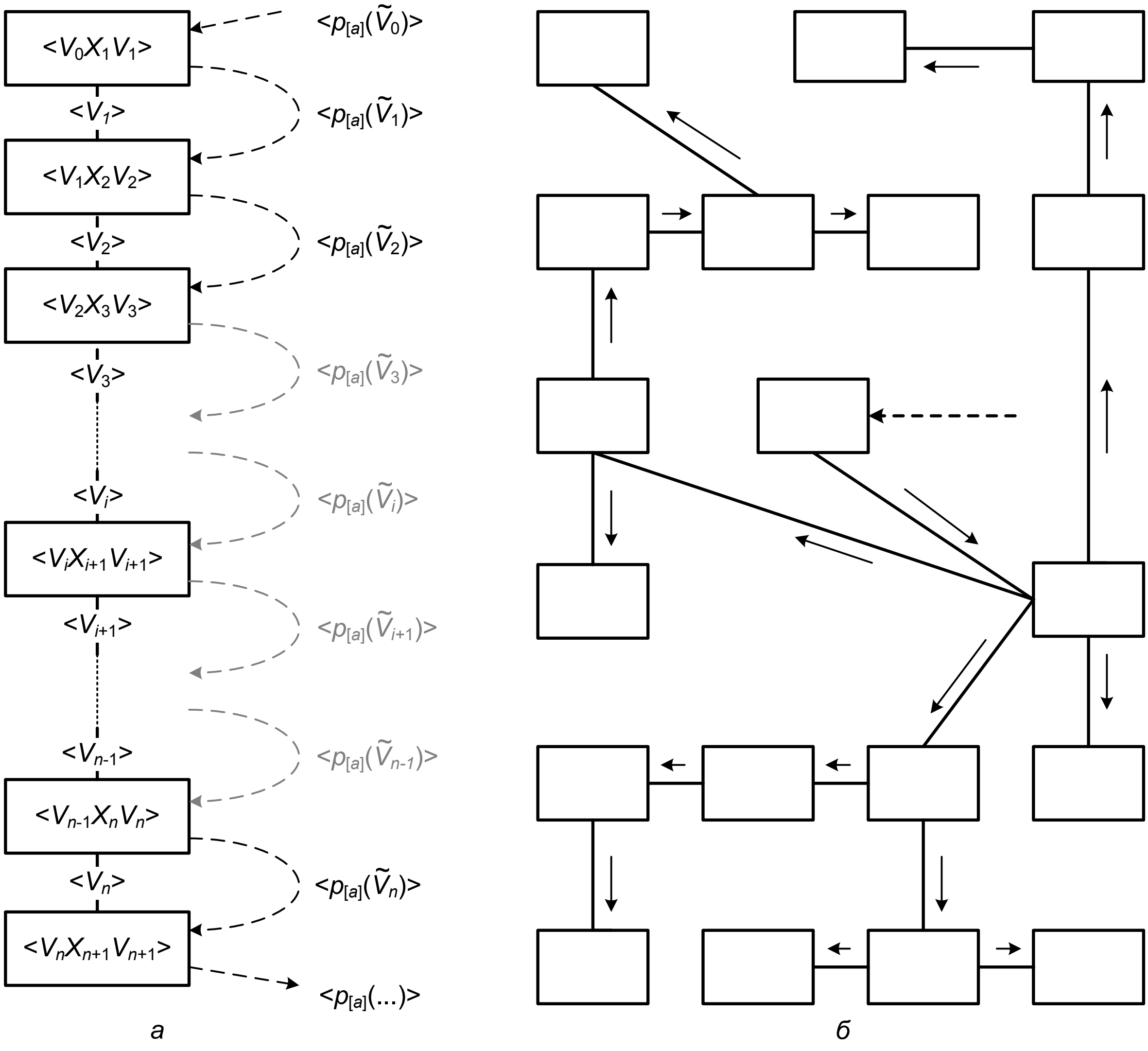

Рис. 6. Распространение кортежа свидетельств.
а — кортеж свидетельств распространяется (пропагируется) из одного конца цепи фрагментов знаний в другой; *б* — кортеж свидетельств поступил в один из узлов дерева смежности и распространяется (пропагируется) по другим узлам.

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Пусть для вывода использованы формулы (10–13''). Тогда условная вероятность фактически рассчитывается как апостериорная (считаем, что поступило детерминированное свидетельство $\left\langle \tilde{X}_n \right\rangle$):

$$p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \tilde{X}_n\right) = p_a\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \left\langle \tilde{X}_n \right\rangle\right). \tag{19}$$

Исходя из (10–13'') получим

$$p_{[a]}\left(\tilde{V}_n\right) = p_a\left(\tilde{V}_n \mid \left\langle \tilde{X}_n \right\rangle\right) = \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_n\right)}{p\left(\tilde{X}_n\right)}, \tag{20}$$

$$p_a\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}_n\right)\right\rangle\right) = \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)} p_{[a]}\left(\tilde{V}_n\right), \tag{21}$$

$$p_a\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}_n\right)\right\rangle\right) = \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)} \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_n\right)}{p\left(\tilde{X}_n\right)}, \tag{22}$$

$$p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1} \mid \tilde{X}_n\right) := \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)} \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_n\right)}{p\left(\tilde{X}_n\right)}. \tag{23}$$

Подставим полученное выражение (23) в формулу (18):

$$p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right) = \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)} \frac{p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_n\right)}{p\left(\tilde{X}_n\right)} p\left(\tilde{X}_n\right) = \frac{p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)}{p\left(\tilde{V}_n\right)}, \tag{24}$$

$$p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right) p\left(\tilde{V}_n\right) = p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n\right) p\left(\tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right). \tag{25}$$

Формула (24) говорит о том, что распространение свидетельства по формулам (10–13'') имплицитно индуцирует распределение над $\tilde{X}_n \tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}$, полученное как композиция по формуле (4), а формула (25) указывает на то, что индуцированное распределение $p\left(\tilde{X}_n \tilde{V}_n \tilde{X}_{n+1}\right)$ удовлетворяет определению условной независимости $\tilde{X}_n$ от $\tilde{X}_{n+1}$ при известном означивании $\tilde{V}_n$.

<u>Утверждение 6.</u> *Пусть задана непротиворечивая алгебраическая байесовская сеть N с точечными оценками вероятностей истинности своих элементов, представимая в виде дерева смежности, и объемлющий ее фрагмент знаний C. На ФЗ C распределение вероятностей получено последовательным применением композиции к распределениям вероятностей над фрагментами знаний из АБС N. Тогда пропагация кортежа недетерминированных свидетельств, поступающего в один из фрагментов знаний исходной АБС, даст одинаковые результаты при пропагации в N по формулам* (*10–13''*) (*т.е. через распространение виртуальных свидетельств*) *и при пропагации в C по формулам* (*5–8*).

Доказательство. Производится по индукции по количеству фрагментов знаний в дереве смежности. База индукции для дерева смежности, состоящего из двух фрагментов знаний, доказана выше, см. (14–17) и (20–25).

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Пусть теперь утверждение справедливо для всех деревьев смежности с числом фрагментов знаний $n-1$ и меньше, $n \geq 3$. Выберем фрагмент знаний, который является листом дерева смежности (напомним, в таком дереве имеется не менее двух листьев). И исключим этот ФЗ из дерева смежности. Для получившегося дерева смежности утверждение справедливо, результаты апостериорного вывода двумя способами совпадают. Погрузим это дерево в объемлющий ФЗ. Тогда из получившегося ФЗ и ФЗ-листа, который был исключен, получается новое дерево смежности, состоящее всего из двух фрагментов знаний. Для этого дерева утверждение также справедливо. Индукционный переход завершен. •

Если детерминированное свидетельство поступает не в один фрагмент знаний, а в несколько, тогда это свидетельство надо разбить на непересекающиеся части, каждая из которых будет поступать только в один фрагмент знаний. Затем каждую часть надо последовательно рассматривать как отдельное детерминированное свидетельство и пропагировать их по формулам (10–13'') одно за другим в АБС, представимой в виде дерева смежности. Поскольку этот способ пропагации индуцирует одно и то же распределение на объемлющем фрагменте знаний, порядок поступления частей детерминированного свидетельства не скажется на результатах. Они не будут зависеть от порядка поступления частей кортежа детерминированных свидетельств, т.е. *результаты апостериорного вывода по формулам* (*10–13''*) *в АБС, представимой в виде дерева смежности, устойчивы к порядку поступления детерминированных свидетельств.*

Заметим, что если в АБС, представимую в виде дерева смежности, поступает кортеж недетерминированных свидетельств, то их результаты их пропагации вычисляются на основе пропагации кортежей соответствующих детерминированных свидетельств.

На рис. 6 представлена схема распространения свидетельства в двух ациклических АБС: в линейной цепи фрагментов знаний и в алгебраической байесовской сети, представимой в виде дерева сочленений. При рассмотрении дерева сочленений отметим, что свидетельство фактически распространяется по линейным цепям фрагментов знаний: цепи образуется из путей, соединяющих узел, в который поступило свидетельство, и узел-лист.

7. Заключение

В настоящей работе алгебраические байесовские сети рассмотрены как деревья смежности с идеалами конъюнктов в узлах. Элементам идеалов приписаны оценки вероятности их истинности. Таким образом, в узлах дерева смежности фактически помещены фрагменты знаний (точнее, математические модели фрагментов знаний на основе идеалов конъюнктов). Оценки истинности на одинаковых элементах, входящие в разные идеалы, предполагаются согласованными, т.е. совпадающими.

Дерево смежности с фрагментами знаний (идеалами конъюнктов с заданными оценками вероятностей их элементов) — это обобщение линейной цепи фрагментов знаний [9], допускающее более сложную структуру графа, лежащего в основе АБС. Дерево смежности позволяет «ветвление» в своих узлах, т.е. из узла может исходить несколько цепей фрагментов знаний или поддеревьев смежности. Вместе с тем сохраняется очень важное свойство линейной цепи — ее ацикличность. Деревья смежности ацикличны по определению. Алгебраические байесовские сети, представимые в виде дерева смежности, называются ациклическими.

Несмотря на то, что деревья смежности обладают более сложной структурой, их вероятностная семантика сходна с семантикой линейных цепей фрагментов знаний. Без дополнительных предположений о связи между узлами деревья смежности задают семейство распределений вероятностей. Оно может быть пустым, содержать один или бесконечно много элементов.

Если предположить условную независимость наборов булевских переменных, разделенных сепараторами, то тогда при точечных непротиворечивых оценках истинности в АБС распределение вероятностей во фрагменте знаний, ее объемлющем, восстанавливается однозначно с помощью последовательного применения операции композиции распределений [9–12]. Более того, в случае точечных оценок алгоритм апостериорного вывода, опирающийся на генерацию промежуточных «виртуальных» свидетельств, имплицитно предполагает справедливость гипотезы условной независимости, и, наоборот, если предположить справедливость гипотезы условной независимости, то апостериорный вывод в фрагменте знаний, объемлющем исходную АБС, даст тот же результат что и пропагация свидетельства с использованиям генерации промежуточных виртуальных свидетельств.

Из интернальной непротиворечивости АБС, представимой в виде дерева смежности, следует ее глобальная непротиворечивость. Этот результат позволяет существенно снизить сложность вычислений при поддержании непротиворечивости АБС. Отношение же экстернальной и интернальной непротиворечивостей как состояний АБС остается выясненным не до конца. Из интернальной следует экстернальная непротиворечивость. Описан пример АБС, представимой в виде дерева сочленений, которая экстернально непротиворечива, но не является непротиворечивой интернально; при выполнении требований интернальной непротиворечивости оценки на этой АБС сужаются. Неясно, тем не менее, существует ли АБС, непротиворечивая экстернально, но противоречивая интернально.

Рассмотрение алгебраических байесовских сетей в терминах графов смежности и деревьев смежности позволило строго оформить понятие *ациклических АБС* и выполнить анализ их свойств, подготовило понятийный аппарат для последующего компаративного анализа АБС и БСД, а также создало возможность применять структуры данных, использовавшиеся при задании БСД, для представления ациклических АБС в программных приложениях.

При введение дерева смежности в теорию АБС открываются несколько вопросов, требующих дальнейшего исследования: представимость данной АБС или данного набора ФЗ в виде дерева смежности, формальное описание и структуризация класса деревьев смежности, которые можно построить над заданным набором идеалов цепочек конъюнкций, сопоставление вероятностной семантики ациклических алгебраических байесовских сетей и байесовских сетей доверия, «транслированных» в дерево смежности, а затем и в дерево сочленений [18, 22, 23].

Литература

1. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 616 с.
2. *Городецкий В. И.* Байесовский вывод. Л.: ЛИИАН, 1991. 38 с. (Препринт №149).
3. *Городецкий В. И.* Адаптация в экспертных системах // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1993. № 5. С. 101–110.

4. *Городецкий В. И.* Алгебраические байесовские сети — новая парадигма экспертных систем // Юбилейный сборник трудов институтов Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН. Т. 2. М.: РАН, 1993. С. 120–141.
5. *Городецкий В. И., Тулупьев А. Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 1997. № 5. С. 33–42.
6. *Городецкий В. И.* Моделирование неопределенных знаний // SCM'98: Сборник докладов. Т.1. СПб., 1998. С. 98–102.
7. *Городецкий В. И., Тулупьев А. Л.* Непротиворечивость баз знаний с количественными мерами неопределенности // КИИ'98: Сборник научных трудов. Т. 1. Пущино, 1998. С. 100–106.
8. *Никитин Д. А., Тулупьев А. Л.* Классификация экстремальных задач, возникающих при обработке моделей фрагментов знаний с вероятностной неопределенностью // Телекоммуникации, математика и информатика — исследования и инновации. Вып. 6. Межвузовский сборник научных трудов. СПб.: ЛГОУ им. А.С. Пушкина, 2002. С. 100–103.
9. *Николенко С. И., Тулупьев А. Л.* Вероятностная семантика байесовских сетей в случае линейной цепи фрагментов знаний // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2, т. 2. СПб.: Наука, 2005. С. 53–75.
10. *Тулупьев А. Л.* Композиция распределений случайных бинарных последовательностей // Информационные технологии и интеллектуальные методы. 1996. Вып. 1. СПб.: СПИИРАН, 1996. С. 105–112.
11. *Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети: теоретические основы и непротиворечивость. СПб.: СПИИРАН, 1995. 76 с.
12. *Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный подход к моделированию баз знаний с неопределенностью. СПб.: СПИИРАН, 2000. 282 с.
13. *Тулупьев А. Л.* Метод построения и исследования баз фрагментов знаний с неопределенностью // Труды СПИИРАН. Вып. 1., т. 1. СПб.: СПИИРАН, 2002. С. 258–271.
14. *Тулупьев А. Л.* Генерация множества ограничений на распределение оценок вероятности над идеалом цепочек конъюнкций // Вестник молодых ученых. 2004. № 4. Сер. Прикладная математика и механика. 2004. № 1. С. 35–43.
15. *Тулупьев А. Л. и Никитин Д. А.* Экстремальные задачи в апостериорном выводе над идеалами цепочек конъюнкций // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2, т. 2. СПб.: Наука, 2005. С. 12–52
16. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Синтез согласованных оценок истинности утверждений в интеллектуальных информационных системах // Изв. вузов. Приборостроение. 2006. 12 с. [В печати.]
17. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.
18. *Cowell R. G., Dawid A. Ph., Lauritzen S. L., Spiegelhalter D. J.* Probabilistic Networks and Expert Systems. Berlin: Springer, 2003. 321 p.
19. *Fagin R., Halpern J. Y., Megiddo N.* A Logic for Reasoning about Probabilities. Report RJ 6190 (60900) 4/12/88. P. 1–41.
20. *Fagin R., Halpern J. Y.* Uncertainty, Belief, and Probability–2 // Proc. of the IEEE Symposium on Logic and Computer Science. 1991. Vol. 7. P. 160–173.
21. *Gorodetski V., Skormin V., Popyack L.* Data Mining Technology for Failure Prognostics of Avionics, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2002. Vol. 38, no. 2. P . 388–403.
22. *Jensen F. V.* Bayesian Networks and Decision Graphs. New York: Springer-Verlag, 2001. 268 p.
23. *Korb K. B., Nicholson A. E.* Bayesian Artificial Intelligence. New York: Chapman and Hall/CRC, 2004. 364 p.
24. *Nilsson N. J.* Probabilistic Logic // Artificial Intelligence. 1986. Vol. 47. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1986. P. 71–87.
25. *Nilsson N. J.* Probabilistic Logic Revisited // Artificial Intelligence. 1993. Vol. 59. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1993. P. 31–36.
26. *Perl J*. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. New York etc.: Morgan Kaufmann Publ., 1994. P. 552.