АДЕКВАТНОСТЬ ПРЯМОГО И ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДОВ В ЗАДАЧАХ КОМПЛЕКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. И. Миронов[1], Ю. В. Миронов[2]

[1]Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, [2]Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского

[1]СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург; 199178, [2]ВКА им. А. Ф. Можайского, П-82, Ждановская наб., д. 13, Санкт-Петербург, 197082

[1]<ipi@iias.spb.ru>, [2]<mironuv@yandex.ru>

УДК 629.191
Миронов В. И., Миронов Ю. В. **Адекватность прямого и вариационного подходов в задачах комплексного оценивания нелинейных динамических систем** // Труды СПИИРАН. Вып. 3, т. 2. — СПб.: Наука, 2006.
Аннотация. *Рассматривается применение вариационного подхода для решения комплексных задач статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем по критерию максимального правдоподобия. Обсуждаются вопросы адекватности вариационных оценок и оценок прямого подхода.* — Библ.14 назв.

UDC 629.191
Mironov V. I., Mironov Y. V. **The Adequacy of Variation and Direct Approaches in Complex Estimation Problems of Non-linear Dynamic Systems** // SPIIRAS Proceedings. Issue 3, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2006.
Abstract. *We consider the application of variation approach for solution of complex problems of statistic estimation of non-linear dynamic systems meeting the criterion of maximum verisimilitude. We discuss questions of variation and direct estimations adequacy.* — Bibl.14 items.

1. Введение

Задачи оценивания параметров состояния и характеристик динамических систем по результатам измерений имеют широкое распространение на практике. Особенно важное место они занимают на всех этапах создания, экспериментальной отработки и эксплуатации объектов ракетно-космической, авиационной, корабельной техники, а также других сложных автоматических и автоматизированных систем, комплексов различного назначения и видовой принадлежности. Наиболее сложные задачи оценивания приходится, в частности, решать при навигационно-баллистическом обеспечении полетов космических аппаратов (КА), при разработке систем автономной навигации и др.

В настоящее время основными методами определения орбит КА являются методы, основанные на совместной обработке результатов наблюдений по полной выборке. Они широко освещены в отечественной и зарубежной литературе [1–5, 10–12, 13, 14 и др.] и успешно решают широкий круг важных и сложных прикладных задач. Однако вопросы улучшения их точностных и вычислительных характеристик продолжают оставаться актуальными.

Созданная методология в основном базируется на непосредственном применении в динамических задачах оценивания условий метода максимального правдоподобия (ММП) и метода наименьших квадратов. По смыслу они представляют собой необходимые условия оптимальности, характерные для прямых методов оптимизации.

Вместе с тем, необходимо отметить, что методы теории оптимальной обработки измерений, как и методы теории оптимального управления, могут строиться и развиваться на основе использования различных форм и принципов формирования условий оптимальности — как прямых, так и вариационных. Вариационные условия оптимальности создают новую базу для решения данного класса задач.

Вопросам обоснования и разработки указанного вариационного подхода к задачам статистического оценивания нелинейных динамических систем посвящены работы авторов [6–9]. Данная статья посвящена анализу условий адекватности прямого и вариационного подходов в задачах комплексного оценивания нелинейных динамических систем.

2. Постановка задачи

Достаточно общая задача оценивания параметров движения динамического объекта заключается в наилучшем в некотором смысле определении n-мерного вектора его исходного состояния $\bar{x}_0$ на заданный начальный момент времени $t = t_0$ по результатам измерений, проводимых в N точках t_i, заданных на интервале измерений $\tau = T - t_0$. В более широкой постановке одновременно требуется также оценить некоторый l-мерный вектор $\bar{c}$ параметров модели движения и p-мерный вектор $\bar{c}_1$ параметров модели измерений.

В качестве базовой рассмотрим следующую нелинейную задачу оптимального оценивания.

Пусть динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \in [t_0, T]. \tag{1}$$

Измерениям подвергается m-мерный вектор

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}[\bar{x}(t), \bar{c}_1].$$

Измеренное значение вектора $\bar{\psi}$ в момент t_i обозначим, как $\bar{y}(t_i) = \bar{y}_i$ и представим модель измерений в виде

$$\bar{y}(t_i) = \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1] + \bar{\delta}_i, \qquad i = \overline{1, N}; \qquad t_i \in [t_0, T]. \tag{2}$$

Здесь $\bar{\delta}_i$ — m-мерный вектор случайных ошибок измерений, стохастическое изменение которого зададим некоторым многомерным непрерывным дифференцируемым распределением $f(\bar{\delta}_i, \bar{\alpha}_i)$ с параметрами $\bar{\alpha}_i$, отличающемся в общем случае от нормального распределения.

Требуется найти такие оценки векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$, которые обеспечивают минимальное значение функционала:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \{\bar{y}(t_i), \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1], \bar{\alpha}_i\}, \tag{3}$$

где

$$\rho_i = \ln f_i \{\bar{y}(t_i) - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1], \bar{\alpha}_i\}; \qquad i = \overline{1, N}. \tag{4}$$

Функции $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t)$ и $\bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1]$ будем считать однозначными, ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам во всей области их определения. Нетрудно видеть, что функционал (3) есть не что иное, как логарифмическая функция правдоподобия. Предполагается выполнение известных условий наблюдаемости.

3. Вариационные условия оптимальности оценок

В работе авторов [9] для поставленной задачи комплексного оценивания были получены следующие вариационные условия оптимальности оценок

Оптимальные оценки векторов $\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1$ и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t); \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}^T \bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_c = -\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{c}}^T (\bar{x},\bar{c},t)\bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

при граничных условиях

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0; \quad \bar{\mu}_c(t_0) = \bar{\mu}_c(T) = 0; \quad \bar{\mu}_{c_1}(t_0) = \bar{\mu}_{c_1}(T) = 0;$$

$$\begin{gathered} \bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial\rho_i}{\partial\bar{x}}[\bar{y}_i, \bar{\psi}(\bar{x}_i,\bar{c}_1), t_i]; \\ \bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \frac{\partial\rho_i}{\partial\bar{c}_1}[\bar{y}_i, \bar{\psi}(\bar{x}_i,\bar{c}_1), t_i]. \end{gathered} \tag{6}$$

В этих выражениях функция $\rho[\cdot]$ является логарифмической функцией правдоподобия (4).

Приведенные выше условия оптимального оценивания нетрудно конкретизировать применительно к заданному виду распределения вектора случайных ошибок измерений. Так, если для вектора $\bar{\delta}_i$ принимается нормальное распределение $N(0,K_{\delta_i})$ с нулевым вектором математического ожидания и корреляционной матрицей K_{δ_i}, что, как правило, имеет место на практике, при совместном оценивании векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$ из условий (5) и (6) приходим к следующей краевой задаче

$$\begin{gathered} \dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t); \qquad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}^T \bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_c = -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{c}}^T \bar{\lambda}; \qquad \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = 0; \\ \dot{\bar{\mu}}_c = -\frac{\partial\bar{\varphi}^T}{\partial\bar{c}} \bar{\lambda}; \qquad \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = 0; \\ \bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0; \ \ \bar{\mu}_c(t_0) = \bar{\mu}_c(T) = 0; \end{gathered} \tag{7}$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_0) = \bar{\mu}_{c_1}(T) = 0\,;$$

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}^T(t_i)}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1}\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1]\}\,;$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}^T(t_i)}{\partial \bar{c}_1} K_{\delta_i}^{-1}\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1]\}\,;$$

$$i = \overline{1,N}\,.$$

4. Прямые условия оптимальности комплексного оценивания

Пусть, как и ранее, динамика объекта описывается уравнением

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0\,. \tag{8}$$

В моменты t_i, $i = \overline{1,N}$ на интервале $t \in [t_0, T]$ проводятся измерения параметров движения. Математическая модель связи измеряемых $\bar{y}_i$ и оцениваемых параметров $\bar{z}_0$ задается, как и ранее, выражением

$$\bar{y}_i = \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1) + \bar{\delta}_i\,; \qquad \bar{\delta}_i \to N(0, K_{\delta_i})\,. \tag{9}$$

Требуется найти оценки векторов начального состояния $\bar{x}_0$, а также векторов параметров модели движения $\bar{c}$ и модели измерений $\bar{c}_1$ по критерию минимума квадратического функционала

$$I = \sum_{i=1}^{N} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1)]^T K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1)]\,. \tag{10}$$

При использовании для решения этой задачи прямого подхода необходимые условия оптимальности оценок векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$ представляются следующим образом

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{x}_0} = 0\,; \qquad \frac{\partial I}{\partial \bar{c}} = 0\,; \qquad \frac{\partial I}{\partial \bar{c}_1} = 0\,. \tag{11}$$

После выполнения операций дифференцирования система уравнений (11) принимает следующий конкретизированный вид

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{x}_0}^T \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{x}_i}^T K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1)] = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}_i^T}{\partial \bar{c}} \frac{\partial \bar{\psi}_i^T}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1)] = 0\,;$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{c}_1}^T K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1)] = 0\,.$$

Входящие в эти уравнения матрицы частных производных $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{x}_0}$ и $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{c}}$ могут быть определены методом конечных разностей или же интегрированием следующих матричных линейных дифференциальных уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0}\right) = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0}\,; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{c}}\right) = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{c}} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{c}}\,.$$

Эти уравнения интегрируются при следующих начальных условиях

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \bar{x}_0} = E; \qquad \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \bar{c}} = 0,$$

где E и 0 есть единичная и нулевая матрицы соответствующих размерностей.

Матрицы частных производных $\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{x}_i}$ и $\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{c}_1}$ определяются непосредственным дифференцированием функции $\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{c}_1, t)$, характеризующей модель измерений.

Отметим, что матрица частных производных $\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0}$ является нормированной фундаментальной матрицей решений $U_x(t, t_0)$ однородного линейного дифференциального уравнения в вариациях

$$\delta \dot{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t)}{\partial \bar{x}} \delta \bar{x}. \tag{12}$$

5. Анализ адекватности прямого и вариационного оценивания

Перейдем непосредственно к анализу условий адекватности решений задачи комплексного оценивания, получаемых с использованием вариационных условий оптимальности, и оптимальных оценок параметров состояния нелинейной динамической системы, определяемых на основе традиционного прямого применения метода максимального правдоподобия, связанного с составлением системы нормальных уравнений и их решением.

С этой целью введем расширенный вектор состояния $\bar{z} = [\bar{x}, \bar{c}, \bar{c}_1]^T$. В этом случае рассматриваемая задача комплексного оценивания преобразуется к задаче оптимального оценивания обобщенного вектора $\bar{z}_0 = [\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1]^T$ при следующих условиях

$$\dot{\bar{z}} = \bar{\varphi}_z(\bar{z}, t); \qquad \bar{z}(t_0) = \bar{z}_0; \tag{13}$$

$$\bar{y}_i = \bar{\psi}(\bar{z}_i) + \bar{\delta}_i; \quad \bar{\delta}_i \to N(0, K_{\delta_i});$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{z}_i)]^T K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{z}_i)].$$

В данном случае необходимые условия оптимальности оценки $\bar{z}_0$ представляются в виде прямого условия экстремума

$$\frac{\partial I_z}{\partial \bar{z}_0} = 0.$$

Для функционала I_z оно принимает следующий конкретный вид

$$\bar{f}(\bar{z}_0) = \sum_{i=1}^{N} U^T(t_i, t_0) \frac{\partial \bar{\psi}^T}{\partial \bar{z}_i} K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{z}_i)] = 0, \tag{14}$$

где $U(t, \tau)$ — нормированная фундаментальная матрица решений расширенной линейной системы дифференциальных уравнений в вариациях

$$\delta \dot{\bar{z}} = \frac{\partial \bar{\varphi}_z(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \delta \bar{z}, \tag{15}$$

получаемого линеаризацией исходной системы (8).

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

В исходных обозначениях расширенная система дифференциальных уравнений (13) имеет следующий вид

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t); \quad \dot{\bar{c}} = 0; \quad \dot{\bar{c}}_1 = 0. \qquad (16)$$

Поэтому вектор $\bar{\varphi}_z$ и матрица $\frac{\partial \bar{\varphi}_z(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}}$ будут иметь следующие структуры

$$\bar{\varphi}_z = [\bar{\varphi}, 0, 0]^T; \qquad \frac{\partial \bar{\varphi}_z(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{c}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате приходим к следующей структуре фундаментальной матрицы U_z для расширенного уравнения в вариациях

$$U_z = \begin{bmatrix} U_x & U_{xc} & 0 \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & E_p \end{bmatrix},$$

где E_l и E_p — единичные матрицы размерности l и p векторов $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$ соответственно.

В этом выражении матрица U_x, как и ранее, является нормированной фундаментальной матрицей решений исходного уравнения движения в вариациях (12). А матрица U_{xc} может быть определена по формуле

$$U_{xc} = \int_{t_0}^{t} U_x(t, \tau) \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau)}{\partial \bar{c}} d\tau.$$

При переходе к расширенному вектору состояния $\bar{z}$ задача комплексного оценивания сводится к определению исходного состояния для обобщенного вектора $\bar{z}_0$. Поэтому вариационные условия оптимальности комплексного оценивания (7) можно представить в виде следующей краевой задачи

$$\dot{\bar{z}} = \bar{\varphi}(\bar{z}, t); \qquad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial \bar{\varphi}_z}{\partial \bar{z}}^T \bar{\lambda};$$

$$\bar{\lambda}(t_0) = 0; \qquad \bar{\lambda}(T) = 0;$$

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}_i^T}{\partial \bar{z}} K_{\delta_i}^{-1} \{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{z}(t_i)]\}; \qquad i = \overline{1, N}.$$

Здесь вектор сопряженных переменных $\bar{\lambda}$ имеет размерность расширенного вектора $\bar{z}$, т.е. $n + l + p$.

В силу линейности сопряженной системы данная краевая задача сводится к решению уравнения

$$\bar{\lambda}(T, \bar{z}_0) = \sum_{i=1}^{N} V_z(T, t_i) \frac{\partial \bar{\psi}^T}{\partial \bar{z}_i} K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{z}_i)] = 0, \qquad (17)$$

где $V_z(t, \tau)$ — нормированная фундаментальная матрица решений однородной сопряженной системы

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial \bar{\varphi}_z^T(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \bar{\lambda}. \qquad (18)$$

В исходных обозначениях в уравнении (18) матрица $\frac{\partial \bar{\varphi}_z(\bar{z},t)}{\partial \bar{z}}$ имеет следующую структуру

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_z(\bar{z},t)}{\partial \bar{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\varphi}^T}{\partial \bar{x}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{\varphi}^T}{\partial \bar{c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому в развернутом виде система (18) имеет вид

$$\dot{\bar{\lambda}}_x = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}}^T \bar{\lambda}_x; \qquad \dot{\bar{\lambda}}_c = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{c}}^T \bar{\lambda}_x; \qquad \dot{\bar{\lambda}}_{c_1} = 0; \tag{19}$$

$$\bar{\lambda} = [\bar{\lambda}_x, \bar{\lambda}_c, \bar{\lambda}_{c_1}]^T.$$

Следовательно, нормированная фундаментальная матрица решения сопряженной системы уравнений (19) будет иметь следующую структуру

$$V_z = \begin{bmatrix} V_x & 0 & 0 \\ V_{cx} & E_l & 0 \\ 0 & 0 & E_p \end{bmatrix}.$$

Здесь V_x — нормированная фундаментальная матрица решений первого уравнения в сопряженной системе (19). Матрица V_x связана с матрицей U_x соотношением

$$V_x = U_x^{-1T}.$$

Матрица V_{cx} может быть определена по формуле

$$V_{cx} = -\int_{t_0}^{t} V_x(t,\tau) \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau)}{\partial \bar{c}} d\tau.$$

Уравнения (14) и (17) заданы неявно на траекториях системы (8).

Краевое уравнение (17) является вариационным аналогом нормальных уравнений метода максимального правдоподобия.

Покажем, что оптимальные оценки, получаемые на основе решения нормальной системы (14) и краевого уравнения (17), совпадают.

С этой целью, используя известное свойство фундаментальных матриц, представим

$$V_z(T,t_0) = V_z(T,t_i) V_z(t_i,t_0).$$

Отсюда находим

$$V_z(T,t_i) = V_z(T,t_0) V_z^{-1}(t_i,t_0). \tag{20}$$

Заметим, что фундаментальные матрицы решений однородных линейных сопряженных систем U_z и V_z удовлетворяют известному равенству

$$U_z^T(t,\tau) V_z(t,\tau) = E, \tag{21}$$

где E — единичная матрица.

На основании (21) выражение (20) для $V(T,t_i)$ можно представить как

$$V_z(T,t_i) = V_z(T,t_0) U_z^T(t_i,t_0)\,.$$

С учетом полученного выражения вариационное условие оптимальности оценок преобразуется к следующему виду

$$V_z(T,t_0)\sum_{i=1}^{N} U_z^T(t_i,t_0)\frac{\partial \bar{\psi}_i^T}{\partial \bar{z}_i} K_{\delta_i}^{-1}[\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{z}_i)] = 0\,. \qquad (22)$$

Решение этого уравнения не изменится при умножении его на постоянную матрицу. Поэтому, умножая слева на матрицу $V_z^{-1}(T,t_0)$, приходим от вариационных условий оптимальности (17) к системе нормальных уравнений (9). Следовательно, и оценки, получаемые при использовании каждой из двух рассматриваемых форм условий оптимальности, будут совпадать. Это позволяет распространить частный вывод, сделанный в работе авторов [7], об адекватности оценок прямого и вариационного подходов и на задачи комплексного оценивания. Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проект № 06-07-89242) и при финансовой поддержке за счет грантов Санкт-Петербурга в сфере научной и научно-технической деятельности в 2006 году.

Литература

1. *Аким Э. Л., Энеев Т. М.* Определение параметров движения космических аппаратов по данным траекторных измерений // Космические исследования. 1963. Т. 1, № 1. С. 5–50.
2. *Бажинов И. К., Алешин В. И., Почукаев В. Н., Поляков В.С.* Космическая навигация. М.: Машиностроение, 1975. 352 с.
3. *Брандин Н. К., Разоренов Г. Н.* Определение траекторий КА. М.: Машиностроение, 1978. 216 с.
4. Космические траекторные измерения / Под ред. Агаджанова П. А., Дулевича В. Е., Коростелева А. А. М.: Сов. Радио, 1969. 504 с.
5. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1958. 350 с.
6. *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный вариант метода максимального правдоподобия в задачах статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем. СПб.: СПИИРАН, 2002. 70 с.
7. *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный метод максимального правдоподобия // Труды СПИИРАН. 2003. Вып. 1, т. 3. СПб.: СПИИРАН, 2003. С. 148–176.
8. *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный подход к статистическому оцениванию параметров орбитального движения космических аппаратов. СПб.: ВИКУ им. А. Ф. Можайского, 2002. 166 с.
9. *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный подход к комплексному оцениванию параметров состояния нелинейных динамических систем // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2, т. 2. СПб.: Наука, 2005. С. 298–307.
10. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6»–«Союз»–«Прогресс» / Под ред. Б. Н. Петрова, Н. К. Бажинова. М.: Наука, 1985. 376 с.
11. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова. М.: Машиностроение, 1972. 608 с.
12. Статистические методы обработки результатов наблюдений / Под ред. Р. М. Юсупова. МО СССР, 1984. 563 с.
13. *Шапиро Н. Н.* Расчет траекторий баллистических снарядов по данным радиолокационных наблюдений. М.: ИЛ, 1968. 319 с.
14. *Эльясберг П. Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.