ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

С.П. Соколова[1], Р.С. Ивлев[2]

[1]Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН;
[2]Институт проблем информатики и управления МОН РК

[1]СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178;
[2]ИПИУ МОН РК, ул. Пушкина, д. 125, Алма-Ата, 480100

<sokolova_sv@mail.ru>

УДК 681.3
Соколова С. П., Ивлев Р. С. **Экспоненциальная устойчивость интервальной нелинейной системы** // Труды СПИИРАН. Вып. 3, т. 2. — СПб.: Наука, 2006.
Аннотация. *В статье предложен подход исследования динамического свойства экспоненциальной устойчивости нелинейной интервальной динамической системы с нелинейностью квадратичного типа на основе прямого метода Ляпунова. Построена внутренняя оценка области притяжения начала координат для рассматриваемого класса интервальных систем.* — Библ. 10 назв.

UDC 681.3
Sokolova S. P., Ivlev R. S. **Exponential Stability of Interval Nonlinear Systems** // SPIIRAS Proceedings. Issue 3, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2006.
Abstract. *This article proposes an approach for investigating the exponential stability of a nonlinear interval dynamical system with nonlinearity of a quadratic type on the base of the Lyapunov's direct method. It also constructs an inner estimate of the attraction domain to the origin for the system under consideration.* — Bibl. 10 items.

1. Введение

Проблеме исследования устойчивости динамических систем с интервальной неопределенностью параметров посвящено значительное количество публикаций [1-5]. На первый взгляд кажущаяся простота исследования динамических свойств интервальных систем оказалась обманчивой даже для линейного случая. Об этом свидетельствуют и неудачные попытки обобщить результаты работы [1] на случай интервальных матриц [2-4] и результаты исследований [5], в которых показано, что исследование устойчивости интервальной матрицы является NP-трудной задачей.

В отличие от линейного случая результаты исследования динамических свойств нелинейных интервальных систем, математические модели которых заданы в пространстве состояний, представлены достаточно скупо. Возможная причина этого заключается в сложности применения прямого метода Ляпунова к вышеуказанному классу систем. В статье предложен подход на основе прямого метода Ляпунова и получены условия экспоненциальной устойчивости нелинейной интервальной динамической системы с квадратичной нелинейностью. Построена внутренняя оценка области притяжения начала координат для рассматриваемого класса интервальных систем.

2. Постановка задачи

Ниже будут использованы следующие обозначения:

- точечные числа и векторы — малые латинские буквы;
- интервальные числа и векторы — малые полужирные латинские буквы;

- точечные матрицы — большие латинские буквы;
- интервальные матрицы — большие полужирные латинские буквы.

Пусть математическая модель исследуемой системы в пространстве состояний представляется в виде нелинейного дифференциального уравнения с неточно заданными параметрами

$$\dot{x}(t) = (A_c + \Delta A)x(t) + X(t)(B_c + \Delta B)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где t — независимая переменная (время), $x(t) = (x_i(t))$ — вектор состояний, компонентами которого являются непрерывно дифференцируемые на $[t_0, \infty)$ функции $x_i(t)$, т.е. $x_i(t) \in C^1[t_0, \infty)$, $i = 1,2,\ldots,n$; в начальный момент времени t_0 значение вектора состояний предполагается известным x_0 и принадлежит некоторой открытой окрестности начала координат $\mathcal{D} \subseteq R^n$. Матрица $X(t)$ является блочно диагональной вида

$$\mathrm{X}(\mathrm{t}) = \mathrm{Diag}\left\{\underbrace{\mathrm{x}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t}), \mathrm{x}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t}), \ldots, \mathrm{x}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})}_{\mathrm{n}}\right\},$$

т.е. $X(t)$ имеет одинаковые блочно диагональные элементы, равные транспонированному вектору состояний $x^T(t)$. Постоянные матрицы $A_c \in R^{n \times n}$ and $B_c \in R^{n^2 \times n}$ являются известными, матрица B_c имеет следующий блочный вид

$$\mathrm{B_c} = \begin{pmatrix} \mathrm{B_{1c}} \\ \mathrm{B_{2c}} \\ \vdots \\ \mathrm{B_{nc}} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\mathrm{B_{ic}} \in \mathrm{R^{n \times n}}$, $i = 1,2,\ldots,n$ являются известными постоянными матрицами. Параметрическая неопределенность в системе (1) представлена двумя неизвестными постоянными матрицами $\Delta A \in R^{n \times n}$ и $\Delta B \in R^{n^2 \times n}$. Предполагается, что эти матрицы могут принимать значения из заданных интервальных матриц с известными границами:

$$\Delta A \in [-\Delta_A, \Delta_A], \qquad \Delta B \in [-\Delta_B, \Delta_B],$$

где $\Delta_A = |\Delta_A| \in R^{n \times n}$, $\Delta_B = |\Delta_B| \in R^{n^2 \times n}$ - заданные постоянные матрицы, причем матрицы ΔB и Δ_B имеют блочный вид аналогичный (2)

$$\Delta B = \begin{pmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \vdots \\ \Delta B_n \end{pmatrix}, \qquad \Delta_B = \begin{pmatrix} \Delta_{B_1} \\ \Delta_{B_2} \\ \vdots \\ \Delta_{B_n} \end{pmatrix},$$

где $\Delta B_i, \Delta_{B_i} \in R^{n \times n}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Операция взятия абсолютного значения $|\cdot|$ соответствующих матриц и векторов понимается в покомпонентном смысле. Также предполагается, что $-A_c \notin [-\Delta_A, \Delta_A]$, это условие означает, что не все элементы интервальной матрицы $[A_c - \Delta_A, A_c + \Delta_A]$ являются одновременно нульсодержащими.

Для любых сочетаний фиксированных значений матриц $\Delta A \in [-\Delta_A, \Delta_A]$ и $\Delta B \in [-\Delta_B, \Delta_B]$ дифференциальное уравнение (1) удовлетворяет условиям существования и единственности решения, т.е. для любого начального условия $x_0 \in \mathcal{D} \subseteq R^n$ при фиксированных значениях $\Delta A \in [-\Delta_A, \Delta_A]$ и $\Delta B \in [-\Delta_B, \Delta_B]$ через точку x_0 проходит единственная кривая уравнения (1). Для нулевого начального условия $x_0 = 0$ тривиальное решение $x(t, t_0, x_0) = x(t, t_0, 0) \equiv 0$ является положением равновесия системы (1).

Определение 1. *Тривиальное решение* $x(t, t_0, 0) \equiv 0$ *системы (1) называется экспоненциально устойчивым при* $t \to \infty$, *если существуют такие положительные постоянные* N *и* α, *что для любых значений* $\Delta A \in [-\Delta_A, \Delta_A]$ *и* $\Delta B \in [-\Delta_B, \Delta_B]$ *и любого решения* $x(t, t_0, x_0)$ *при* $x_0 \in \mathcal{D}$ *справедливо неравенство*

$$\left\| x(t, t_0, x_0) \right\|_2 \le N \left\| x(t_0) \right\|_2 \exp(-\alpha(t - t_0)),$$

где $\|\cdot\|$ *— Евклидова норма.*

Система (1) может обладать свойством экспоненциальной устойчивости не для любых начальных условий $x_0 \in \mathcal{D}$, но для некоторого подмножества $\mathcal{D}^* \subseteq \mathcal{D}$, содержащего начало координат. Областью притяжения называется множество всех тех начальных значений x_0, для которых система (1) обладает свойством экспоненциальной устойчивости.

Задача: определить область притяжения, построить ее внутреннюю оценку и получить условия, при которых положение равновесия $x(t, t_0, 0) \equiv 0$ нелинейной интервальной динамической системы (1) обладает свойством экспоненциальной устойчивости в смысле определения 1.

3. Основной результат

Выберем функцию Ляпунова

$$V(x) = x^T H x, \tag{3}$$

где $H \in R^{n \times n}$, $H = H^T \rhd 0$ — симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения

$$A_c^T H + H A_c + HH = -Q, \tag{4}$$

где $Q \in R^{n \times n}$, $Q = Q^T \rhd 0$ — некоторая симметрическая положительно определенная матрица.

Введем следующие интервальные матрицы $\mathbf{B}_{ic} = \left[B_{ic} - \Delta_{B_i}, B_{ic} + \Delta_{B_i} \right]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Используя интервальные арифметические операции [6, 7], вычислим

$$l_i = \sum_{j=1}^{n} \max_{B_i \in \mathbf{B}_i \ B_j \in \mathbf{B}_j} \rho\left(\frac{1}{2}\left(B_i B_j^T + B_j B_i^T\right)\right), \ i = 1,2,\ldots,n,$$

где $\rho(\ \cdot\ )$ — спектральный радиус вещественной квадратной матрицы. Обозначим, соответственно, минимальное и максимальное собственные значения квадратной вещественной матрицы через $\lambda(\ \cdot\ )$ и $\Lambda(\ \cdot\ )$.

В пространстве R^n построим замкнутое множество

$$\mathcal{E}(\mu) = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, V(x) \le \lambda(H)\mu \Big/ \max_i \{l_i\} \right\}, \tag{5}$$

где $\mu \in R$, $\mu > 0$. Множество (5) является в R^n гиперэллипсоидом с центром в начале координат.

Выполнение условий теоремы 1 обеспечивает свойство экспоненциальной устойчивости и позволяет построить внутреннюю оценку области притяжения начала координат.

Теорема 1. *Пусть для заданных матриц* $A_c, \Delta_A \in R^{n\times n}$, $B_c, \Delta_B \in R^{n^2\times n}$ *и некоторой симметрической положительно определенной матрицы* $Q \in R^{n\times n}$, $Q = Q^T \rhd 0$ *выполнены следующие условия:*

- *матричное уравнение (4) имеет симметрическое положительно определенное решение* $H \in R^{n\times n}$, $H = H^T \rhd 0$,
- *справедливо неравенство*

$$\lambda(Q) > \rho\left(\Delta_A^T |H| + |H| \Delta_A\right).$$

Тогда тривиальное решение $x(t, t_0, 0) \equiv 0$ *системы (1) экспоненциально устойчиво для* $x_0 \in \mathcal{E}(\mu)$ *и множество (5) при* $0 < \mu < \lambda(Q) - \rho\left(\Delta_A^T |H| + |H| \Delta_A\right)$ *принадлежит области притяжения начала координат.*

Доказательство теоремы. Обозначим $A = A_c + \Delta A$ и $B = B_c + \Delta B$ для $\Delta A \in [-\Delta_A, \Delta_A]$ and $\Delta B \in [-\Delta_B, \Delta_B]$. Первая производная функции Ляпунова (3) в силу уравнения движения (1) представляется

$$\begin{aligned}
\dot V(x) &= \dot x^T(t) H x(t) + x^T(t) H \dot x(t) = \\
&= x^T(t)\left(A^T H + HA\right)x(t) + x^T(t)\left(B^T X^T(t) H + H X(t) B\right)x(t) = \\
&= x^T(t)\left(A^T H + HA + HH\right)x(t) - x^T(t)\left(X(t)B - H\right)^T\left(X(t)B - H\right)x(t) + \\
&+ x^T(t) X(t) B B^T X^T(t) x(t) \le \\
&\le x^T(t)\left(A^T H + HA + HH\right)x(t) + x^T(t) X(t) B B^T X^T(t) x(t) \le \\
&\le x^T(t)\left(A_c^T H + HA_c + HH\right)x(t) + \left|x^T(t)\right|\left(\Delta_A^T |H| + |H| \Delta_A\right)\left|x(t)\right| + \\
&+ x^T(t) X(t) B B^T X^T(t) x(t).
\end{aligned}$$

Оценим сверху первые два слагаемых последнего неравенства

$$x^T(t)\left(A_c^T H + HA_c + HH\right)x(t) + \left|x^T(t)\right|\left(\Delta_A^T|H| + |H|\Delta_A\right)\left|x(t)\right| \le$$
$$\le -\lambda(Q)x^T(t)x(t) + \rho\left(\Delta_A^T|H| + |H|\Delta_A\right)x^T(t)x(t).$$

При положительных значениях μ и $\Delta\mu$, удовлетворяющих неравенству $0 < \mu < \mu + \Delta\mu < \lambda(Q) - \rho\left(\Delta_A^T|H| + |H|\Delta_A\right)$, будет справедливо следующее выражение

$$-\left(\lambda(Q) - \rho\left(\Delta_A^T|H| + |H|\Delta_A\right)\right)x^T(t)x(t) + x^T(t)X(t)BB^T X^T(t)x(t) <$$
$$< -(\mu + \Delta\mu)x^T(t)x(t) + x^T(t)X(t)BB^T X^T(t)x(t). \quad (6)$$

Определим множество таких x, при которых правая часть выражения (6) будет отрицательной для любой матрицы $B = B_c + \Delta B$, $\Delta B \in [-\Delta_B, \Delta_B]$. Для этого достаточно обеспечить, чтобы следующая симметрическая матрица была неотрицательно определенной

$$\mu I - S, \quad (7)$$

где I — единичная матрица соответствующей размерности, $S = X(t)BB^T X^T(t)$. Известно [8], что матрица (7) будет обладать этим свойством, если выполняется условие $\|S\| \le \mu$, где $\|\cdot\|$ — любая матричная норма. Используя матричную норму вида $\|S\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |s_{ij}|$ и представление матрицы $S = X(t)BB^T X^T(t)$ в покомпонентном виде

$$S = X(t)BB^T X^T(t) = \begin{pmatrix} x^T(t)B_1B_1^T x(t) & x^T(t)B_1B_2^T x(t) & \dots & x^T(t)B_1B_n^T x(t) \\ x^T(t)B_2B_1^T x(t) & x^T(t)B_2B_2^T x(t) & \dots & x^T(t)B_2B_n^T x(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^T(t)B_nB_1^T x(t) & x^T(t)B_nB_2^T x(t) & \dots & x^T(t)B_nB_n^T x(t) \end{pmatrix},$$

где $B = B_c + \Delta B$, $\Delta B \in [-\Delta_B, \Delta_B]$, $B_i = B_{ic} + \Delta B_i$, $\Delta B_i \in \left[-\Delta_{B_i}, \Delta_{B_i}\right]$, $s_{ij} = x^T(t)B_iB_j^T x(t)$, получим неравенство

$$\mu \ge \sum_{j=1}^n \left|x^T(t)B_iB_j^T x(t)\right|, \quad i = 1,2,\dots,n. \quad (8)$$

Получим оценку сверху суммы

$$\sum_{j=1}^n \left|x^T(t)B_iB_j^T x(t)\right|, i = 1,2,\dots,n.$$

Для этого выполним следующие преобразования

$$\sum_{j=1}^n \left|x^T(t)B_iB_j^T x(t)\right| = \sum_{j=1}^n \left|\frac{1}{2}x^T(t)\left(B_iB_j^T + B_jB_i^T\right)x(t)\right| \le$$

$$\leq \left\| x(t) \right\|_2^2 \sum_{j=1}^{n} \max_{B_i \in \mathbf{B}_i \ B_j \in \mathbf{B}_j} \rho\left(\frac{1}{2}\left(B_i B_j^T + B_j B_i^T \right) \right) = l_i \left\| x(t) \right\|_2^2, \qquad i = 1,2,\ldots,n .$$

Сравнивая (7) и (8), запишем

$$\left\| x(t) \right\|_2^2 \leq \mu / l_i , \qquad i = 1,2,\ldots,n .$$

С другой стороны,

$$V(x) = x^T(t) H x(t) \geq \lambda(H) x^T(t) x(t) = \lambda(H) \left\| x(t) \right\|_2^2$$

или

$$V(x) \leq \lambda(H) \Big/ \max_i \{ l_i \} . \tag{9}$$

Таким образом, для всех x, удовлетворяющих (9), т.е. для $x_0 \in \mathcal{E}(\mu)$, симметрическая матрица (7) будет неотрицательно определенной для любой $B = B_c + \Delta B$, $\Delta B \in [-\Delta_B, \Delta_B]$. Тогда в области $\mathcal{E}(\mu)$ первая производная функции Ляпунова (3) на траекториях движения системы (1) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x) < -(\mu + \Delta\mu) x^T(t) x(t) + x^T(t) X(t) B B^T X^T(t) x(t) \leq -\Delta\mu x^T(t) x(t)$$

равномерно по $\Delta A \in [-\Delta_A, \Delta_A]$ и $\Delta B \in [-\Delta_B, \Delta_B]$. Это означает [10, 11], что тривиальное решение $x(t, t_0, 0) \equiv 0$ обладает свойством экспоненциальной устойчивости для $x_0 \in \mathcal{E}(\mu)$, а множество (5) принадлежит области притяжения начала координат. Выражения для вычислений значений α и N в определении 1 представляются как [10]:

$$\alpha = \lambda(Q) \Big/ \left(2\Lambda(H) \right), \quad N = \sqrt{\Lambda(H) \Big/ \lambda(H)} .$$

Теорема доказана.

Замечание. Для построения множества (5), представляющего внутреннюю оценку области притяжения, можно воспользоваться верхней оценкой для величин l_i, $i = 1,2,\ldots,n$, которые представляются либо условиями теоремы Гершгорина [8], либо с помощью вычислительной процедуры, представленной ниже.

Используя действия интервальной арифметики [6, 7], сформируем интервальные матрицы $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j^T$ и $\mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^T$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, и матрицу

$$\mathbf{G}_{ij} = \left(\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j^T + \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i^T \right) \Big/ 2 , \quad i, j = 1,2,\ldots,n .$$

Следующее неравенство выполняется

$$l_i = \sum_{j=1}^{n} \max_{B_i \in \mathbf{B}_i \ B_j \in \mathbf{B}_j} \rho\left(\frac{1}{2}\left(B_i B_j^T + B_j B_i^T \right) \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \max_{G_{ij} = G_{ij}^T \in \mathbf{G}_{ij}} \rho\left(G_{ij} \right),$$

так как

$$\left\{ B_i B_j^T + B_j B_i^T \,\middle|\, B_i \in \mathbf{B}_i, \ B_j \in \mathbf{B}_j \right\} \subseteq \mathbf{G}_{ij}, \quad i, j = 1,2,\ldots,n ,$$

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

где знак включения понимается в теоретико-множественном смысле. Верхняя оценка для значений l_i, $i = 1,2,\ldots,n$ удовлетворяет неравенствам

$$\max_{G_{ij}=G_{ij}^T\in\mathbf{G}_{ij}} \rho\left(G_{ij}\right) \le \lambda\left(G_{ijc}\right) + \rho\left(\Delta_{G_{ij}}\right),$$

где $\mathbf{G}_{ij} = \left[G_{ijc} - \Delta_{G_{ij}}, G_{ijc} + \Delta_{G_{ij}}\right]$. Эту оценку несложно получить на основе результатов исследований [5].

3. Числовой пример

Пусть размерность системы (1) $n = 3$ и соответствующие матрицы равны

$$A_c = \begin{pmatrix} -1.1 & 1 & 0 \\ -0.95 & -1 & -0.05 \\ 0 & 0.05 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{1c} = \begin{pmatrix} 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_{B_1} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{ic} = \Delta_{B_i} = 0 \text{ для } i = 2,\ 3.$$

При выбранной матрице

$$Q = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

решение матричного уравнения (4) представляется в виде:

$$H = \begin{pmatrix} 0.707151 & -0.028814 & -0.009662 \\ -0.028814 & 0.762911 & 0.005555 \\ -0.009662 & 0.005555 & 0.979233 \end{pmatrix}.$$

Матрица H — симметрическая положительно определенная, собственные значения которой равны $\lambda_1(H) = 0.6948$, $\lambda_2(H) = 0.7747$, $\lambda_3(H) = 0.9798$. Для проверки второго условия теоремы сформируем матрицу

$$\Delta_A^T|H| + |H|\Delta_A = \begin{pmatrix} 0.144312 & 0.041510 & 0.002685 \\ 0.041510 & 0.000555 & 0.087107 \\ 0.002685 & 0.087107 & 0.000555 \end{pmatrix}.$$

Последовательно вычисляя значения переменных во втором условии теоремы, получим

$$\lambda(Q) = 1, \qquad \rho\left(\Delta_A^T|H| + |H|\Delta_A\right) = 0.1607, \qquad \lambda(Q) - \rho\left(\Delta_A^T|H| + |H|\Delta_A\right) = 0.8393 > 0.$$

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Так как условия теоремы выполняются, то исследуемая система обладает свойством экспоненциальной устойчивости. Параметры α и N соответственно равны

$$\alpha = \frac{1}{(2 \cdot 0.9798)} = 0.5103, \; N = \sqrt{\frac{0.9798}{0.6948}} = 1.1875.$$

Для построения множества (5) требуется определить матрицы $\mathbf{G}_{ij}$, $i, j = 1,2,3$. Легко проверить, что все матрицы $\mathbf{G}_{ij}$, $i, j = 1,2,3$ являются нулевыми, за исключением матрицы

$$\mathbf{G}_{11} = \begin{pmatrix} [0.01, 0.04] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемого случая. Множество (5) при вычисленных значениях $\max\limits_{i} \{l_i\} = 0.04$, $\lambda(H) = 0.6948$ и $0 < \mu < \lambda(Q) - \rho\left(\Delta_A^T |H| + |H| \Delta_A\right) = 0.8393$ принадлежит области притяжения начала координат рассматриваемой системы.

Следует отметить, что предложенный подход применим для исследования устойчивости нелинейных интервальных динамических систем с нелинейностями других типов.

Литература

1. *Харитонов В. Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 11. С. 2086–2088.
2. *Bialas S.* A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices // Int. J. Contr. 1983. Vol. 37, No. 4. P. 717–722.
3. *Karl W. C., Greschak J. P., Verghese G. C.* Comments on “A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices” // Int. J. Contr. 1984. Vol. 39, No. 4. P. 849–851.
4. *Barmish B. R., Hollot C. V.* Counter-example to a recent on the stability of interval matrices by Bialas // Int. J. Contr. 1984. Vol. 39, No. 5. P. 1103–1104.
5. *Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P.* Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. Dordrecht: Kluwer, 1997.
6. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
7. *Neumaier A.* Interval methods for systems of equations. Cambridge University Press, 1990.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
9. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.