

# УПРАВЛЯЕМОСТЬ И РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ

Ю. К. Зотов<sup>1</sup>, А. В. Тимофеев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

<sup>1</sup>СПбГУ, Университетский пр., д. 28, Петродворец, Санкт-Петербург, 198504;

<sup>2</sup>СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178

---

УДК 681.324

Зотов Ю. К., Тимофеев А. В. **Управляемость и робастная стабилизация программных движений летательных аппаратов с нелинейной динамикой** // Труды СПИИРАН. Вып. 3, т. 2. — СПб.: Наука, 2006.

**Аннотация.** Для широкого класса нелинейных моделей динамики автономных летательных аппаратов получены критерии их обратимости, управляемости, декомпозируемости и стабилизируемости программируемых движений. Синтезированы в аналитическом виде программные движения и программные управления, а также алгоритмы робастной стабилизации программных движений. Предложены нелинейные канонические преобразования координат интегрированного пространства состояний и управлений, упрощающие синтез и анализ законов стабилизации движений летательных аппаратов с обратимыми нелинейными моделями динамики. — Библ. 39 назв.

UDC 681.324

Zotov Yu. K., Timofeev A. V. **Controllability and robust stabilization for programme motions of flying vehicles with non-linear dynamics** // SPIIRAS Proceedings. Issue 3, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2006.

**Abstract.** For a wide class of non-linear models for autonomous flying vehicles dynamics criteria of their reversibility, controllability, decomposability and programme motion stabilizability have been received. Programme motions and programme controls in analytic kind and also algorithms for robust stabilization of programme motions have been synthesized. Non-linear canonical transformations for coordinates of integrated state and control space, reducing synthesis and analysis for motion stabilization laws of flying vehicles with reversible non-linear dynamics models, have been suggested. — Bibl. 39 items.

## 1. Введение

Построение математических моделей динамики пространственного (траекторного) движения центра масс летательного аппарата (ЛА) как твердого тела и изучение его динамики при различных законах управления являются важными разделами теории управления полетом. Эти задачи рассматривались в ряде работ [1–10], в которых содержится обширная библиография.

В работах [1–10] построены линейные и нелинейные математические модели динамики ЛА, описывающие в различных (скоростной, полярной, земной) системах координат вращательные движения ЛА и пространственные движения центра масс ЛА как объекта управления, учитывающие различные силы и моменты (инерционные и аэродинамические силы и моменты, силы сопротивления и упругих деформаций конструкций ЛА и управляющие воздействия), действующие на ЛА при полете в атмосфере. Описаны общие физические явления, связанные с понятиями управляемости и устойчивости движений ЛА. Описаны количественные характеристики устойчивости и управляемости ЛА и исследованы вопросы синтеза и анализа систем управления (в пространстве па-

раметров) и их применения для улучшения показателей устойчивости и управляемости движений ЛА.

В [1] рассмотрены возможные траектории ЛА и методы оптимизации траекторий полета, основанные на применении вариационного исчисления. В [1–5] рассмотрены вопросы построения систем автоматического управления движением центра масс линейных моделей динамики ЛА по заданной пространственной траектории и изучены динамические характеристики (демпферирование, управляемость, устойчивость и т.п.) автоматов управления (демпферов крена, тангажа, рыскания, угла атаки, угла поворота крыльев, автоматов устойчивости), автопилотов, автоматов тяги, контуров управления высотой, боковым отклонением и скоростью ЛА. При этом исследование устойчивости и управляемости ЛА проводится частотными методами (по амплитудно-фазовым, амплитудно-частотным, фазочастотным и логарифмическим амплитудно-частотным и фазочастотным характеристикам их передаточных функций), по переходным и весовым (импульсным) функциям и анализируется влияние параметров ЛА и систем управления полетом на качество переходных процессов.

В [6] с использованием методов качественной теории дифференциальных уравнений проанализированы особенности устойчивости и управляемости ЛА при одновременном управлении элеронами, стабилизатором и рулем направления. Рассмотрены физические причины взаимодействия продольного и бокового движений, приводящие к появлению новых свойств в пространственном движении ЛА.

В [7, 8] на основе метода аналитического конструирования по критерию обобщенной работы, разработанного Красовским А. А., рассмотрены вопросы синтеза систем автоматического управления ЛА линейными и нелинейными моделями динамики. В частности, синтезированы системы ручного управления, системы угловой стабилизации ЛА, системы бокового и продольного движений и контуры стабилизации пространственных траекторий центра масс ЛА.

В [9] построены алгоритмы управления пространственным движением центра масс ЛА и вокруг него с использованием принципа управления по ускорению. В [10] рассмотрены вопросы построения систем автоматического управления пространственным движением центра масс ЛА на основе использования алгоритмов оптимального управления с прогнозирующей моделью, минимизирующие критерий обобщенной работы.

Изучение вращательного движения ЛА как твердого тела при различных законах управления связано с задачами управления ориентацией и стабилизацией в динамической постановке (см., например, [1–7, 11–16]). В [11] предложен метод синтеза оптимального управления торможением твердого тела, вращающегося в атмосфере. В [7, 12–14] рассмотрены методы построения систем угловой стабилизации космических и ЛА. В [15, 16] предложены аналитические методы построения нелинейного управления ориентацией ЛА, использующие кватернионный способ задания углового движения и нелинейные кватернионные уравнения возмущенного движения и рассмотрены вопросы сведения динамической задачи управления к кинематической.

Анализ динамики и синтез эффективных законов управления пространственным движением центра масс ЛА и его вращательным движением осложняется нелинейностью уравнений динамики, наличием перекрестных связей, неопределенностью или дрейфом параметров и т.п. Подобные трудности возникают в теории управления роботами и машинами. Однако их модели динамики, основанные на уравнениях Лагранжа и Максвелла, обладают свойством обра-

тимости на подпространстве [17, 20]. Это позволяет получить простые критерии управляемости, стабилизируемости, декомпозируемости и робастности для широкого класса роботов и электромеханических систем [16–23]. С использованием этих результатов удалось синтезировать в аналитическом виде оптимальные и адаптивные законы управления роботами и мехатронными системами [24–29].

Попытки непосредственно перенести критерии анализа нелинейной динамики и методы синтеза высококачественных законов управления, полученные применительно к робототехническим и мехатронным системам, наталкиваются на трудности, связанные с особенностями динамики ЛА.

Поэтому в настоящей статье на примерах классических уравнений пространственных движений центра масс ЛА и его вращательных движений [5, 7] анализируются их структурные свойства, вводятся нелинейные канонические преобразования интегрированного пространства состояний и управлений и формулируются критерии обратимости, управляемости, декомпозируемости и стабилизируемости. На этой основе синтезируются в аналитическом виде программные движения ЛА и стабилизирующие их законы управления, обеспечивающие декомпозицию и желаемый характер переходных процессов и робастность замкнутой системы.

## 2. Обратимость нелинейных моделей динамики ЛА

Динамика широкого класса летательных аппаратов (ЛА) описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad t \geq t_0, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{z}_0$ ,  $\mathbf{z}(t)$  —  $n$ -мерные векторы состояний системы в начальный и текущий моменты времени;  $\mathbf{u}$  —  $m$ -мерный вектор управлений;  $\mathbf{F}$  —  $n$ -мерная вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения системы (2.1) и определяющая модель динамики ЛА как управляемого объекта.

Уравнения математической модели движения центра масс ЛА как твердого тела в траекторной системе координат (СК)  $OX_k Y_k Z_k$  (начало  $O$  которой находится в центре масс ЛА, ось  $OX_k$  направлена вдоль вектора скорости  $V$  ЛА относительно Земли и, следовательно, по касательной к траектории, ось  $OY_k$  находится в вертикальной плоскости и для симметричного ЛА совпадает с плоскостью его симметрии, ось  $OZ_k$  перпендикулярна плоскости  $OX_k Y_k$  и образует правую прямоугольную СК) (рис. 1), имеют вид [5, 7]

$$\dot{x}_g = V \cos \theta \cos \psi, \quad \dot{y}_g = V \sin \theta, \quad \dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \psi, \quad (2.2)$$

$$\dot{V} = P \cos \alpha - X - mg \sin \theta,$$

$$mV\dot{\theta} = (P \sin \alpha + Y) \cos \gamma - mg \cos \theta, \quad (2.3)$$

$$-mV \cos \theta \dot{\psi} = (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma.$$

Здесь  $\dot{x}_g$ ,  $\dot{y}_g$ ,  $\dot{z}_g$  — проекции вектора скорости  $V$  ЛА на оси земной (инерциальной) СК  $OX_g Y_g Z_g$ ;  $x_g$ ,  $y_g$ ,  $z_g$  — координаты центра масс  $O$  ЛА;  $\theta$  — угол наклона траектории к горизонтальной плоскости;  $\psi$  — угол поворота траектории в горизонтальной плоскости, т. е. угол, образуемый горизонтальной проек-

цией вектора скорости  $V$  с осью  $O_g X_g$ ;  $\alpha, \gamma$  — угол атаки и крена соответственно;  $P$  — сила тяги;  $m$  — масса;  $g$  — ускорение земного притяжения;  $X$  — сила аэродинамического сопротивления;  $Y$  — подъемная сила ЛА.

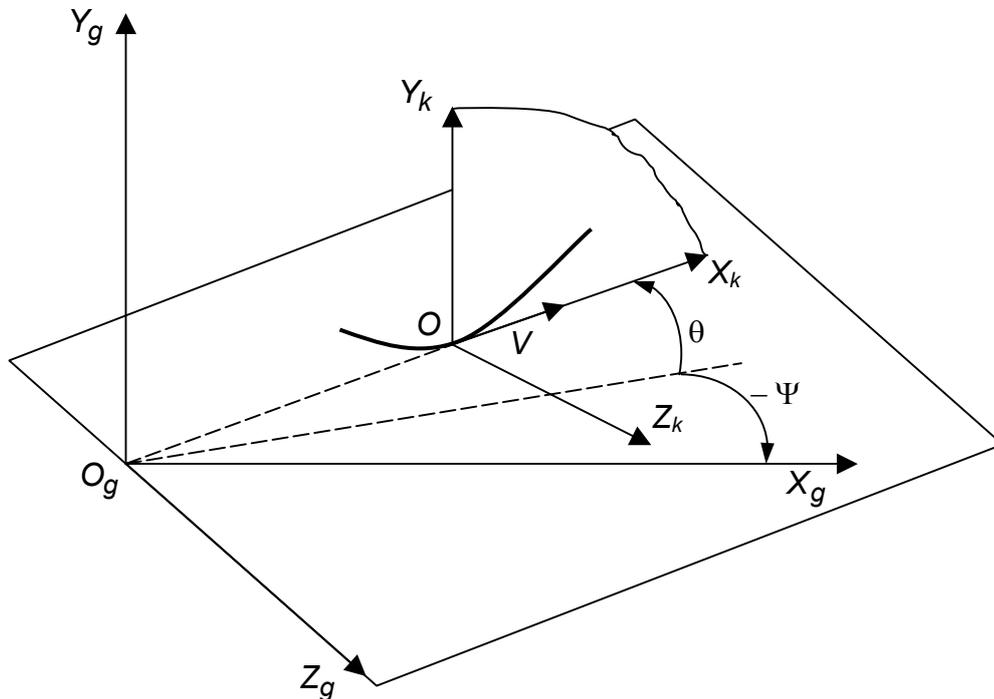


Рис. 1. Положение траекторной СК  $O X_k Y_k Z_k$  относительно земной (инерциальной) СК  $O X_g Y_g Z_g$

При изучении вращательного движения ЛА уравнения математической модели его динамики как твердого тела с шестью степенями свободы представляется уравнениями вида [1, 2]

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) (\cos \vartheta)^{-1}, \\ I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_y, \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь  $\vartheta, \psi, \gamma$  — углы тангажа, рыскания (курса) и крена ЛА в связанной с ним СК  $OXYZ$  (рис. 2) относительно инерциальной (земной) СК  $O_g X_g Y_g Z_g$ ; начало  $O$  связанной СК  $OXYZ$  находится в центре масс ЛА, оси  $OX, OY, OZ$  этой СК совпадают с главными центральными осями инерции ЛА так, что ось  $OX$  направлена по продольной главной оси инерции, ось  $OY$  расположена в плоскости симметрии и перпендикулярна  $OX$  и ось  $OZ$  образует с осями  $OX$  и  $OY$  правую прямоугольную СК;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции вектора угловой скорости на оси связанной СК  $OXYZ$ ;  $I_x, I_y, I_z$  — моменты инерции ЛА относительно осей  $OX, OY, OZ$ ;  $M_x, M_y, M_z$  — моменты, действующие на ЛА.

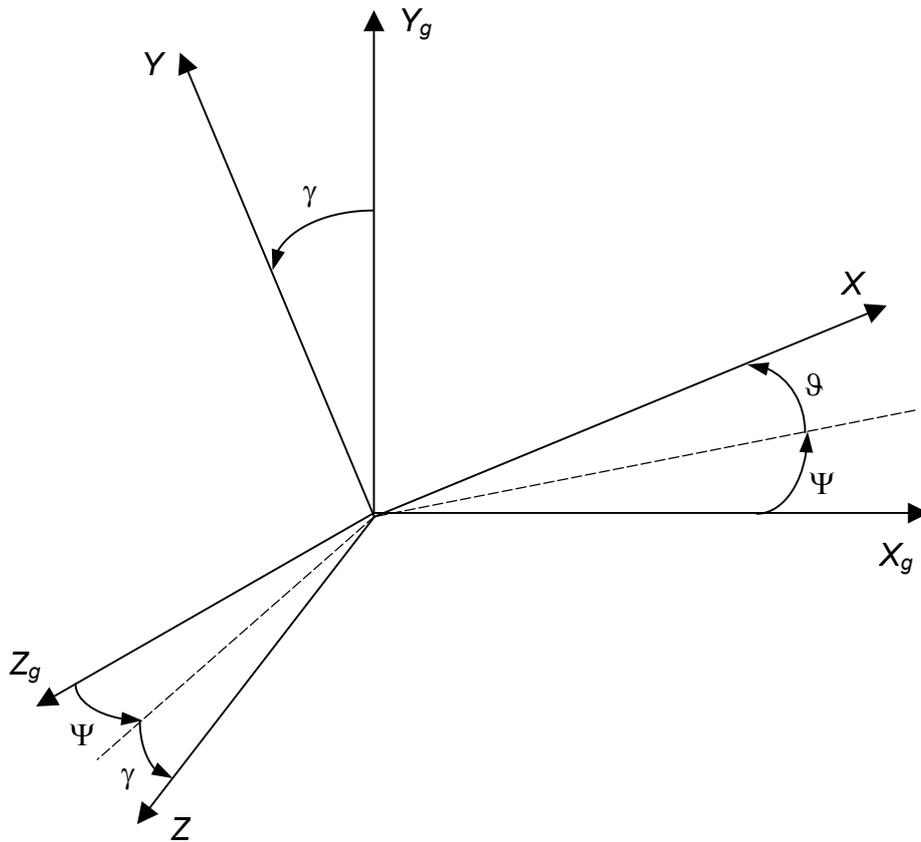


Рис. 2. Положение связанной СК  $OXYZ$  относительно инерциальной (земной) СК  $OX_gY_gZ_g$ .

Структура уравнений динамики ЛА (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5) такова, что их можно представить в виде (2.1), где

$$\mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r), \quad n = mr, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = \text{col}(\mathbf{F}_1(\mathbf{z}^2, t), \dots, \mathbf{F}_{r-1}(\mathbf{z}^r, t), \mathbf{F}_r(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t)), \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{z}^{i+1}, t) = \mathbf{C}_i(\mathbf{z}^i, t) + \mathbf{F}_{0i}(\mathbf{z}^{i+1}, t), \quad i = 1, \dots, r-1, \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_r = \mathbf{F}_r(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{C}_r(\mathbf{z}^r, t) + \mathbf{F}_{0r}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t), \quad (2.9)$$

$\mathbf{z}_i$  и  $\mathbf{z}^i = \text{col}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i)$  —  $m$ - и  $mi$ -мерные векторы;  $\mathbf{F}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{F}_{0i} (i = 1, \dots, r)$  — заданные вектор-функции, причем  $m$ -мерные вектор-функции  $\mathbf{F}_i (i = 1, \dots, r)$  обладают свойством обратимости  $\mathbf{C}_F$ , т. е. удовлетворяют следующим условиям:

1) вектор-функции  $\mathbf{F}_i (i = 1, \dots, r)$  представимы в виде (2.8), (2.9) на множествах

$$\Omega_{F_i} = \{(\mathbf{z}^{i+1}, t) : \mathbf{z}^{i+1} \in R^{m(i+1)}, t \geq t_0\}, \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{z}_{r+1} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{z}^{r+1} = \text{col}(\mathbf{z}^r, \mathbf{u})$ ;  $\mathbf{z}^{i+1} \in R^{m(i+1)}$  —  $m(i+1)$ -мерное евклидово пространство, и

$$\mathbf{F}_i \in \mathbf{C}^{k_i}(\bar{\Omega}_{F_i}), \quad \bar{\Omega}_{F_i} = \Omega_{F_i} \setminus \{\Omega_{pF_i}\}, \quad i = 1, \dots, r, \quad 1 \leq k_i, \quad (2.11)$$

здесь множество  $\Omega_{pF_i}$  либо пусто, т. е.  $\Omega_{pF_i} = \emptyset$ , либо дискретное множество изолированных точек в  $R^{m(i+1)}$ ;  $\mathbf{C}^{k_i}(\overline{\Omega_{F_i}})$  — непрерывные и достаточное число  $k_i \geq 1$  раз непрерывно дифференцируемые вектор-функции;

2)  $(m \times m)$ -матрицы Якоби

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{z}^{i+1}, t) = \frac{\partial \mathbf{F}_{0i}(\mathbf{z}^{i+1}, t)}{\partial \mathbf{z}_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.12)$$

где  $(\mathbf{z}^{i+1}, t) \in \Omega_{D_i}$  таковы, что

$$\text{rank}(\mathbf{D}_i(\mathbf{z}^{i+1}, t)) = m, \quad (\mathbf{z}^{i+1}, t) \in \Omega_{D_i}, \quad (2.13)$$

причем

$$\Omega_{D_i} = \left\{ (\mathbf{z}^{i+1}, t) \in \left\{ \Omega_{F_i} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^i \Omega_{p_j} \right) \right\} \right\} \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.14)$$

где множество  $\Omega_{p_j}$  — либо пусто, т. е.

$$\Omega_{p_j} = \emptyset, \quad (2.15)$$

либо является дискретным множеством изолированных точек в  $m(j+1)$ -мерном евклидовом пространстве  $R^{m(j+1)}$ , т. е.

$$\Omega_{p_j} = \Omega_{g_j}, \quad \Omega_{g_j} = \left\{ \mathbf{z}^{j+1} : \mathbf{z}^{j+1} \in R^{m(j+1)} : \det(\mathbf{D}_j(\mathbf{z}^{j+1}, t)) = 0, t \geq t_0 \right\}, \quad (2.16)$$

3) в случае, когда в области  $\Omega_{D_i}$  (2.14) выполнено (2.15), либо имеют место соотношения

$$\lim_{|\mathbf{z}_{i+1}| \rightarrow \infty} |\mathbf{F}_{0i}(\mathbf{z}^{i+1}, t)| = \infty, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{z}_{r+1} = \mathbf{u}$ ,  $|\mathbf{z}_{i+1}|$  — евклидова норма (модуль)  $m$ -мерного вектора  $\mathbf{z}_{i+1}$ , либо матрицы Якоби  $\mathbf{D}_i (i = 1, \dots, r)$  (2.12) являются равномерно положительно (отрицательно) определенными, т. е. существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что для любого  $m$ -мерного вектора  $\mathbf{y} \in R^m$

$$\mathbf{y}^* \mathbf{D}_i(\mathbf{z}^{i+1}, t) \mathbf{y} \geq \varepsilon |\mathbf{y}|^2 \quad \text{при} \quad (\mathbf{z}^{i+1}, t) \in \Omega_{D_i},$$

$$(\mathbf{y}^* \mathbf{D}_i(\mathbf{z}^{i+1}, t) \mathbf{y}) \leq -\varepsilon |\mathbf{y}|^2 \quad \text{при} \quad (\mathbf{z}^{i+1}, t) \in \Omega_{D_i},$$

либо угловые миноры  $\Delta_{ik} (k = 1, \dots, m)$  у матриц Якоби  $\mathbf{D}_i (i = 1, \dots, r)$  (2.12) удовлетворяют в области  $\Omega_{D_i}$  (2.14), (2.15) неравенствам

$$|\Delta_{i1}| \geq \varepsilon, \quad |\Delta_{i2}|/|\Delta_{i1}| \geq \varepsilon, \dots, |\Delta_{im}|/|\Delta_{im-1}| \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.18)$$

где  $\varepsilon > 0$  — некоторая постоянная;

4) в случае, когда в области  $\Omega_{D_i}$  (2.14) выполнено (2.16), имеет место хотя бы одно из условий:

а) множество  $\Omega_{D_i}$  — выпукло и матрица Якоби  $\mathbf{D}_i$  (2.12) положительно (отрицательно) определена при всех  $(\mathbf{z}^{i+1}, t) \in \Omega_{D_i}$ ;

б) множество  $\Omega_{D_i}$  — прямоугольная область и матрица Якоби  $\mathbf{D}_i$  (2.12) такова, что все ее главные миноры нечетного порядка отрицательны (положи-

тельны), а все главные миноры четного порядка положительны (отрицательны), либо все главные миноры положительны (отрицательны).

В Приложениях 1 и 2 показано, что уравнения моделей динамики ЛА (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5) представимы в виде (2.1), (2.6)–(2.9), а вектор-функции  $F_i (i = 1, \dots, r)$  из (2.8), (2.9) обладают свойствами обратимости  $S_F$ .

Отсюда следует [30, § 20; 31, с. 50–55; 35–39], что для рассматриваемого класса моделей динамики ЛА уравнения (2.8), (2.9) взаимно однозначно разрешимы относительно переменных  $z_{i+1} (i = 1, \dots, r-1)$  и управления  $u$ , т. е. справедливы соотношения

$$z_{i+1} = G_i(\dot{z}_i, z_i, t), (z^{i+1}, t) \in \Omega_{D_i}, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad (2.19)$$

$$u = G_r(\dot{z}_r, z, t), (z^{r+1}, t) \in \Omega_{D_r}. \quad (2.20)$$

Таким образом, модели динамики ЛА (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5) записанные в форме Коши (2.1), (2.6)–(2.9), обладающие указанным свойством разрешимости, относятся к классу обратимых управляемых систем (ОУС) в смысле определения, данного в [18–22].

Примеры представления уравнений (моделей) динамики ЛА (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5) в разрешенной относительно управления форме (2.19), (2.20) приведены в Приложениях 1 и 2.

### 3. Нелинейные канонические преобразования обратимых моделей динамики ЛА

Предлагаемые ниже методы анализа управляемости, устойчивости и синтеза стабилизирующих управлений ЛА основаны на приведении системы (2.1), (2.6)–(2.9) к канонической форме с помощью нелинейных канонических преобразований в интегрированном пространстве состояний и управлений.

Канонической формой будем называть представление прямой модели динамики ЛА в виде

$$\dot{x} = Px + Qw, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0. \quad (3.1)$$

Здесь

$$x = \text{col}(x_1, \dots, x_r) \quad (3.2)$$

—  $n$ -мерный вектор канонических переменных состояния системы;  $x_j$ ,  $x^i = \text{col}(x_1, \dots, x_j)$  —  $m$ -,  $m_i$ -мерные векторы;  $w$  —  $m$ -мерный вектор «канонических» управлений;  $P, Q$  — постоянные блочные матрицы размерностей  $n \times n$  и  $n \times m$  вида

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & O & \dots & O & O \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{r-2,1} & P_{r-2,2} & \dots & \dots & P_{r-2,r-1} & O \\ P_{r-1,1} & P_{r-1,2} & \dots & \dots & P_{r-1,r-1} & P_{r-1,r} \\ P_{r,1} & P_{r,2} & \dots & \dots & P_{r,r-1} & P_{r,r} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} O \\ \dots \\ Q_r \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где  $P_{ij}$  ( $i = 1, \dots, r-1; j = 1, \dots, i+1$ ),  $P_{r1}, \dots, P_{rr}, Q_r$  —  $m \times m$ -блоки;  $0$  — нулевая матрица, соответствующей размерности, причем блоки  $P_{i,i+1}$  ( $i = 1, \dots, r-1$ ) матрицы  $P$  и блок  $Q_r$  матрицы  $Q$  невырождены, т. е.

$$\text{rank} P_{i,i+1} = m, \quad i = 1, \dots, r-1; \quad \text{rank} Q_r = m. \quad (3.4)$$

В частном случае, когда у системы (3.1) матрицы  $P, Q$  имеют вид

$$P = \begin{Bmatrix} 0 & I_{n-m} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_r \end{Bmatrix}, \quad (3.5)$$

где  $I_m$  — единичная  $m \times m$ -матрица, каноническая форма (3.1), (3.2), (3.5) имеет наиболее простой вид, а вектор состояния определяется каноническими переменными вида

$$x = \text{col}(x_1, \dots, x_r) = \text{col}(x_1, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_1^{(r-1)}), \quad x_i = \dot{x}_{i-1}, \quad i = 2, \dots, r. \quad (3.6)$$

Построим взаимно однозначные непрерывно дифференцируемые преобразования координат пространства состояний  $z$  и управлений  $u$  исходной модели динамики ЛА (2.1), (2.6)–(2.9) к каноническим координатам  $x$  и  $w$  в виде

$$x = \psi(z, t), \quad (3.7)$$

$$w = \psi_{r+1}(z, u, t), \quad (3.8)$$

где

$$\psi(z, t) = \text{col}(\psi_1(z^1, t), \psi_2(z^2, t), \dots, \psi_r(z^r, t)), \quad (3.9)$$

$$\psi_1(z^1, t) = K_1 + L_1 z_1, \quad K_1 = 0, \quad L_1 = I_m, \quad (3.10)$$

$$\psi_i(z^i, t) = K_i(z^{i-1}, t) + \psi_{0i}(z^i, t), \quad i = 2, \dots, r, \quad (3.11)$$

$$\psi_{r+1}(z, u, t) = K_{r+1}(z^r, t) + \psi_{0,r+1}(z, u, t). \quad (3.12)$$

Опишем алгоритм нахождения неизвестных вектор-функций  $\psi_j$  ( $i = 2, \dots, r+1$ ). С этой целью рассмотрим  $r$  тождеств

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\psi}_1(z^1, t) = \dot{K}_1 + \dot{L}_1 z_1 + L_1 \dot{z}_1 = \dot{z}_1, \\ \dot{x}_i &= \dot{\psi}_i(z^i, t) = \dot{K}_i(z^{i-1}, t) + \dot{\psi}_{0i}(z^i, t) = \dot{K}_i(z^{i-1}, t) + \\ &+ \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial z^i} \dot{z}^i, \quad i = 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Заменяя в (3.13) производные  $\dot{x}_i$  по формулам

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= P_{i1} x_1 + \dots + P_{i,i+1} x_{i+1} = F_{x_i}(x^{i+1}, t), \quad i = 1, \dots, r-1, \\ \dot{x}_r &= P_{r1} x_1 + \dots + P_{r,r} x_r + Q_r w = F_{x_r}(x^r, w, t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

и используя  $\dot{z}_i$  из (2.8), (2.9), получим

$$\begin{aligned}
P_{11}x_1 + P_{12}x_2 &= \dot{K}_1 + L_1 z_1 + L_1 \dot{z}_1 = \dot{z}_1 = C_1(z^1, t) + F_{01}(z^2, t), \\
P_{i1}x_1 + \dots + P_{i,i+1}x_{i+1} &= \dot{K}_i(z^{i-1}, t) + \psi_{0i}(z^i, t) = \dot{K}_i(z^{i-1}, t) + \\
&+ \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial z^i} \dot{z}^i = \dot{K}_i(z^{i-1}, t) + \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial t} + \\
&+ \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial z^{i-1}} F^{i-1}(z^i, t) + \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial z_j} F_j(z^{i+1}, t) = \dot{K}_i(z^{i-1}, t) + \\
&+ \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial z^{i-1}} F^{i-1}(z^i, t) + \frac{\partial \psi_{0i}(z^i, t)}{\partial z_j} (C_j(z^i, t) + F_{0j}(z^{i+1}, t)), \\
i &= 2, \dots, r,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
P_{r1}x_1 + \dots + P_{rr}x_r + Q_r w &= \dot{K}_r(z, t) + \psi_{0r}(z, t) = \dot{K}_r(z^r, t) + \\
&+ \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial z} \dot{z} = \dot{K}_r(z^r, t) + \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial t} + \\
&+ \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial z} F(z, u, t) = \dot{K}_r(z^r, t) + \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial t} + \\
&+ \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial z^{r-1}} F^{r-1}(z^r, t) + \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial z_r} F_r(z, u, t) = \dot{K}_r(z^r, t) + \\
&+ \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial z^{r-1}} F^{r-1}(z^r, t) + \frac{\partial \Psi_{0r}(z, t)}{\partial z_r} (C_r(z, t) + F_{0r}(z, u, t)),
\end{aligned}$$

где  $F^{i-1}(z^i, t) = \text{col}(F_1(z^2, t), \dots, F_{i-1}(z^i, t))$ .

Поскольку в канонической форме (3.1)–(3.4) матрица  $P_{12}$  — невырождена в силу (3.4), то первое (при  $i = 1$ ) уравнение системы (3.15) с учетом (3.10) можно разрешить относительно  $x_2$  и получить искомое второе (при  $i = 2$ ) преобразование из (3.11), связывающее переменные  $x_1$  и  $x_2$  с вектор-функцией  $\Psi_2(z^2, t)$ , в котором

$$\begin{aligned}
K_2(z^1, t) &= P_{12}^{-1} [-P_{11}\Psi_1(z^1, t) + C_1(z^1, t)], \\
\Psi_{02}(z^2, t) &= P_{12}^{-1} F_{12}^{-1}(z^2, t).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Продолжая последовательно этот процесс, т. е. подставляя в  $i$ -ое ( $i \geq 2$ ) уравнение из (3.15) найденные ранее вектор-функции  $\Psi_j$  ( $j = 1, \dots, i$ ) и учитывая согласно (3.4) невырожденность матриц  $P_{i,i+1}$  ( $i = 1, \dots, r-1$ ) и  $Q_r$ , получим искомые преобразования  $\Psi_j$  ( $j = 3, \dots, r+1$ ) вида (3.11), (3.12), в которых

$$K_i(\mathbf{z}^{i-1}, t) = P_{i-1,i}^{-1} - \left[ \sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j} \Psi_j(\mathbf{z}^j, t) + \dot{K}_{i-1}(\mathbf{z}^{i-2}, t) + \frac{\partial \Psi_{0,i-1}(\mathbf{z}^{i-1}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_{0,i-1}(\mathbf{z}^{i-1}, t)}{\partial \mathbf{z}^{i-2}} \mathbf{F}^{i-2}(\mathbf{z}^{i-1}, t) + \frac{\partial \Psi_{0,i-1}(\mathbf{z}^{i-1}, t)}{\partial \mathbf{z}_{i-1}} \mathbf{C}_{i-1}(\mathbf{z}^{i-1}, t) \right], \quad (3.17)$$

$$\Psi_{0i}(\mathbf{z}^{i-1}, t) = P_{i-1,i}^{-1} \frac{\partial \Psi_{0,i-1}(\mathbf{z}^{i-1}, t)}{\partial \mathbf{z}^{i-1}} \mathbf{F}_{0,i-1}(\mathbf{z}^i, t), \quad i = 2, \dots, r,$$

$$K_{r+1}(\mathbf{z}, t) = Q_r^{-1} \left[ - \sum_{j=1}^r P_{rj} \Psi_j(\mathbf{z}^j, t) + \dot{K}_r(\mathbf{z}^{r-1}, t) + \frac{\partial \Psi_{0r}(\mathbf{z}^r, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_{0r}(\mathbf{z}^r, t)}{\partial \mathbf{z}^{r-1}} \mathbf{F}^{r-1}(\mathbf{z}^r, t) + \frac{\partial \Psi_{0r}(\mathbf{z}^r, t)}{\partial \mathbf{z}_r} \mathbf{C}_r(\mathbf{z}^r, t) \right], \quad (3.18)$$

$$\Psi_{0,r+1}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = Q_r^{-1} \frac{\partial \Psi_{0r}(\mathbf{z}^r, t)}{\partial \mathbf{z}_r} \mathbf{F}_{0r}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t).$$

Покажем, что вектор-функции  $\Psi_i(1, \dots, r+1)$  (3.10)–(3.12), (3.16)–(3.18) обладают свойством  $\mathbf{C}_\Psi$ , аналогичным свойству обратимости  $\mathbf{C}_F$ .

Из (2.10), (2.11) и (3.10)–(3.12), (3.16)–(3.18) следует, что

$$\Psi_i, \Psi \in \mathbf{C}^{l_i}(\Omega_{\Psi_i}), \quad 1 \leq l_i, \quad i = 1, \dots, r+1,$$

где

$$\Omega_{\Psi_1} = \{(\mathbf{z}_1, t) : \mathbf{z}_1 \in R^m, t \geq t_0\}, \quad \Omega_{\Psi_i} = \Omega_{D_{i-1}}, \quad (3.19)$$

$$i = 2, \dots, r+1; \quad i = 2, \dots, r+1; \quad \Omega_\Psi = \Omega_{D_{r-1}}.$$

Учитывая (3.17), (3.18), (2.12), вычислим  $m \times m$ -матрицы Якоби

$$L_j(\mathbf{z}^j, t) = \frac{\partial \Psi_{0i}(\mathbf{z}^j, t)}{\partial \mathbf{z}_j} = P_{i-1,i}^{-1} \frac{\partial \Psi_{0,i-1}(\mathbf{z}^{j-1}, t)}{\partial \mathbf{z}_{i-1}} \frac{\partial \mathbf{F}_{0,i-1}(\mathbf{z}^j, t)}{\partial \mathbf{z}_j} =$$

$$= P_{i-1,i}^{-1} P_{i-2,i-1}^{-1} \dots P_{12}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}_{01}(\mathbf{z}^2, t)}{\partial \mathbf{z}_2} \frac{\partial \mathbf{F}_{02}(\mathbf{z}^3, t)}{\partial \mathbf{z}_3} \dots \frac{\partial \mathbf{F}_{0,i-1}(\mathbf{z}^j, t)}{\partial \mathbf{z}_j} =$$

$$= P_{i-1,i}^{-1} P_{i-2,i-1}^{-1} \dots P_{12}^{-1} \mathbf{D}_1(\mathbf{z}^2, t) \mathbf{D}_2(\mathbf{z}^3, t) \dots \mathbf{D}_{i-1}(\mathbf{z}^j, t) \quad (i = 1, 2, \dots, r+1).$$

Поскольку с учетом (2.12)–(2.15), (3.4), (3.19)

$$\text{rank } L_1 = m, \quad \text{rank } L_j(\mathbf{z}^j, t) = m, \quad (3.21)$$

$$(\mathbf{z}^j, t) \in \Omega_{L_j} = \Omega_{D_{i-1}} = \Omega_{\Psi_i} \quad i = 2, \dots, r+1; \quad \Omega_{L_1} = \Omega_{\Psi_1}$$

и  $n \times n$ -матрица Якоби

$$\mathbf{J}_{\Psi^r}(\mathbf{z}^r, t) = \frac{\partial \Psi^r(\mathbf{z}, t)}{\partial \mathbf{z}} \quad (3.22)$$

имеет блочный ниже-треугольный вид с диагональными  $m \times m$ -блоками  $L_j (j = 1, \dots, r)$  (3.10), (3.20), (3.22), то

$$\text{rank } \mathbf{J}_{\Psi^r}(\mathbf{z}^r, t) = mr = n, \quad (\mathbf{z}^r, t) \in \Omega_\Psi.$$

Так как для вектор-функций  $F_i (i = 1, \dots, r)$  (2.8), (2.9) выполнено свойство  $C_F$ , то с учетом (3.4), (3.13)–(3.15), (3.19)–(3.21) получим

$$\lim_{|z_i| \rightarrow +\infty} |\Psi_i(z_i, t)| = \infty, \quad i = 1, \dots, r, \quad \lim_{|u| \rightarrow +\infty} |\Psi_{r+1}(z, u, t)| = \infty. \quad (3.23)$$

Таким образом, вектор-функции  $\Psi_i (i = 1, \dots, r + 1)$  (3.10)–(3.12), (3.17)–(3.23) обладают свойством  $C_{\Psi_i}$ , аналогичным свойству обратимости  $C_F$  для вектор-функций  $F_i (i = 1, \dots, r)$ .

Отсюда следует [30, §20; 31, с. 50–55; 35–39], что преобразования  $\Psi_i$  (3.10)–(3.12), (3.17), (3.19)–(3.23) и преобразование  $\Psi_{r+1}$  (3.12), (3.18)–(3.23) можно взаимно однозначно разрешить относительно переменных  $z_i (i = 1, \dots, r)$  и управления  $u$  соответственно, т. е. существуют непрерывно дифференцируемые обратные преобразования

$$z = \Phi(x, t) = \text{col}(\Phi_1(x^1, t), \dots, \Phi_r(x^r, t)), \quad (x, t) \in \Omega_\Phi, \quad (3.24)$$

$$z_i = \Phi_i(x^i, t), \quad (x^i, t) \in \Omega_{\Phi_i}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.25)$$

$$u = \Phi_{r+1}(x, w, t), \quad (x, w, t) \in \Omega_{\Phi_{r+1}}, \quad (3.26)$$

где

$$\Omega_\Phi = \{(x, t) : x = \Psi(z, t), (z, t) \in \Omega_\Psi\}, \quad (3.27)$$

$$\Omega_{\Phi_i} = \{(x_i, t) : x_i = \Psi(z^i, t), (z^i, t) \in \Omega_{\Psi_i}\}, \quad (3.28)$$

$$\Omega_{\Phi_{r+1}} = \{(x, w, t) : x^{r+1} = \text{col}(x, w) = \Psi^{r+1}(z, u, t), (z, u, t) \in \Omega_{\Psi_{r+1}}\}, \quad (3.29)$$

где  $\Psi^{r+1}(z, u, t) = \text{col}(\Psi(z, t), \Psi_{r+1}(z, u, t))$ .

Аналогично строятся взаимно однозначные непрерывно дифференцируемые преобразования для канонической формы (3.1), (3.2), (3.5).

В приложениях 3 и 4 приведены явные формулы прямого и обратного преобразований пространства состояний и управлений (3.9)–(3.12), (3.16)–(3.23) и (3.24)–(3.29) для моделей динамики ЛА (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5).

#### 4. Управляемость и программирование движений ЛА с обратимой динамикой

Прямая модель динамики ЛА (2.1), (2.6)–(2.9) называется управляемой (по Калману) [32, 33], если существует закон управления  $u(t)$  такой, что соответствующее ему решение  $z(t)$  системы (2.1), (2.6)–(2.9) удовлетворяет граничным условиям

$$z(t_0) = z_{p0}, \quad z(t_1) = z_{p1} \quad (4.1)$$

для любых двух состояний  $z_{p0} \in \Omega_\Psi$  и  $z_{p1} \in \Omega_\Psi$  и любых  $t < t_1 < \infty$ . Это решение  $z = z_p(t)$  будем называть программным движением (ПД), а соответствующее ему управление

$$u = u_p(t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.2)$$

программным управлением.

Покажем сначала, что модель динамики ЛА в канонической форме (3.1)–(3.4) управляема. Поскольку ввиду (3.3), (3.4)

$$\text{rank}\|\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \dots, \mathbf{P}^{r-1}\mathbf{Q}\| = n, \quad (4.3)$$

то система (3.1)–(3.4) управляема [33], т. е. существует закон управления  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_p(t) = \mathbf{w}_p$ , переводящий (3.1) из любого начального состояния  $\mathbf{x}_p(t_0) = \mathbf{x}_{p0} = \Psi(\mathbf{z}_{p0}, t_0) \in \Omega_\Phi$  в произвольное конечное состояние  $\mathbf{x}_p(t_1) = \mathbf{x}_{p1} = \Psi(\mathbf{z}_{p1}, t_1) \in \Omega_\Phi$  за время  $t_1 - t_0 < \infty$  по траектории  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_p$ . Отсюда в силу свойства обратимости  $\mathbf{C}_\Psi$  для преобразований (3.26), (3.29) и (3.12), (3.18) следует, что закон управления

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p = \Phi_{r+1}(\mathbf{x}_p, \mathbf{w}_p, t) = \Phi_{r+1}(\Psi(\mathbf{z}_p, t), \mathbf{w}_p, t) \quad (4.4)$$

переводит исходную систему (2.1), (2.6)–(2.18) из начального состояния  $\mathbf{z}_r(t_0) = \mathbf{z}_{r0} \in \Omega_\Psi$  в конечное состояние  $\mathbf{z}_r(t_1) = \mathbf{z}_{r1} \in \Omega_\Psi$  за время  $t_1 - t_0 < \infty$  по траектории

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_p = \Phi(\mathbf{x}_p, t). \quad (4.5)$$

Поэтому исходная система (2.1), (2.6)–(2.18) также управляема.

Критерии управляемости для модели динамики ЛА в канонической форме (3.1)–(3.3) имеет вид (3.4), а для исходной прямой модели динамики ЛА (2.1), (2.6)–(2.9) сводится к выполнению свойства обратимости  $\mathbf{C}_F$ .

Построим сначала программное управление и ПД для линейной канонической системы (3.1)–(3.4) в аналитическом виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_p(t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_p(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (t_1 - t_0 < \infty), \quad (4.6)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\mathbf{x}_p(t_0) = \mathbf{x}_{p0} \in \Omega_\Phi, \quad \mathbf{x}_p(t_1) = \mathbf{x}_{p1} \in \Omega_\Phi. \quad (4.7)$$

Будем искать  $\mathbf{w}_p(t)$  в виде

$$\mathbf{w}_p(t) = \mathbf{Q}^* \mathbf{e}^{\mathbf{P}^*(t_1-t)\alpha}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (4.8)$$

где  $\alpha$  — искомый постоянный  $n$ -мерный вектор. Тогда в момент времени  $t_1$

$$\mathbf{x}_{p1} = \mathbf{e}^{\mathbf{P}^*(t_1-t_0)\alpha} \mathbf{x}_{p0} + \mathbf{K}_0 \alpha, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{K}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{e}^{\mathbf{P}^*(t_1-t)} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^* \mathbf{e}^{\mathbf{P}^*(t_1-t)} dt. \quad (4.10)$$

В силу управляемости системы (3.1)–(3.4) матрица  $\mathbf{K}_0$  (4.10) является положительно определенной [33]. Поэтому из (4.9) получим

$$\alpha = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{x}_{p1} - \mathbf{e}^{\mathbf{P}^T T} \mathbf{x}_{p0}), \quad T = t_1 - t_0. \quad (4.11)$$

Исключим вектор  $\alpha$  (4.11) из (4.8), найдем искомое каноническое программное управление в виде

$$\mathbf{w}_p(t) = \mathbf{Q}^* \mathbf{e}^{\mathbf{P}^*(t_1-t)} \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{x}_{p1} - \mathbf{e}^{\mathbf{P}^T T} \mathbf{x}_{p0}). \quad (4.12)$$

Используя  $\mathbf{w}_p(t)$  (4.12), построим для модели динамики ЛА (3.1)–(3.4) ПД  $\mathbf{x}_p(t)$  (4.6), (4.7) в виде

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{P}(t-t_0)} \mathbf{x}_{p0} + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{e}^{\mathbf{P}(t_1-s)} \mathbf{Q} \mathbf{w}_p(s) dt, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (4.13)$$

Для вычисления  $e^{Pt}$  можно использовать представление его в виде интерполяционного полинома Лагранжа–Сильвестра [34], т. е.  $e^{Pt} = \sum_{k=0}^n \beta_k(t) P^k$ , где

$\beta_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) — коэффициенты полинома.

Преобразуя  $w = w_p(t)$  (4.12) и  $x = x_p(t)$  (4.13) согласно (3.26), (3.29) и (3.24), (3.25), (3.27), (3.28), получим программное управление  $u_p = u_p(t)$  (4.4), (4.12), (4.13) и соответствующее ему программное движение  $z_p = z_p(t)$  (4.5), (4.13) для исходной системы (2.1), (2.6)–(2.18).

## 5. Критерии стабилизируемости программных движений ЛА

Рассмотрим некоторое ПД  $z_p = z_p(t)$ ,  $t \geq t_0$ , исходной модели динамики ЛА (2.1), (2.6)–(2.18) и будем говорить, что оно стабилизируемо, если существует закон управления с обратной связью вида

$$u = u(z, t), \quad t \geq t_0, \quad x_p(t_0) = x_{p0} \in \Omega_\Phi, \quad x_p(t_1) = x_{p1} \in \Omega_\Phi. \quad (5.1)$$

обеспечивающий асимптотическую устойчивость ПД  $z_p(t)$ .

Рассмотрим сначала задачи устойчивости и стабилизации ПД  $x_p(t)$ ,  $t \geq t_0$ , для канонической модели динамики ЛА (3.1)–(3.4).

Из управляемости этой модели следует [33], что существует постоянная  $m \times n$ -матрица коэффициентов усиления

$$\Gamma_0 = \|\Gamma_{01}, \dots, \Gamma_{0r}\|, \quad (5.2)$$

где  $\Gamma_{0j}$  ( $j = 1, \dots, r$ ) —  $m \times m$ -блоки, такая, что матрица

$$\Gamma = P + Q\Gamma_0 \quad (5.3)$$

устойчива [34], т. е.

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\Gamma) < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.4)$$

где  $\lambda_j$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — собственные числа матрицы  $\Gamma$ .

Синтезируем закон управления с «канонической» обратной связью по  $x$  в виде

$$w = w_p + \Gamma_0(x - x_p). \quad (5.5)$$

Тогда уравнение переходных процессов (ПП)  $e_x = x - x_p$  в замкнутой системе (3.1)–(3.4), (5.5), (5.4) имеет вид

$$\dot{e}_x = \Gamma e_x, \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geq t_0. \quad (5.6)$$

Следовательно, ПД  $x_p(t)$  асимптотически устойчиво в целом с оценкой

$$|e_x(t)| \leq \beta_0 \exp[\gamma_0(t - t_0)] |e_x(t_0)|, \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geq t_0, \quad (5.7)$$

где  $\gamma_0 = \max \operatorname{Re} \gamma_j(\Gamma)$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\beta_0 > 0$  — параметр, зависящий только от  $\Gamma$ .

Подставляя (5.5), (5.2)–(5.4) в (3.26), (3.29) и используя преобразования координат пространств состояний (3.9)–(3.23), получим искомым стабилизирующий закон управления с обратной связью по  $z$  вида

$$\begin{aligned} u &= \Phi_{r+1}(x, w_p + \Gamma_0(x - x_p), t) = \\ &= \Phi_{r+1}(\Psi(z, t), w_p + \Gamma_0(\Psi(z, t) - \Psi(z_p, t)), t). \end{aligned} \quad (5.8)$$

для исходной модели динамики ЛА (2.6)–(2.18).

Уравнение ПП  $\mathbf{e}_z = \mathbf{z} - \mathbf{z}_p$  в замкнутой исходной модели динамики ЛА (2.1), (2.6)–(2.18), (5.7), (5.2)–(5.4) имеет вид

$$\dot{\mathbf{e}}_z = \mathbf{F}_z(\mathbf{e}_z, t), \quad \mathbf{e}_z(t_0) = \mathbf{e}_{z0}, \quad t \geq t_0, \quad (5.9)$$

где

$$\mathbf{F}_z(\mathbf{e}_z, t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{z}_p, \mathbf{u}_p, t_p) = \mathbf{F}(\mathbf{e}_z + \mathbf{z}_p, \Phi_{r+1}(\Psi(\mathbf{e}_z + \mathbf{z}_p, t), \mathbf{w}_p + \Gamma_0(\Psi(\mathbf{e}_z + \mathbf{z}_p, t) - \Psi(\mathbf{z}_p, t)), t), t) - \mathbf{F}(\mathbf{z}_p, \mathbf{u}_p, t). \quad (5.10)$$

Оценим ПП  $\mathbf{e}_z$  в (5.9), (5.10). Предположим, что для каждой из вектор-функций  $\mathbf{C}_i, \mathbf{F}_{0i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) в (2.8), (2.9) справедливы оценки

$$\left| \Delta \mathbf{C}_i(\mathbf{e}_z^i, t) \right| = \left| \mathbf{C}_i(\mathbf{e}_z^i + \mathbf{z}_p^i, t) - \mathbf{C}_i(\mathbf{z}_p^i, t) \right| \leq \sum_{j=0}^{m_i} a_{1ij} \left| \mathbf{e}_z^i \right|^j, \quad i = 1, \dots, r, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \left| \Delta \mathbf{F}_{0i}(\mathbf{e}_z^{i+1}, t) \right| &= \left| \mathbf{F}_{0i}(\mathbf{e}_z^{i+1} + \mathbf{z}_p^{i+1}, t) - \mathbf{F}_{0i}(\mathbf{z}_p^{i+1}, t) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_i} a_{2ij} \left| \mathbf{e}_z^i \right|^j + a_{3i} \left| \mathbf{e}_{z_{i+1}} \right|, \quad i = 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $\mathbf{z}^{r+1} = \text{col}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_{r+1}), \mathbf{z}_{r+1} = \mathbf{u}; a_{1ij} \geq 0, a_{2ij} \geq 0, a_{3i} > 0, n_i \geq 0$  — некоторые постоянные. Будем предполагать, что аналогичные соотношения справедливы для частных производных от вектор-функций  $\Delta \mathbf{C}_i$  и  $\Delta \mathbf{F}_{0i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) по их аргументам.

Используя оценки для конечных приращений вектор-функции  $\Delta \Phi(\mathbf{e}_x, t) = \Phi(\mathbf{e}_x + \mathbf{x}_p, t) - \Phi(\mathbf{x}_p, t)$ , получим оценку

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{e}_z(t) \right| &= \left| \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_p(t) \right| = \left| \Phi(\mathbf{e}_x + \mathbf{x}_p, t) - \Phi(\mathbf{x}_p, t) \right| = \left| \Delta \Phi(\mathbf{e}_x, t) \right| = \\ &= \left| \int_0^1 \mathbf{J}_{\Delta \Phi}(\Theta \mathbf{e}_x(t), t) d\Theta \right| \mathbf{e}_x(t) \leq \mu_0 \left| \mathbf{e}_x(t) \right| \leq \mu_0 \beta_0 \left| \mathbf{e}_x(t_0) \right| \exp[\gamma_0(t - t_0)] = \\ &= \mu \left| \Delta \Psi(\mathbf{e}_{z0}, t_0) \right| \exp[\gamma_0(t - t_0)], \quad \mathbf{e}_{z0} + \mathbf{z}_{p0} = \mathbf{z}_0 \in \Omega_\Psi, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\Delta \Psi(\mathbf{e}_z, t) = \Psi(\mathbf{e}_z + \mathbf{z}_p, t) - \Psi(\mathbf{z}_p, t), \quad \mathbf{J}_{\Delta \Phi}(\mathbf{e}_x, t) = \frac{\partial \Delta \Phi(\mathbf{e}_x, t)}{\partial \mathbf{e}_x}, \quad (5.14)$$

$$\sup_{\tilde{\mathbf{e}}_x \in [0, \mathbf{e}_x], t \geq t_0} \left| \mathbf{J}_{\Delta \Phi}(\tilde{\mathbf{e}}_x, t) \right| \leq \nu_0 + \sum_{j=1}^s \nu_j \left| \tilde{\mathbf{e}}_x \right|^j = \mu_0, \quad \mu = \mu_0 \beta_0, \quad (5.15)$$

где  $[0, \mathbf{e}_x] = \{ \bar{\mathbf{e}}_x \mid \bar{\mathbf{e}}_x = \Theta \mathbf{e}_x, 0 \leq \Theta \leq 1 \}$ ,  $\nu_0 > 0, \nu_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, s$ ) — некоторые параметры. Отсюда следует, что ПД  $\mathbf{z}_p(t)$  исходной модели динамики ЛА (2.1), (2.6)–(2.18), (5.8), (5.3), (5.4) асимптотически устойчиво с оценкой ПП (5.13)–(5.15).

## 6. Декомпозируемость, робастность и качество стабилизации движений ЛА

Многим ЛА присущи перекрестные динамические связи, интенсивность которых нелинейно зависит от текущего состояния и управления. Вследствие этого использование линейных ПИД-регуляторов существенно ухудшает качество ПП вплоть до потери устойчивости.

Преимущество синтезированных выше нелинейных регуляторов заключается в том, что за счет правильного выбора параметров матриц коэффициентов усиления можно обеспечить полную компенсацию перекрестных связей и заданный характер затухания ПП в замкнутой модели динамики ЛА.

Будем называть декомпозирующим такой закон управления, при котором уравнение ПП в замкнутой модели динамики ЛА распадается на систему независимых уравнений по управляемым координатам.

Важно отметить, что синтезированные регуляторы являются декомпозирующими при определенном выборе их коэффициентов усиления. Например, это имеет место для канонической модели динамики ЛА (3.1)–(3.4), в случае, когда в (3.3), (5.1)–(5.3) блочные матрицы диагональные, т. е.

$$P_{ij} = \text{diag}(P_{ijkk})_{k=1}^m, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad j = 1, \dots, i+1,$$

$$\Gamma_{0j} = Q_r^{-1}(-P_{rj} + \bar{\Gamma}_{0j}), \quad \bar{\Gamma}_{0j} = \text{diag}((\bar{\Gamma}_{0jkk})_{k=1}^m), \quad j = 1, \dots, r.$$

Тогда уравнение ПП ЛА (5.5) распадается на  $m$  независимых уравнений вида

$$\dot{\bar{e}}_{x_k} = \bar{\Gamma}_k \bar{e}_{x_k}, \quad \bar{e}_{x_k}(t_0) = \bar{e}_{x_{k0}}, \quad t \geq t_0, \quad k = 1, \dots, m,$$

где  $\bar{e}_{x_k} = \text{col}(\bar{e}_{x_{k1}}, \dots, \bar{e}_{x_{kr}})$  —  $r$ -мерный вектор состояния системы, причем  $e_x = \text{col}(e_{x_1}, \dots, e_{x_r})$ ,  $e_{x_j} = \text{col}(e_{x_{j1}}, \dots, e_{x_{jm}})$  ( $k = 1, \dots, m$ ) —  $n$ -,  $m$ -мерные векторы:

$$\bar{\Gamma}_k = \begin{pmatrix} P_{11kk} & P_{12kk} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ P_{21kk} & P_{22kk} & P_{23kk} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{r-2,1,kk} & P_{r-2,2,kk} & \dots & \dots & P_{r-2,r-1,kk} & 0 \\ P_{r-1,1,kk} & P_{r-1,2,kk} & \dots & \dots & P_{r-1,r-1,kk} & P_{r-1,r,kk} \\ \bar{\Gamma}_{01kk} & \bar{\Gamma}_{02kk} & \dots & \dots & \bar{\Gamma}_{0,r-1,kk} & \bar{\Gamma}_{0rkk} \end{pmatrix}.$$

Параметры  $\bar{\Gamma}_{0jkk}$  всегда можно выбрать так, чтобы ПП имели наперед заданный характер, желаемую скорость затухания и т.п. [21–23].

Важно отметить, что синтезированные высококачественные законы стабилизации являются робастными, т. е. обеспечивают устойчивость обратимых моделей динамики ЛА по отношению к ограниченным параметрическим и постоянно действующим возмущениям [21–23]. На основе этих законов стабилизации можно синтезировать алгоритмы адаптивного управления ЛА с помощью методов, описанных в [11–21, 24–29].

## 7. Заключение

На основе свойства обратимости уравнений движения центра масс ЛА и вращательных движений ЛА и нелинейных канонических преобразований пространства состояний и управлений получены критерии управляемости, стабилизируемости моделей динамики ЛА. Использование этих свойств и критериев существенно упрощает синтез и анализ законов управления ЛА за счет использования новых нелинейных канонических преобразований. Естественно ожидать, что предлагаемый подход окажется полезным также при исследовании нелинейных уравнений движения центра масс ЛА с учетом его угловой ориентации.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 05-01-08044-офи.

## Приложение 1

Покажем, что уравнения динамики центра масс ЛА (2.2), (2.3) представимы в виде (2.1), (2.6)–(2.9), в котором  $n = 2m$ ,  $m = 3$ ,  $r = 2$ , а вектор-функции  $F_i (i = 1, 2)$  из (2.8), (2.9) обладают свойствами обратимости  $C_F$ .

Действительно, из уравнений (2.1)–(2.3), (2.6)–(2.9) имеем:

$$\mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \text{col}(x_g, y_g, z_g, V, \theta, \Psi), \quad (\text{П.1.1})$$

$$\mathbf{z}_1 = \text{col}(x_g, y_g, z_g), \quad \mathbf{z}_2 = \text{col}(V, \theta, \Psi),$$

$$\mathbf{u} = \text{col}(P, \alpha, \gamma), \quad (\text{П.1.2})$$

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{z}^2, t) &= \text{col}(V \cos \theta \cos \Psi, V \sin \theta, -V \cos \theta \sin \Psi) = \\ &= \mathbf{C}_1(\mathbf{z}^1, t) + \mathbf{F}_{01}(\mathbf{z}^2, t) = \mathbf{F}_{01}(\mathbf{z}^2, t) = \hat{\mathbf{F}}_{01}(\mathbf{z}^2), \end{aligned} \quad (\text{П.1.3})$$

$$F_2(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = \left\| \begin{array}{l} m^{-1}(P \cos \alpha - X - mg \sin \theta) \\ m^{-1}V^{-1}[(P \sin \alpha + Y) \cos \gamma - mg \cos \theta] \\ -(mV \cos \theta)^{-1}(P \sin \alpha + Y) \sin \gamma \end{array} \right\| = \quad (\text{П.1.4})$$

$$= \mathbf{C}_2(\mathbf{z}, t) + \mathbf{F}_{02}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t),$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1(\mathbf{z}^1, t) &= 0, \quad \hat{\mathbf{F}}_{01}(\mathbf{z}_2) = \text{col}(V \cos \theta \cos \Psi, V \sin \theta, -V \cos \theta \sin \Psi) = \\ &= \mathbf{H}_{22\Psi}^*(\Psi) \mathbf{H}_{33\theta}(\theta) \mu_{11}(V), \end{aligned} \quad (\text{П.1.5})$$

где

$$\mathbf{H}_{22\Psi}(\Psi) = \left\| \begin{array}{ccc} \cos \Psi & 0 & -\sin \Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{array} \right\|, \quad \mathbf{H}_{33\theta}(\theta) = \left\| \begin{array}{ccc} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad (\text{П.1.6})$$

$$\mu_{11}(V) = \text{col}(V, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2(\mathbf{z}, t) &= \text{col}(m^{-1}(-X - mg \sin \theta), -(mV)^{-1}mg \cos \theta, 0), \\ \mathbf{F}_{02}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) &= \text{col}(m^{-1}P \cos \alpha, (mV)^{-1}(P \sin \alpha + Y) \cos \gamma, \\ &-(mV \cos \theta)^{-1}(P \sin \alpha + Y) \sin \gamma) = D_{21}(\mathbf{z}_2) \hat{\mathbf{F}}_{02}(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (\text{П.1.7})$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{21}(\mathbf{z}_2) &= \text{diag}(m^{-1}, (mV)^{-1}, (mV \cos \theta)^{-1}), \\
 \hat{\mathbf{F}}_{02}(u) &= \text{col}(P \cos \alpha, (P \sin \alpha + Y) \cos \gamma, (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma) = \\
 &= \mathbf{H}_{11\gamma}(\gamma) [\mathbf{H}_{33\alpha}(\alpha) \boldsymbol{\mu}_{21}(P) + \boldsymbol{\mu}_{22}(Y)], \\
 \mathbf{H}_{11\gamma}(\gamma) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H}_{33\alpha}(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\
 \boldsymbol{\mu}_{21}(P) &= \text{col}(P, 0, 0), \quad \boldsymbol{\mu}_{22}(Y) = \text{col}(0, Y, 0).
 \end{aligned} \tag{П.1.8}$$

1. Для матрицы-функции

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_1(\mathbf{z}_2) &= \frac{\partial \mathbf{F}_{01}(\mathbf{z}^2, t)}{\partial \mathbf{z}_2} = \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_{01}(\mathbf{z}^2)}{\partial \mathbf{z}_2} = \\
 &= \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \Psi & -V \sin \theta \cos \Psi & -V \cos \theta \sin \Psi \\ \sin \theta & V \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \Psi & V \sin \theta \sin \Psi & -V \cos \theta \cos \Psi \end{vmatrix},
 \end{aligned} \tag{П.1.9}$$

$$\det \mathbf{D}_1(\mathbf{z}_2) = -V^2 \cos \theta \neq 0, \quad \text{при } (V, \theta) \in \Omega_{V\theta}, \tag{П.1.10}$$

где множество

$$\Omega_{V\theta} = \left\{ (V, \theta) : V \in \{R^1 \setminus 0\}, \theta \in (R^1 \setminus \Omega_{p\theta}) \right\}, \tag{П.1.11}$$

а множество

$$\Omega_{p\theta} = \left\{ \theta \in (R^1) : \theta = \pm \frac{\pi}{2} = k\pi, \quad k \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \right\}, \tag{П.1.12}$$

и, следовательно, имеет

$$\text{rank} \mathbf{D}_1(\mathbf{z}_2) = 3 \quad \mathbf{z}_2 = \text{col}(V, \theta, \Psi) \in \Omega_{D_1}, \tag{П.1.13}$$

где множество

$$\Omega_{D_1} = \left\{ \mathbf{z}_2 = \text{col}(V, \theta, \Psi) : (V, \theta) \in \Omega_{V\theta}, \Psi \in R^1 \right\}. \tag{П.1.14}$$

Множества

$$\begin{aligned}
 \bar{\Omega}_{F_1} &= \left\{ (\mathbf{z}^2, t) : \mathbf{z}^2 = \mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{z}_1 = \text{col}(x_g, y_g, z_g) \in R^3, \right. \\
 &\left. \mathbf{z}_2 = \text{col}(V, \theta, \Psi) \in \Omega_{D_1}, t \geq t_0 \right\} \subset \Omega_{F_1},
 \end{aligned} \tag{П.1.15}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{F_1} &= \left\{ (\mathbf{z}^2, t) : \mathbf{z}^2 = \mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{z}_1 = \text{col}(x_g, y_g, z_g) \in R^3, \right. \\
 &\left. \mathbf{z}_2 = \text{col}(V, \theta, \Psi) \in R^3, t \geq t_0 \right\}.
 \end{aligned} \tag{П.1.16}$$

2. Аналогично, матрица-функция

$$\mathbf{D}_2(\mathbf{z}_2, u) = \frac{\partial \mathbf{F}_{02}(\mathbf{z}, u, t)}{\partial u} = \mathbf{D}_{21}(\mathbf{z}_2) \mathbf{D}_{22}(u), \tag{П.1.17}$$

у которой  $\mathbf{D}_{21}$  и  $\mathbf{D}_{22}$  — матрицы-функции вида (П.1.8) и вида

$$\mathbf{D}_{22}(u) = \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_{02}(u)}{\partial u} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -P \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha \cos \gamma & P \cos \alpha \cos \gamma & -(P \sin \alpha + Y) \sin \gamma \\ \sin \alpha \sin \gamma & P \cos \alpha \sin \gamma & (P \sin \alpha + Y) \cos \gamma \end{vmatrix} \tag{П.1.18}$$

имеет определитель

$$\det \mathbf{D}_2(\mathbf{z}_2, \mathbf{u}) = \det[\mathbf{D}_{21}(\mathbf{z}_2)\mathbf{D}_{22}(\mathbf{u})] = \det \mathbf{D}_{21}(\mathbf{z}_2)\mathbf{D}_{22}(\mathbf{u}) = -m^3 V^2 (\cos \theta)^{-1} P(P \sin \alpha + Y) \neq 0 \quad \text{при } (\mathbf{z}_2, \mathbf{u}) \in \Omega_{D_2}, \quad (\text{П.1.19})$$

где множества

$$\Omega_{D_2} = \{(\mathbf{z}_2, \mathbf{u}) : \mathbf{z}_2 = \text{col}(V, \theta, \Psi) \in \Omega_{D_1}, \quad \mathbf{u} = \text{col}(P, \alpha, \gamma) \in \Omega_U\}, \quad (\text{П.1.20})$$

$$\Omega_U = \{\mathbf{u} = \text{col}(P, \alpha, \gamma) \in (R^3 \setminus \Omega_{pu})\}, \quad (\text{П.1.21})$$

$$\Omega_{pu} = \{(P, \alpha) : P(P \sin \alpha + Y) = 0\}. \quad (\text{П.1.22})$$

и, следовательно, имеет

$$\text{rank } \mathbf{D}_2(\mathbf{z}_2, \mathbf{u}) = 3 \quad \text{при } (\mathbf{z}_2, \mathbf{u}) \in \Omega_{D_2}. \quad (\text{П.1.23})$$

Множества

$$\bar{\Omega}_{F_2} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) : \mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{z}_1 = \text{col}(x_g, y_g, z_g) \in R^3, \quad \mathbf{z}_2 = \text{col}(V, \theta, \Psi) \in \Omega_{D_1}, \quad \mathbf{u} = \text{col}(P, \alpha, \gamma) \in \Omega_U, \quad t \geq t_0\} \subset \Omega_{F_2}, \quad (\text{П.1.24})$$

$$\Omega_{F_2} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) : \mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{z}_1 = \text{col}(x_g, y_g, z_g) \in R^3, \quad \mathbf{z}_2 = \text{col}(V, \theta, \Psi) \in R^3, \quad \mathbf{u} = \text{col}(P, \alpha, \gamma) \in R^3, \quad t \geq t_0\}. \quad (\text{П.1.25})$$

Из (2.1), (2.6)–(2.18) следует, что в уравнении динамики ЛА (2.1), (П.1.1)–(П.1.25) вектор-функции  $\mathbf{F}_i (i = 1, 2)$  обладают свойством  $C_F$ .

Уравнения динамики центра масс ЛА (2.2), (2.3) с учетом (П.1.1)–(П.1.25) в форме обратной модели динамики (2.19), (2.20) имеют вид

$$\mathbf{z}_2 = \begin{Bmatrix} V \\ \theta \\ \Psi \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_1(\dot{\mathbf{z}}_1, \mathbf{z}^1, t) = \begin{Bmatrix} (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2)^{\frac{1}{2}} \\ \arcsin(\dot{y}_g (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2)^{-\frac{1}{2}}) \\ \text{arctg}(-\dot{z}_g (\dot{x}_g^{-1}) \end{Bmatrix}, \quad (\mathbf{z}, t) \in \bar{\Omega}_{F_1}, \quad (\text{П.1.26})$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} P \\ \alpha \\ \gamma \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_2(\dot{\mathbf{z}}_2, \mathbf{z}^2, t) = \begin{Bmatrix} \{[-Y + (\hat{w}_2^2 + \hat{w}_3^2)^{1/2} + \hat{w}_1^2]^2\}^{1/2} \\ \text{arctg}\{[-Y + (\hat{w}_2^2 + \hat{w}_3^2)^{1/2}] \hat{w}_1^{-1}\} \\ \text{arctg}(\hat{w}_3 - \hat{w}_2^{-1}) \end{Bmatrix}, \quad (\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) \in \bar{\Omega}_{F_2}, \quad (\text{П.1.27})$$

где

$$\hat{w}_1 = m\dot{V} + X + mg \sin \theta, \quad \hat{w}_2 = mV\dot{\theta} + mg \cos \theta, \quad \hat{w}_3 = mV \cos \theta \Psi. \quad (\text{П.1.28})$$

## Приложение 2

Покажем, что уравнения динамики вращательного движения ЛА вокруг центра масс (2.4), (2.5) представимы в виде (2.1), (2.6)–(2.9), в котором  $n = 2m$ ,  $m = 3$   $r = 2$ , а вектор-функции  $\mathbf{F}_i (i = 1, 2)$  из (2.8), (2.9) обладают свойством обратимости  $C_F$ .

Действительно, из уравнений динамики вращательного движения ЛА (2.4), (2.5), (2.1), (2.6)–(2.8) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \text{col}(\vartheta, \gamma, \psi, \omega_x, \omega_y, \omega_z), \\ \mathbf{z}_1 &= \text{col}(\vartheta, \gamma, \Psi), \quad \mathbf{z}_2 = \text{col}(\omega_x, \omega_y, \omega_z), \\ \mathbf{u} &= \text{col}(M_x, M_y, M_z), \end{aligned} \quad (\text{П.2.1})$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{z}^2, t) = \begin{pmatrix} \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \\ \omega_x - \text{tg} \vartheta (\omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma) \\ (\omega_y \sin \gamma - \omega_z \cos \gamma) (\cos \vartheta)^{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_1(\mathbf{z}^1, 1) + \mathbf{F}_{01}(\mathbf{z}^2, t), \quad (\text{П.2.2})$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = \begin{pmatrix} -I_x^{-1}(I_z - I_y)\omega_y\omega_z + I_x^{-1}M_x \\ -I_y^{-1}(I_x - I_z)\omega_x\omega_z + I_y^{-1}M_y \\ -I_z^{-1}(I_y - I_x)\omega_x\omega_y + I_z^{-1}M_z \end{pmatrix} = \mathbf{C}_2(\mathbf{z}, t) + \mathbf{F}_{02}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t). \quad (\text{П.2.3})$$

Здесь

$$\mathbf{C}_1(\mathbf{z}^1, 1) = 0, \quad \mathbf{F}_{01}(\mathbf{z}^2, t) = \mathbf{D}_1(\mathbf{z}_1)\mathbf{z}_2, \quad (\text{П.2.4})$$

где матрица-функция

$$\mathbf{D}_1(\mathbf{z}_1) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \\ 1 & -\text{tg} \vartheta \cos \gamma & \text{tg} \vartheta \sin \gamma \\ 0 & \frac{\cos \gamma}{\cos \vartheta} & -\frac{\sin \gamma}{\cos \vartheta} \end{pmatrix}, \quad (\text{П.2.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2(\mathbf{z}, t) &= \text{col}(-I_x^{-1}(I_z - I_y)\omega_y\omega_z, -I_y^{-1}(I_x - I_z)\omega_x\omega_z, -I_z^{-1}(I_y - I_x)\omega_x\omega_y) \\ \mathbf{F}_{02}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) &= \mathbf{D}_2\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (\text{П.2.6})$$

где матрица

$$\mathbf{D}_2 = \frac{\partial \mathbf{F}_{02}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} = \text{diag}(I_x^{-1}, I_y^{-1}, I_z^{-1}). \quad (\text{П.2.7})$$

1. Для матрицы-функции  $\mathbf{D}_1$  (П.2.5) ее определитель

$$\det \mathbf{D}_1(\mathbf{z}_1) = (\cos \vartheta)^{-1} \neq 0 \quad \text{при} \quad \vartheta \notin \Omega_{p_1}, \quad (\text{П.2.8})$$

где множество

$$\Omega_{p_1} = \left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^1 : \vartheta = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \right\} \quad (\text{П.2.9})$$

и, следовательно, матрица-функция  $\mathbf{D}_1$  невырождена и имеет

$$\text{rank} \mathbf{D}_1(\mathbf{z}_1) = 3 \quad \mathbf{z}_1 = \text{col}(\vartheta, \gamma, \psi) \in \Omega_{D_1}, \quad (\text{П.2.10})$$

где множество

$$\Omega_{D_1} = \left\{ \mathbf{z}_1 = \text{col}(\vartheta, \gamma, \psi) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in \mathbb{R}^1 \setminus \Omega_{p_1}, \gamma \in \mathbb{R}^1, \psi \in \mathbb{R}^1 \right\}, \quad (\text{П.2.11})$$

2. Аналогично, для матрицы  $\mathbf{D}_2$  (П.2.7) ее определитель

$$\det \mathbf{D}_2 = I_x^{-1} I_y^{-1} I_z^{-1} \neq 0, \quad (\text{П.2.12})$$

и поэтому матрица  $\mathbf{D}_2$  невырождена, т. е.

$$\text{rank} \mathbf{D}_2 = 3, \quad \Omega_{D_2} = (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{p_2}), \quad \Omega_{p_2} = \emptyset. \quad (\text{П.2.13})$$

Множества  $\bar{\Omega}_{F_i}$  ( $i = 1, 2$ ) с учетом (П.2.8)–(П.2.13) имеют вид

$$\bar{\Omega}_{F_1} = \left\{ (\mathbf{z}^2, t) : \mathbf{z}^2 = \mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \mathbf{z}_1 = \text{col}(\vartheta, \gamma, \psi) \in \Omega_{D_1}, \right. \\ \left. \mathbf{z}_2 = \text{col}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \in R^3, t \geq t_0 \right\} \subset \Omega_{F_1}, \quad (\text{П.2.14})$$

$$\bar{\Omega}_{F_2} = \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) : (\mathbf{z}, t) \in \bar{\Omega}_{F_1}, \mathbf{u} \in R^3 \right\} \subset \Omega_{F_2}, \quad (\text{П.2.15})$$

а множества

$$\Omega_{F_1} = \left\{ (\mathbf{z}^2, t) : \mathbf{z}^2 = \mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \mathbf{z}_1 = \text{col}(\vartheta, \gamma, \psi) \in R^3, \right. \\ \left. \mathbf{z}_2 = \text{col}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \in R^3, t \geq t_0 \right\}, \quad (\text{П.2.16})$$

$$\Omega_{F_2} = \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) : (\mathbf{z}, t) \in \Omega_{F_1}, \mathbf{u} \in R^3 \right\}. \quad (\text{П.2.17})$$

Уравнения вращательного движения ЛА (2.4), (2.5), (П.2.1)–(П.1.7) в форме (2.19), (2.20) имеют вид

$$\mathbf{z}_2 = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_1(\dot{\mathbf{z}}_1, \mathbf{z}^1, t) = \begin{Bmatrix} 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \\ 1 & -\text{tg}\vartheta\cos\gamma & \text{tg}\vartheta\sin\gamma \\ 0 & \frac{\cos\gamma}{\cos\vartheta} & -\frac{\sin\gamma}{\cos\vartheta} \end{Bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \quad (\text{П.2.18})$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \sin\vartheta \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma\cos\vartheta \\ \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma\cos\vartheta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}, \quad (\mathbf{z}, t) \in \bar{\Omega}_{F_1}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}_2(\dot{\mathbf{z}}_2, \mathbf{z}^2, t) = \begin{Bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (I_z - I_y)\omega_y\omega_z \\ (I_x - I_z)\omega_x\omega_z \\ (I_y - I_x)\omega_x\omega_y \end{Bmatrix}, \quad (\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) \in \bar{\Omega}_{F_2}. \quad (\text{П.2.19})$$

### Приложение 3

Для модели динамики центра масс ЛА (2.2), (2.3) прямое и обратное преобразования координат в пространстве состояний и управлений имеют вид (3.7), (3.9)–(3.11) и (3.8), (3.12), где  $n = 2m$ ,  $m = 3$ ,  $r = 2$

$$\mathbf{K}_1 = 0, \quad \mathbf{L}_1 = I_3,$$

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{z}^1, t) = \mathbf{P}_{12}^{-1} \left[ -\mathbf{P}_{11}\Psi_1(\mathbf{z}^1, t) + \mathbf{C}_1(\mathbf{z}^1, t) \right] = -\mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{P}_{11}\mathbf{z}_1,$$

$$\Psi_{02}(\mathbf{z}^1, t) = \mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{F}_{01}(\mathbf{z}^2, t) = \mathbf{P}_{12}^{-1}\hat{\mathbf{F}}_{01}(\mathbf{z}_2),$$

$$\mathbf{K}_3(\mathbf{z}^2, t) = \mathbf{Q}_2^{-1} \left[ -\sum_{j=1}^2 \mathbf{P}_{2j}\Psi_j(\mathbf{z}^j, t) + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{z}^1, t) + \frac{\partial\Psi_{02}(\mathbf{z}^2, t)}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{\partial\Psi_{02}(\mathbf{z}^2, t)}{\partial\mathbf{z}_1}\mathbf{F}_1(\mathbf{z}^2, t) + \frac{\partial\Psi_{02}(\mathbf{z}^2, t)}{\partial\mathbf{z}_2}\mathbf{C}_2(\mathbf{z}^2, t) \right],$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{03}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) &= \mathbf{Q}_2^{-1} \frac{\partial \Psi_{02}(\mathbf{z}^2, t)}{\partial \mathbf{z}_2} \mathbf{F}_{02}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = \\
&= \mathbf{Q}_2^{-1} \frac{\partial \Psi_{02}(\mathbf{z}^2, t)}{\partial \mathbf{z}_2} \mathbf{D}_{21}(\mathbf{z}_2) \hat{\mathbf{F}}_{02}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}_3(\mathbf{z}_2) \hat{\mathbf{F}}_{02}(\mathbf{u}), \\
\mathbf{L}_3(\mathbf{z}_2) &= \mathbf{Q}_2^{-1} \frac{\partial \Psi_{02}(\mathbf{z}^2, t)}{\partial \mathbf{z}_2} \mathbf{D}_{21}(\mathbf{z}_2), \\
\hat{\mathbf{F}}_{02}(\mathbf{u}) &= \mathbf{P}_{12}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{K}_2(\mathbf{z}^1, t)) = \mathbf{P}_{12}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{K}_2(\mathbf{x}^1, t)) = \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) = \\
&= \text{col}(\mathbf{y}_{11}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{12}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{13}(\mathbf{x})), \\
\mathbf{z}_2 &= \text{col}(V, \theta, \Psi) = \Phi_{02}(\mathbf{x}^2, t), \quad V = (y_{11}^2(\mathbf{x}) + y_{12}^2(\mathbf{x}) + y_{13}^2(\mathbf{x}))^{1/2}, \\
\theta &= \arcsin(y_{12}(\mathbf{x})(y_{11}^2(\mathbf{x}) + y_{12}^2(\mathbf{x}) + y_{13}^2(\mathbf{x}))^{-1/2}), \\
\Psi &= \text{arctg}(-y_{13}(\mathbf{x})(y_{11}^{-1}(\mathbf{x})), \\
\hat{\mathbf{F}}_{02}(\mathbf{u}) &= \mathbf{L}_3^{-1}(\mathbf{z}_2) [\mathbf{w} - \mathbf{K}_2(\mathbf{z}^2, t)] = \mathbf{L}_3^{-1} \Phi(\mathbf{x}, t, t) [\mathbf{w} - \mathbf{K}_3(\Phi(\mathbf{x}, t), t)] = \\
&= \text{col}(y_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t), y_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t), y_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)), \\
\mathbf{u} &= \text{col}(P, \alpha, \gamma) = \Phi_3(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t), \\
P &= ((-Y + (y_{22}^2(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) + y_{23}^2(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t))^{1/2})^2 + y_{21}^2(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t))^{1/2}, \\
\alpha &= \text{arctg}((-Y + (y_{22}^2(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) + y_{23}^2(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t))^{1/2})^2 y_{23}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)), \\
\gamma &= \text{arctg}(y_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) y_{22}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)).
\end{aligned}$$

## Приложение 4

Для модели вращательного движения ЛА (2.4), (2.5) прямое и обратное преобразования координат в пространстве состояний и управлений имеют вид (3.7), (3.9)–(3.11) и (3.8), (3.12), где  $n = 2m$ ,  $m = 3$ ,  $r = 2$ ,

$$\mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Psi(\mathbf{z}, t) = \text{col}(\Psi_1(\mathbf{z}^1), \Psi_2(\mathbf{z}^2, t)), \quad (\text{П.4.1})$$

$$\Psi_1(\mathbf{z}^1) = \mathbf{z}_1, \quad \Psi_2(\mathbf{z}^2, t) = \mathbf{K}_2(\mathbf{z}^1, t) + \mathbf{L}_2(\mathbf{z}^1, t) \mathbf{z}_2, \quad (\text{П.4.2})$$

$$\mathbf{w} = \Psi_3(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{K}_3(\mathbf{z}^2, t) + \mathbf{L}_3(\mathbf{z}^2, t) \mathbf{u}, \quad (\text{П.4.3})$$

$$\mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \Phi(\mathbf{x}, t) = \text{col}(\Phi_1(\mathbf{x}^1), \Phi_2(\mathbf{x}^2, t)), \quad (\text{П.4.4})$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}^1) = \mathbf{x}_1, \quad \Phi_2(\mathbf{x}^2, t) = \mathbf{M}_2(\mathbf{x}^1, t) + \mathbf{N}_2(\mathbf{x}^1, t) \mathbf{x}_2, \quad (\text{П.4.5})$$

$$\mathbf{u} = \Phi_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{M}_3(\mathbf{x}, t) + \mathbf{N}_3(\mathbf{x}, t) \mathbf{w}. \quad (\text{П.4.6})$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_2(\mathbf{z}^1, t) &= \mathbf{P}_{12}^{-1} \left[ -\mathbf{P}_{11} \Psi_1(\mathbf{z}^1, t) + \mathbf{C}_1(\mathbf{z}^1, t) \right] = -\mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{P}_{11} \mathbf{z}_1, \\
\mathbf{L}_2(\mathbf{z}^1, t) &= \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{D}_1(\mathbf{z}^1, t),
\end{aligned} \quad (\text{П.4.7})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_3(\mathbf{z}^2, t) = \mathbf{Q}_2^{-1} & \left[ \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}_{2j} \Psi_j(\mathbf{z}^j, t) + \dot{\mathbf{K}}_2(\mathbf{z}^1, t) + \right. \\
& \left. + \dot{\mathbf{L}}_2(\mathbf{z}^1, t) \mathbf{z}_2 + \mathbf{L}_2(\mathbf{z}^1, t) \mathbf{C}_2(\mathbf{z}^2, t) \right], \\
\mathbf{L}_3(\mathbf{z}^2, t) = \mathbf{Q}_2^{-1} & \mathbf{L}_2(\mathbf{z}^1, t) \mathbf{D}_2(\mathbf{z}^2, t),
\end{aligned} \tag{П.4.8}$$

где матрицы  $\mathbf{P}_{ij}$ , ( $i = 1, 2; j = 1, 2$ ),  $\mathbf{Q}_2$  и вектор-функции  $\Psi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) определены в (3.3), (3.4) и (3.10)–(3.12), а вектор-функции  $\mathbf{M}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и матрицы-функции  $\mathbf{N}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 = 0, \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{I}_3, \\
\mathbf{M}_2(\mathbf{x}^1, t) = -\mathbf{L}_2^{-1}(\Phi^1(\mathbf{x}^1, t), t) \mathbf{K}_2(\Phi^1(\mathbf{x}^1, t), t), \quad \mathbf{N}_2(\mathbf{x}^1, t) = \mathbf{L}_2^{-1}(\Phi^1(\mathbf{x}^1, t), t) \\
\mathbf{M}_3(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{L}_3^{-1}(\Phi(\mathbf{x}, t), t) \mathbf{K}_3(\Phi(\mathbf{x}, t), t), \quad \mathbf{N}_3(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}_3^{-1}(\Phi(\mathbf{x}, t), t).
\end{aligned} \tag{П.4.9}$$

## Литература

1. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Оборонгиз, 1963. 398 с.
2. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.* Динамика полета. М.: Оборонгиз, 1963. 152 с.
3. *Боднер В. А.* Теория автоматического управления полетом. М.: Наука, 1964. 313 с.
4. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полета. Устойчивость и управляемость летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 467 с.
5. *Тараненко В. Г.* Динамика самолета с вертикальным взлетом и посадкой. М.: Машиностроение, 1978. 156 с.
6. *Бюшгенс Р. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с.
7. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.
8. *Красовский А. А., Вавилов Ю. Ф., Сучков А. И.* Системы автоматического управления летательных аппаратов. М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1986. 412 с.
9. *Тараненко В. Г.* Динамика самолетов с вертикальным взлетом и посадкой. М.: Машиностроение, 1993. 256 с.
10. *Буков В. Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 232 с.
11. *Летов Ф. М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 215 с.
12. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 268 с.
13. *Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г.* Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1974. 377 с.
14. *Каргу Л. И.* Системы угловой стабилизации космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 290 с.
15. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 322 с.
16. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 410 с.
17. *Тимофеев А. В.* Адаптивная стабилизация программных движений и оценка времени адаптации // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 3. С. 545–549.
18. *Попов Е. П., Тимофеев А. В.* Принцип скоростного управления в задаче аналитического синтеза автоматов стабилизации // Докл. АН СССР. 1979. Т. 256, № 5. С. 1073–1076.
19. *Попов Е. П., Тимофеев А. В.* Управляемость на подпространстве и адаптивные модальные регуляторы // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1070–1073.
20. *Тимофеев А. В.* Свойства обратимых моделей динамики и синтез высококачественного робастного управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 1. С. 45–56.

21. *Зотов Ю. К., Тимофеев А. В.* Управляемость и стабилизация программных движений обратимых механических и электромеханических систем // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56, вып. 6. С. 968–975.
22. *Зотов Ю. К., Тимофеев А. В.* Стабилизация программных движений с заданными показателями качества в обратимых управляемых системах // Автоматика. 1991. № 3. С. 15–23.
23. *Зотов Ю. К., Тимофеев А. В.* Методы стабилизации движений обратимых динамических систем с использованием нелинейных канонических преобразований // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 6. С. 41–54.
24. *Гинзбург А. Р., Тимофеев А. В.* Об адаптивной стабилизации программных движений механических систем // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 44, вып. 5. С. 859–869.
25. *Тимофеев А. В., Экало Ю. В.* Устойчивость и стабилизация программных движений робота-манипулятора // Автоматика и телемеханика. 1976. № 10. С. 148–156.
26. *Павлов В. А., Тимофеев А. В.* Построение и стабилизация программных движений подвижного робота-манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1976. № 6. С. 91–101.
27. *Тимофеев А. В.* Построение адаптивных систем управления программным движением. Л.: Энергия, 1980. 85 с.
28. *Козлов В. В., Макарычев В. П., Тимофеев А. В., Юревич Е. И.* Динамика управления роботами. М.: Наука, 1984. 334 с.
29. *Тимофеев А. В.* Управление роботами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 240 с.
30. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 517 с.
31. *Брандин В. Н., Разоренов Г. Н.* Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 216 с.
32. Справочник по теории автоматического управления // Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 711 с.
33. *Первозванский А. А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.
34. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
35. *Shaung R. Kou, David L. Elliott, Tzuh Jong Tarn.* Observability of nonlinear Systems // Inform. and Contr. 1973. Vol. 22, no. 1. P. 88–99.
36. *Ohtsuki T., Watanabe H.* State-variable Analysis of RLS Networks Containing nonlinear Coupling Elements // IEEE Trans. 1969. Vol. CT-16, no. 1. P. 26–38.
37. *Wu F. F., Desoer C. A.* Global Inverse Function Theorem // IEEE Trans. 1972. Vol. CT-19, no. 2. P. 199–201.
38. *Gale D., Nikaido H.* The Yacobian matrix and global inivalence of mappings // Math. Ann. Vol. 159, no. 2. 1965. P. 45–53.
39. *Kuh E. S., Haj I. N.* Nonlinear circuit theory: resistive networks // Proc. IEEE. 1971. Vol. 59 (3). P. 340–355.