ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ НА ГРАНИЦЕ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА УПРАВЛЕНИЙ МЕТОДОМ ОГИБАЮЩИХ

В. П. Иванов

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, В.О., 14 линия, д.39

УДК 681.3
Иванов В.П. **Оптимизация управления динамическими системами на границе допустимого множества управлений методом огибающих** // Труды СПИИРАН. Вып. 4 — СПб: Наука, 2007.
Аннотация. *В статье изложено приложение метода огибающих к оптимизации управления динамическими системами на границе допустимого множества управлений.* — Библ. 4 назв.

UDC 681.3
Ivanov V.P. **Dynamic Systems Control Optimization on the Admissible Border of Control with the Envelop Method** *// SPIIRAS Proceedings. Issue 4* — SPb.: Nauka, 2007.
Abstract. *We describe the envelop method to dynamic systems control optimization on the admissible border of control.* — Bibl. 4 items.

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= f_j(x) + B_j(x)u_j, \qquad && j = 1, \dots, m, \\ \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x), && i = m+1, \dots n. \end{aligned} \tag{1}$$

где t — действительная переменная; $t \in \Im(t)$; $\Im(t)$ — открытое множество вещественной оси t, $\Im(t) = (-\infty, \dots, +\infty)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор состояния действительного n–мерного пространства $R^n(x)$, $x \in R^n(x)$; $f = (f_1, \dots, f_n)$, $B = (B_1, \dots, B_m)$ — заданные вектор-функции; $f \in C_1$, $B \in C_1$; $B_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$; $u = (u_1, \dots, u_m)$ — m–мерный вектор управления; $u \in U$, U — заданное множество допустимых управлений; $m < n$. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда каждая компонента управления ограничена отрезками $\left[u_{\min}^{доп}, u_{\max}^{доп}\right]$ и $\left|u_{\min j}^{доп}\right| = \left|u_{\max j}^{доп}\right| = U_j^{доп}$.

Задан терминальный функционал

$$J = F\,[x_i(T), \quad i = m+1, \dots, n]\,, \tag{2}$$

определенный на решениях уравнений (1), F — некоторая функция, $F \in C_1$, $T \in \Im(t)$.

В момент $t = T$ могут быть заданы дополнительные условия вида

$$h_i = [\,x(T)], \quad i = 1, \dots, n\,, \tag{3}$$

которые могут быть включены в функционал (2) через дополнительные множители Лагранжа.

Отметим, что поскольку система уравнений (1) автономная, то множество $\Im(t)$ допустимо сузить до отрезка $[t_0, T]$, где t_0 — начальное значение аргумента t, $t_0 \in \Im(t)$.

Значения $x(t_0) = x_0$ полагаются известными.

Сформулируем задачу оптимального управления следующим образом: среди всех допустимых на отрезке $[t_0, T]$ управлений $u \in U$, переводящих точку $(t_0, x(t_0))$ в точку $(T, x(T))$, найти такие, для которых функционал (2), определенный на решениях системы уравнений (1), принимает наименьшее значение при выполнении условий (3).

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p \in C_1$, и составим гамильтониан задачи оптимизации H:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i + \sum_{j=1}^{m} p_j B_j u_j \,. \tag{4}$$

С использованием функции H в пространстве переменных $D^n(x, p)$, $x \in D^n(x, p)$, $p \in D^n(x, p)$, уравнения (1) запишутся в следующей канонической форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что H и p на оптимальном решении непрерывны и к этому же приводит аналог условия Эрдмана–Вейерштрасса классического вариационного исчисления. Непрерывность сохраняется и в том случае, когда правые части уравнений (1) терпят разрыв.

Для оптимального управления $u(t)$ и фазовой траектории $x(t)$ в рамках принципа максимума необходимо существование такого ненулевого вектора p, при котором выполняются условия:

1) функция H переменного $u \in U$ при каждом $t \in [t_0, T]$, т.е. при фиксированных x, p, достигает при $u = u_{opt}(t)$ минимума:

$$H(x_{opt}, u_{opt}, p) = \min_{u \in U} H(x, u, p). \tag{6}$$

Таким образом, оптимальное управление на границе множества допустимого управления определяется как

$$u_{opt} = \arg\min_{u \in U} H(x, u, p); \tag{7}$$

2) выполняется условие трансверсальности:

$$\left[H\delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i\right]_{t_0}^{T} + \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\delta x_i\right]_{t_0}^{T} = 0, \tag{8}$$

где δt, δx_i — произвольные вариации соответствующих переменных; $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — вектор констант.

Обобщенные условия трансверсальности в силу независимости вариаций приводят к соотношениям:

$$\begin{aligned} &[H]_{t_0}^{T} = 0, \\ &p_i = \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} + \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\right]_{t_0}^{T}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{9}$$

Непосредственным следствием системы уравнений (5) и условия (6) является выполнение соотношения: $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$.

С учетом (9) для автономных систем при незаданном явно аргументе T имеем:

$$H = \text{const} = 0\,. \tag{10}$$

Из соотношения (7) ввиду особой структуры уравнений динамической системы (1) и соответственно гамильтониана (4), оптимальное управление определяется как

$$u_{opt} = \arg\min_{u \in U} H(x, u, p) = \arg\min_{u \in U}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f_i + \sum_{j=1}^{m} p_j B_j u_j\right) = \arg\min_{u \in U}\left(\sum_{j=1}^{m} p_j B_j u_j\right). \tag{11}$$

Откуда после преобразований имеем:

$$u_{opt\,j} = \begin{cases} -U_j^{доп}\,\mathrm{sign}\,(p_j B_j), & \text{\textit{если}}\ \ p_j \neq 0, \\ u_{особ\,j}, & \text{\textit{если}}\ \ p_j = 0, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{12}$$

где $u_{особ\,j}$ — особое оптимальное управление.

Отметим, что если в каждый момент времени значения x известны (могут быть оценены), то вектор p определен (с точностью до констант) на правом конце фазовой траектории. Возникает специфическая краевая задача, после решения которой тем или иным способом можно найти $u_{особ\,j} = u_{особ\,j}(x, p)$. Однако вычислительные трудности, стоящие на этом пути, методические ошибки и ошибки округлений при численном решении систем уравнений (5) делают процесс нахождения достоверных значений $u_{особ\,j}$ весьма трудным. Поэтому представляется желательным поиск нетрадиционных методов нахождения особого оптимального управления, в частности, использовать для этой цели метод огибающих.

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

2. Основной результат

Представим уравнения (5) для $p = (p_1, \ldots, p_n)$ в следующей форме:

$$\frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\nu} = -p_\nu\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu}u_\nu\right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\nu}}^{m} p_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} + \frac{\partial B_j}{\partial x_\nu}u_j\right) - \sum_{i=m+1}^{n} p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Преобразуем уравнение (12) к виду

$$\frac{dp_\nu}{dt} + \Phi_\nu p_\nu = G_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, m, \tag{14}$$

где

$$\Phi_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu}u_\nu,$$
$$G_\nu = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\nu}}^{m} p_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} + \frac{\partial B_j}{\partial x_\nu}u_j\right) - \sum_{i=m+1}^{n} p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}, \tag{15}$$
$$\nu = 1, \ldots, m.$$

Проинтегрировав уравнение (14), получим:

$$p_\nu = e^{-\int \Phi_\nu dt}\left[\int G_\nu e^{\int \Phi_\nu dt} dt - C_\nu\right], \qquad \nu = 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Постоянные C_ν находятся из условий трансверсальности (9). Отметим, что знак функций p_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, при известных C_ν определяется знаком функции G_j.

Показано [3], что ввиду линейного вхождения управления в систему уравнений (1) особое оптимальное управление каждой *j*-й компоненты может быть найдено из системы уравнений

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2p_s, \tag{17}$$

где p_s — порядок сингулярности, при выполнении следующих необходимых условий оптимальности:

$$(-1)^{p_s}\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^{2p_s}}{dt^{2p_s}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right] \geq 0, \qquad p_s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

если $\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \, \partial u_j} \right\} \equiv 0, \quad (i, j = 1, \dots, m)$.

Первоначально рассмотрим случай, когда порядок сингулярности особого управления равен единице. В этом случае особое управление можно найти из уравнений:

$$p_j = 0, \qquad \frac{dp_j}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2 p_j}{dt^2} = 0, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{19}$$

Из первых двух уравнений системы (19) с учетом (14), (16) следует, что $G_j = 0$. Разрешим эти уравнения относительно соответствующей переменной x_j. Если корень существует, то $x_j = \eta_j\,(x_\nu, p_\nu; \quad \nu = 1, \dots, n; \quad \nu \neq j)$.

Тогда третье уравнение системы (19) можно записать как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dp_j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} G_j\,(x_j, \eta_j) = 0. \tag{20}$$

И третье уравнение системы (19) после преобразований примет вид

$$\frac{\partial G_j}{\partial x_j}(f_j + B_j u_j) + \frac{\partial G_j}{\partial \eta_j}\frac{d\eta_j}{dt} = \frac{\partial G_j}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial G_j}{\partial x_j} B_j u_j + \frac{\partial G_j}{\partial \eta_j}\frac{d\eta_j}{dt} = 0 . \tag{21}$$

Из этого уравнения можно найти особое управление как

$$u_j = -\frac{\dfrac{\partial G_j}{\partial x_j} f_j + \dfrac{\partial G_j}{\partial \eta_j}\dfrac{d\eta_j}{dt}}{B_j \dfrac{\partial G_j}{\partial x_j}} = -\frac{f_j + \left(\dfrac{\partial G_j}{\partial \eta_j}\dfrac{d\eta_j}{dt} \right) \Big/ \dfrac{\partial G_j}{\partial x_j}}{B_j} \tag{22}$$

при выполнении необходимых условий оптимальности в следующей форме:

$$B_j \left. \frac{\partial G_j}{\partial x_j} \right|_{x_j = \eta_j} \leq 0, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{23}$$

Отметим, что корень уравнения $G_j = 0$ необязательно может быть единственным. Тогда каждое его значение проверяется на выполнение необходимых (23) и достаточных (2) условий оптимальности. Отметим, что на мгновенном решении $x_j = \text{const} = \eta_j$.

Так как $G_j = 0$ при $x_j = \eta_j$, то оптимальное управление можно представить в форме

$$u_{opt\,j}=\begin{cases}-U_j^{доп}\,sign\,(p_j B_j), & если\;\; x_j\neq\eta_j,\\ u_{особ\,j}, & если\;\; x_j=\eta_j,\end{cases} \tag{24}$$
$$j=1,\ldots,m.$$

В [4] показано, что особое оптимальное управление может быть найдено на семействе мгновенных решений. Следовательно, и управление на границе допустимой области также может быть найдено на семействе мгновенных решений.

В случае, когда порядок сингулярности особого управления больше единицы, оно может быть найдено из решения следующей системы уравнений [3]:

$$p_j=0,\qquad \frac{dp_j}{dt}=0,\ldots,\frac{d^{2k}p_j}{dt^{2k}}=0,\qquad k=1,\ldots,p_s,\quad j=1,\ldots,m. \tag{25}$$

Так как уравнения системы (25) составлены из приравнивания нулю последовательно производных p_j, то из второго уравнения системы уравнений (25) можно выделить условия сингулярности первого порядка $G_j=0$ (или $x_j=\eta_j$), а затем, дифференцировав их $2p_s-1$ раз, найти особое управление. Таким образом, и в этом случае управление примет вид (24) и может быть найдено на мгновенных решениях.

Рассмотрим случай нулевого порядка сингулярности. Он характеризуется отсутствием особого управления, т.е. p_j либо сохраняет знак, либо меняет его, становясь равной нулю только в одной точке (а не на отрезке) при выполнении условий трансверсальности (9) на правом конце траектории. Дополним условие $p_j=0$ условиями первого порядка сингулярности (19), которые преобразуем к форме $x_j=\eta_j$. Тогда оптимальное управление на границе допустимой области можно выразить в виде

$$u_j^{опт}=-U_j^{доп}\,\mathrm{sign}(p_j B_j). \tag{26}$$

Но знак p_j, согласно (16), определяется знаком функции G_j, в точке $x_j=\eta_j$. Таким образом, и в этом случае управление находится на семействе мгновенных решений.

3. Пример

Требуется минимизировать функционал $J=\sqrt{\left[x_3(T)-x_3^k\right]^2+\left[x_4(T)-x_4^k\right]^2}$, определенный на решениях следующей системы уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt}=A(u-\cos x_1),\quad \frac{dx_2}{dt}=B,\quad \frac{dx_3}{dt}=x_2\sin x_1,\quad \frac{dx_4}{dt}=x_2\cos x_1,$$

где u — управление, $|u| \le U$, A, B — константы, $A > 0$, $B > 0$, x_3^k, x_4^k — заданные функции.

Уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} A(u - \cos x_1) + \frac{\partial V}{\partial x_2} B + \frac{\partial V}{\partial x_3} B \sin\theta + \frac{\partial V}{\partial x_4} B \cos\theta = 0..$$

Для нахождения мгновенных решений, согласно [4], условно разделим переменные с учетом условий трансверсальности:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} A(u - \cos x_1) + \alpha_2 + \alpha_3 x_2 \sin x_1 + \alpha_4 x_2 \cos x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_2} B = \alpha_2, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \alpha_3, \quad \frac{\partial V_4}{\partial x_4} = \alpha_4.$$

Определим V:

$$V = (\alpha_2 + \alpha_3 x_2 \sin x_1 + \alpha_4 x_2 \cos x_1)(t - T) + \alpha_2 \int_{x_2(t)}^{x_2(T)} \frac{dx_2}{B} + \alpha_3 \int_{x_3(t)}^{x_3(T)} dx_3 + \alpha_4 \int_{x_4(t)}^{x_4(T)} dx_4 + V_0.$$

Определим мгновенные решения:

$$x_1 = \eta, \quad x_2(T) = x_2(t) + B(T - t),$$
$$x_3(T) = x_3(T) + x_2 \sin\eta (T - t),$$
$$x_4(T) = x_4(T) + x_2 \cos\eta (T - t).$$

Поставляя эти значения в функционал и минимизируя последний, после преобразований получим $tg\eta = \dfrac{x_3^k - x_3}{x_4^k - x_4}$.

Управление u найдем как

$$u = \begin{cases} -U \mathrm{sign}\,[\sin(x_1 - \eta)], & \textit{если} \;\; x_1 \ne \eta, \\ u_{особ}, & \textit{если} \;\; x_1 = \eta, \end{cases}$$

где $u_{особ} = \cos\eta + \dfrac{1}{A}\dfrac{d\eta}{dt}$.

Производные $\dfrac{d\eta}{dt}$ можно найти, дифференцируя геометрические соотношения либо применяя численные методы.

На мгновенных решениях выполняется соотношение: $\theta = \eta$ или $\theta = \eta \pm \pi$, $\eta = const$.

Литература

1. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
2. Сейдж Э. П., Уайт Ч. С. Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 398 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особое оптимальное управление. М.: Наука, 1973. 256 с.
4. Иванов В. П. Оптимизация вырожденного управления динамическими системами методом огибающих // Сборник трудов СПИИРАН. 2006. Вып. 3, т. 2. СПб, Наука, 2006. С. 358–365.