МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОГРАММНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Ф. М. Кулаков, Е. Н. Смирнов, А. А. Евлампиев, А. Е. Липатов, Ю. В. Михайлов

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО, д.39, Санкт-Петербург, 199178

<kul@iias.spb.su>

УДК 528.8

Кулаков Ф. М., Смирнов Е. Н., Евлампиев А. А., Липатов А. Е., Михайлов Ю. В. **Метод формирования оптимальной по времени программной траектории перемещения** // Труды СПИИРАН, Вып. 4 — СПб: СПИИРАН, 2007.

Аннотация. *В статье изложен метод и предложен несложный алгоритм формирования программной траектории движения манипулятора, оптимальной по времени. Он обеспечивает перемещение манипулятора по параметрической кривой, заданной в виде функции скалярного аргумента «геометрической» траектории, из начального в конечное положение за минимальное время при соблюдении ограничений на величину суставных сил, развиваемых приводами робота.* — Библ.8 назв.

UDC 528.8

Kulakov F. M., Smirnov E. N., Evlampiev A. A., Lipatov A. E., Michailov J. V. **Method of formation optimum on time of a program trajectory of moving** // SPIIRAS Proceedings. Issue 4 — SPb: SPIIRAS, 2007.

Abstract *In clause the method is stated and offered simple algorithm formations of a program trajectory of movement of the manipulator, optimum on time. It provides moving on the set parametrical curve in the form of function of scalar argument of a "geometrical" trajectory from initial in final position for minimal time at observance of restrictions on size of the articulate forces developed by drives of the robot. — Bibl.8 items.*

1. Постановка задачи

Задача формирования оптимальных траекторий движения робота всегда представляла как теоретический, так и практический интерес. Последнее важно, например, с точки зрения обеспечения возможности перемещения робота в среде с препятствиями при одновременном достижении максимально возможной скорости выполнения операций при наличии ограничений на управления или достижения минимальных затрат энергии при ограничении на время выполнения.

Эта задача обычно решается в два этапа. На первом этапе в пространстве обобщенных (суставных) координат строится так называемая оптимальная «геометрическая траектория» в виде простой кривой в смысле Жордана, принадлежащей n-мерному пространству, которая в параметрическом представлении имеет вид

$$q = f(l), \tag{1}$$

где $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ — n-мерный вектор обобщенных координат робота;
$f(l)$ — n-мерная вектор-функция скалярного параметра l;
$q_b = f(l_b)$, $q_e = f(l_e)$ — начальная и конечная точки геометрической траектории.

Полагаем, что сформированная геометрическая траектория такова, что при перемещении по ней от ее начальной точки q_b к конечной точке q_e ни одно звено манипулятора, как и его рабочий инструмент, не входит в соприкосновение с объектами внешней среды. Решению этой проблемы посвящено огромное количество работ, например [1–7].

В то же время эта траектория не определяет «темпа» движения манипулятора, т.е. закона изменения его суставных координат во времени, что является необходимым для полного определения движения манипулятора в пространстве. Чтобы это осуществить, реализуется второй этап задачи. В данном случае, очевидно, достаточно определить закон изменения во времени параметра l. Это закон целесообразно выбрать таким, чтобы минимизировать некоторые важные с эксплуатационной точки зрения критерии. Одним из распространенных критериев такого рода является время, затрачиваемое на перемещение по геометрической траектории от ее начальной точки к конечной.

Этот критерий имеет следующее очевидное представление:

$$\Omega = \int_{t_b}^{t_e} l dt . \tag{2}$$

Этой проблеме также уделялось много внимания. В статье предложен новый метод, который достаточно экономными средствами может быть реализован алгоритмически и программно.

2. Решение задачи

При решении задачи минимизации вышеприведенного критерия необходимо учитывать, что искомый закон изменения суставных координат во времени должен подчиняться уравнениям динамики, которые связывают управления приводами и суставные координаты.

Эта связь, представляется:

– n-уравнениями приводов с трансмиссией, которые в форме Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_d^{'}} - \frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_d} = A_d(q_d)q_d^{"} + q_d^{T'} B_d(q_d)q_d^{'} + C_d(q_d) = Q_d + Q_{fd} + \lambda ; \tag{3}$$

– n-уравнениями манипулятора

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{'}} - \frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q} = A(q)q^{"} + q^{T'} B(q)q^{'} + C(q) = Q_{fm} - z^T \lambda ; \tag{4}$$

– n-уравнениями зависимости между суставными координатами манипулятора $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ и выходными координатами приводов $q_d = (q_{d1}, q_{d2}, ..., q_{dn})$:

$$q_d^{'} = zq^{'} ; \tag{5}$$

– n-уравнениями, связывающими n-мерный вектор управления приводами U и вектор Q_d:

$$Q_d = K_{tr}U - K_f q_d^{'} . \tag{6}$$

Здесь T, Π — кинетическая и потенциальная энергии манипулятора и приводов; A и A_d — $n \times n$- матрицы инерции манипулятора и привода; Q_d, $Q_{fd} = K_d q_d^{'}$, $Q_{fm} = K_m q^{'}$ — n-мерные векторы сил, развиваемых приводами, а также сил трения в приводах и суставах манипулятора; $C(q)$ и $C(q_n)$ — n-мерные векторы потенциальных сил манипулятора и приводов; $B(q)$ и

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$B_d(q_d)$ — $n \times n \times n$ положительно определенные симметричные матрицы коэффициентов кориолисовых и центробежных сил манипулятора и приводов; K_{tr} и K_f — $n \times n$ положительно определенные матрицы коэффициентов преобразования и диссипативных потерь приводов соответственно; z — $n \times n$ матрица передачи трансмиссии; λ — n-мерный вектор обобщенных реакций; K_m, K_d — положительно определенные симметричные $n \times n$ матрицы.

Исключив из уравнений (3)–(6) векторы λ, q_d, Q_d, получим:

$$\overline{A}(q)\ddot{q} + \dot{q}^T \overline{B}(q)\dot{q} + \overline{K}\dot{q} + \overline{C}(q) = Q\,. \tag{7}$$

Здесь $\overline{A} = A(q) + z^T z A_d^*(q)$ — $n \times n$ результирующая положительно определенная симметричная матрица инерции манипулятора и приводов; $\overline{B} = B(q) + z^T z B_d^*(q)$ — $n \times n \times n$ результирующая положительно определенная симметричная матрица коэффициентов кориолисовых и центростремительных сил; $\overline{C} = C(q) + z^T z C_d^*(q)$ — n-мерный результирующий вектор потенциальных сил; $\overline{K}\dot{q} = (K_m + z^T z(K_f + K_q))\dot{q}$ — n-мерный результирующий вектор диссипативных сил (где K — положительно определенная симметричная $n \times n$ матрица коэффициентов результирующих диссипативных потерь); $Q = z^T K_{tr} U$ — n-мерный вектор суставных сил.

Важно отметить, что вектор U, а следовательно, Q являются ограниченными величинами.

Эти ограничения

$$|U| \le U_{\max},\ |Q| \le Q_{\max} \text{ или } |U_j| \le U_{j\max},\ |Q_j| \le Q_{j\max},\ j = 1,2,\ldots,n\,, \tag{8}$$

очевидны для любого реального привода.

Векторно-матричному представлению уравнений динамики (7) соответствует система из n дифференциальных уравнений. Очевидно, в них можно заменить вектор суставных координат q его представлением (1) через параметр l, которое определяет геометрическую траекторию. Это даст n уравнений относительно l; в векторно-матричном представлении они имеют вид

$$M(l)\ddot{l} + N(l)(\dot{l})^2 + P(l)\dot{l} + R(l) = Q\,, \tag{9}$$

где $M(l) = \overline{A}(q(l))\dfrac{\partial q}{\partial l}$, $N(l) = \overline{A}(q(l))\dfrac{\partial^2 q}{\partial l^2} + \left(\dfrac{\partial q}{\partial l}\right)^T \overline{B}(q(l))\dfrac{\partial q}{\partial l}$, $P(l) = \overline{K}\dfrac{\partial q}{\partial l}$, $R(l) = \overline{C}(q(l))$ — $n \times 1$-матрицы.

Принимая во внимание вышеизложенное, задачу формирования оптимальной траектории перемещения робота-манипулятора как функции времени можно сформулировать следующим образом.

Требуется найти $l(t)$ закон изменения во времени скаляра l от его известного начального значения $l(t_b) = l_b$ до известного конечного значения $l(t_e) = l_e$, который обеспечивает минимум заданному временному критерию (2). Причем известно, что этот закон должен удовлетворять n дифференциальным уравнениям (9), правые части которых $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ — суставные силы могут изменяться во времени произвольно, однако должны удовлетворять ограничениям (8).

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Так как требуемый закон изменения суставных координат осуществляется за счет соответствующего изменения во времени векторов управлений приводами или суставных сил Q, которые должны формироваться при реализации управления роботом с помощью управляющей ЭВМ, то целесообразно данную задачу переформулировать следующим образом.

Требуется найти закон управления $Q(t)$ суставными координатами робота, который переводит скаляр l, подчиняющийся n уравнениям (9), из заданного начального положения $l(t_b) = l_b$ в заданное конечное положение $l(t_e) = l_e$ и обеспечивает минимум заданному временному критерию (2); управления приводами и суставные координаты ограничены и могут изменяться в пределах (8).

Будем решать сначала поставленную задачу, сделав правдоподобное предположение о том, что при протекании оптимального переходного процесса $l(t)$ существует одно j-е из n ограничений (8), назовем его определяющим, при удовлетворении которого остальные $(n-1)$ ограничений автоматически выполняются.

Заметим, что номер суставной силы, соответствующий определяющему ограничению, в начальный и конечный моменты находится путем проверки в эти моменты при $t = t_b$, $l(t_b) = l_b$, $\dot{l}(t_b) = 0$ и $t = t_e$, $l(t_e) = l_e$, $\dot{l}(t_e) = 0$ — величин ускорений $\ddot{l}_j(t_b)$ $(j = 1,2,...n)$: по формуле $\dfrac{Q_{j\max} - R_j(l_b)}{M_j(l_b)} = \ddot{l}(t_b)$ для начального момента и по формуле $\dfrac{Q_{j\max} - R_j(l_e)}{M_j(l_e)} = \ddot{l}(t_e)$ для конечного момента. Очевидно, искомый номер j суставной силы должен соответствовать номеру минимального по абсолютной величине ускорения $\ddot{l}_j$, $j = 1,2,...n$, определенного с помощью каждого из n уравнений системы (9), когда в правой части его присутствует максимальная суставная сила.

В общем случае в течение времени протекания переходного процесса возможна смена определяющих ограничений. Тогда при решении задачи удобно осуществить следующий методический прием. Оптимальный переходный процесс $l(t)$ разобьем на m отрезков таким образом, что границам этих отрезков соответствуют моменты смены определяющих ограничений и при решении задачи оптимизации будем использовать принцип оптимизации Беллмана, утверждающий, что любой отрезок оптимальной траектории (и закона изменения во времени оптимального управления) также является оптимальной траекторией (или оптимальным управлением).

Это позволяет общую задачу нахождения оптимального процесса $l(t)$ разбить на m подзадач, каждая из которых является подзадачей нахождения оптимального процесса $l^k(t)$ и соответствующего ему управления $Q_j^k(t)$, $t_{k-1} < t \le t_k$ $(k = 1,2,...,m)$. Причем значения оптимальных процессов $l^k(t)$ на концах примыкающих друг к другу интервалов должны совпадать.

Исходными данными для каждой k-й подзадачи является только одно из n дифференциальных уравнений (9), описывающих процесс на k-м интервале, а именно j-е уравнение и соответствующее ему только одно из n ограничений (8), а именно определяющее ограничение, которым является j-е неравенство (8); остальные ограничения автоматически выполняются при удовлетворении

j-го определяющего. Очевидно, что каждая подзадача является одномерной подзадачей определения процесса $l(t)$, оптимального для данного k-го участка, подчиняющегося j-му уравнению системы (9), а также определения одной j-й из n оптимальных суставных сил; остальные $(n-1)$ суставные силы, которые также должны быть определены, находятся путем простой подстановки полученного оптимального закона в левые части $(n-1)$ известных уравнений системы (10). Что касается значений $l(t)$ на концах временных отрезков, то в данном случае известны: начальное значение $l(t)$, $\dot{l}(t)$ для первого временного интервала: $l(t_0) = l(t_b)$, $\dot{l}(t_0) = \dot{l}(t_b) = 0$; конечные значения для последнего m-го интервала: $l(t_m) = l(t_e)$, $\dot{l}(t_m) = \dot{l}(t_e) = 0$; и кроме того, известно, что значения оптимального процесса на концах примыкающих друг к другу интервалов совпадают.

Рассмотрим ход решения задачи нахождения оптимального процесса $l^k(t)$ для k-го интервала. Он основан на использовании принципа максимума.

Приведем j-е уравнение второго порядка системы (9), соответствующее определяющему ограничению для этого участка к системе уравнений первого порядка, введя вектор состояния $x^k = (x_1^k, x_2^k)$, где $x_1^k = l^k(t)$, $x_2^k = \dot{l}^k(t)$. В результате получим для каждого k-го интервала следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих процесс $l(t)$ на этом интервале:

$$\dot{x}^k(t) = \Phi^k(x^k, Q_j^k), \tag{10}$$

где

$$\Phi^k(x^k, Q_j^k) = \left\| \begin{array}{c} \Phi_1^k(x^k, Q_j^k) \\ \hdashline \Phi_2^k(x^k, Q_j^k) \end{array} \right\|,$$

$$\Phi_1^k(x^k, Q_j^k) = x_2^k, \quad \Phi_2^k(x^k, Q_j^k) = -a^k(x_1^k)(x_2^k)^2 - b^k(x_1^k)x_2^k - c^k(x_1^k) + d^k(x_1^k)Q_j^k,$$

$$a^k(x_1^k) = M^{-1}(x_1^k)N(x_1^k),$$

$$b^k(x_1^k) = M^{-1}(x_1^k)P(x_1^k),$$

$$c^k(x_1^k) = M^{-1}(x_1^k)R(x_1^k),$$

$$d^k(x_1^k) = M^{-1}(x_1^k).$$

В соответствии с принципом максимума для определения оптимального управления дополнительно к m уравнениям, описывающим процессы $l^k(t) = x_1^k$, $\dot{l}^k(t) = x_2^k$ на каждом k-м интервале, необходимо использовать функцию Гамильтона H_1^k, связывающую вектор состояния $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ и дополнительные переменные p_1^k и p_2^k, а также сопряженную систему уравнений относительно этих переменных.

Для каждого k-го из m интервалов оптимального процесса, с учетом того что, в соответствии с (10) $\Phi_0 = 1$, функция Гамильтона будет равна:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^k &= p_0^k\Phi_0 + p_1^k\Phi_1^k + p_2^k\Phi_2^k = p_0 + p_1^k x_2^k - p_2^k a^k(x_1^k)(x_2^k)^2 - p_2^k b^k(x_1^k)x_2^k - \\ &- p_2^k c^k(x_1^k) + p_2^k d^k Q_j^k, \ k = 1,2,\ldots,m, \end{aligned} \tag{11}$$

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

где p_1^k, p_2^k — дополнительные переменные для k-го интервала.

Так как функция Гамильтона в течение всего переходного процесса должна иметь максимальные значения, а для этого, в соответствии с принципом оптимальности Беллмана, функции H^k для каждого из m вспомогательных интервалов, на которые разбито общее время оптимального процесса, должны быть максимальны. Это положение приводит к утверждению, что суставные силы Q_j^k на каждом из m интервалов должны быть равны

$$Q_j^k = sign(p_2^k d^k) Q_{j\max}^k, \tag{12}$$

т.е. максимальному значению, равному по модулю допустимой величине определяющего ограничения для данного k-го вспомогательного интервала, знак же Q_j^k определяется знаком величины $p_2^k d^k$.

Что касается $d^k(x_1)$, то значения ее известны, т.к. известны уравнения динамики (9) манипулятора, а для вычисления вспомогательных переменных p_1^k, p_2^k используются, как известно, следующие сопряженные системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1^k &= -\frac{\partial \mathrm{H}^k}{\partial x_1^k} = p_2^k \omega^k(x_1^k, x_2^k); \\ \dot{p}_2^k &= -\frac{\partial \mathrm{H}^k}{\partial x_2^k} = -p_1^k + p_2^k h^k(x_1^k, x_2^k), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\omega^k(x_1^k, x_2^k) = \frac{\partial a^k(x_1^k)}{\partial x_1^k}(x_2^k)^2 + \frac{\partial b^k(x_1^k)}{\partial x_1^k} x_2^k + \frac{\partial c^k(x_1^k)}{\partial x_1^k} - \frac{\partial d^k(x_1^k)}{\partial x_1^k} sign p_2^k d^k(x_1^k) Q_{j\max}^k$$

;

$$h^k(x_1^k, x_2^k) = 2a^k(x_j^k)x_2^k + b^k(x_1^k), \ \ k = 1,2,...m.$$

Заметим, что уравнения (13) являются линейными дифференциальными уравнениями на временных отрезках, где $p_2^k d^k(x_1^k)$ не меняет знак.

Действительно, коэффициенты этого уравнения h^k и ω^k являются функциями x_1^k, x_2^k, изменения которых во времени определяются уравнением (10), и поскольку на указанных отрезках времени в (10) не входят p_1^k и p_2^k, процессы изменения во времени x_1^k и x_2^k можно определить независимо от уравнений (13).

Таким образом, h^k и ω^k в уравнениях (13) являются известными определяемыми из (10) функциями времени, остальные же коэффициенты при p_1^k, p_2^k постоянны и равны единицам, поэтому (13) линейны.

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Рассмотрим сначала решение каждой из этих m систем уравнений для случая, когда коэффициенты h^k и ω^k не зависят от времени, т.е. постоянны, причем $\frac{(h^k)^2}{4} \geq \omega^k$.

В этом случае корни характеристического уравнения системы (13) вещественны и равны $\alpha_{1,2}^k = -h^k / 2 \pm \sqrt{((h^k)^2 / 4 - \omega^k)}$.

Нетрудно показать, что в случае предположения о постоянстве коэффициентов h^k и ω^k в уравнениях (13) для вспомогательных переменных p_1^k, p_2^k соответствующие им уравнения (10) для x_1^k, x_2^k вырождаются в линейные уравнения $\dot{x}^k = \Phi^k(x^k, Q_j^k)$, где $\Phi_1^k = x_2^k$, $\Phi_2^k = -h^k x_2^k - \omega^k x_1^k + d^k Q_j^k$.

Поскольку в данном случае $d^k = const$, знак управления Q_j^k, в соответствии с (12), целиком определяется знаком переменной p_2^k.

При принятом предположении о постоянстве коэффициентов систем уравнений (13) решение каждой k-й из этих m систем уравнений относительно p_1^k, p_2^k имеет следующий вид:

$$p_2^k = C_1^k e^{\alpha_1 t} + C_2^k e^{\alpha_2 t}, \tag{14}$$

где

$$C_1^k = \frac{\alpha_1^k \alpha_2^k p_1^k(t_{k-1})}{\alpha_2^k - \alpha_1^k};$$

$$C_2^k = \frac{\alpha_2^k p_2^k(t_{k-1}) - \alpha_1^k p_2^k(t_{k-1})}{\alpha_2^k - \alpha_1^k};$$

$$\alpha_{1,2}^k = h^k / 2 \pm \sqrt{((h^k)^2 / 4 - \omega^k)};$$

t_{k-1}, t_k — начальный и конечный моменты времени k-го интервала.

Как и соответствующие им оптимальные процессы x_1^k, x_2^k, каждый из $p_2^k(t)$ является частью результирующего непрерывного процесса $p_2(t)$ на своем k-м временном интервале при $t_{k-1} < t \leq t_k$. Это относится и к $p_1^k(t)$. Поэтому на примыкающих друг к другу временных интервалах должны иметь место условия совпадения граничных значений: $p_1^k(t_{k-1}) = p_1^{k-1}(t_{k-1})$ и $p_2^k(t_{k-1}) = p_2^{k-1}(t_{k-1})$.

Выясним характер изменения результирующего процесса $p_2(t)$, знак которого определяет как знак оптимальной суставной силы. С этой целью с помощью каждой из m зависимостей (14) для $p_2^k(t)$ получим момент времени τ_0 обращения $p_2^k(t)$ в ноль, т.е. возможного изменения знака $p_2^k(t)$ на k-м интервале:

$$\tau_0 = \frac{1}{\alpha_2^k - \alpha_1^k} \ln \frac{1 - \left(\frac{p_2^k(t_{k-1})}{p_1^k(t_{k-1})} \right)^{\frac{1}{\alpha_2^k}}}{1 - \left(\frac{p_2^k(t_{k-1})}{p_1^k(t_{k-1})} \right)^{\frac{1}{\alpha_1^k}}}. \tag{15}$$

Проанализировав эту зависимость, получим следующие результаты.

В случае, когда вещественные корни α_1^k и α_2^k, - разные по знаку, обращение в ноль $p_2^k(t)$ возможно только при таких начальных значениях для каждого k-го интервала, когда $\frac{p_2^k(t_{k-1})}{p_1^k(t_{k-1})} \le 0$. Очевидно, что все остальные возможные сочетания значений начальных условий соответствуют отношению $\frac{p_2^k(t_{k-1})}{p_1^k(t_{k-1})} > 0$.

Для них формула (15) дает либо отрицательное время, либо под знаком ln отрицательную величину; это значит, что обращение в ноль $p_2^k(t)$ в этом случае невозможно.

Из этого утверждения следует:

1. Если в момент τ_0 на k-м интервале $t_{k-1} < \tau_0 \le t_k$ произошло изменение знака процесса $p_2^k(t)$, то это возможно только, если начальные значения этого интервала удовлетворяли неравенству $\frac{p_2^k(t_{k-1})}{p_1^k(t_{k-1})} < 0$.

2. После изменения знака $p_2(t)$ всегда имеет место соотношение $\frac{p_2(t)}{p_1(t)} > 0$, а это значит, что при любом $t > \tau_0$ невозможно вторичное обращение в ноль $p_2(t)$.

Рассуждая аналогично можно показать, что и в случае равных по знаку корней дополнительная переменная $p_2(t)$ не может изменять знак более одного раза. Однако изменение знака $p_2(t)$ возможно, если область начальных значений $p_2^k(t_{k-1})$, $p_1^k(t_{k-1})$ на k-м участке удовлетворяет противоположному по сравнению с первым условию $\frac{p_2^k(t_{k-1})}{p_1^k(t_{k-1})} > 0$.

Таким образом, для достижения минимального по времени процесса $l(t)$ необходимо переключать (изменять знак) управляющее воздействие (соответствующую суставную силу) не более одного раза.

Причем переключается (изменяется знак) именно та суставная сила, которая в данный момент соответствует определяющему ограничению, т.е. поддерживается максимально возможной.

Выясним теперь характер изменения управляющего воздействия, если снять предположение о постоянстве коэффициентов h^k и ω^k в сопряженных системах уравнений (13) для дополнительных переменных $p_2^k(t_k)$, $p_1^k(t_k)$.

Это автоматически ведет к тому, что снимаются ограничения о постоянстве коэффициентов в уравнениях (10), а следовательно, в уравнении для оптимизируемого процесса $l(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

Вместе с тем свобода вариаций коэффициентов ограничивается условием, что линеаризированная в любой точке (p_1, p_2) фазового пространства система уравнений (13), для дополнительных переменных p_1^k, p_2^k имеет вещественные корни. Очевидно, и линеаризированные уравнения (10) для (x_1^k, x_2^k) в этом случае в любой точке фазового пространства будет иметь вещественные корни.

Для выяснения характера изменения управляющего воздействия разобьем весь интервал времени протекания процессов $p_2(t)$, $p_1(t)$ на последовательность сколь угодно малых временных интервалов. Можно утверждать, что изменения $p_2^k(t_k)$, $p_1^k(t_k)$ на каждом k-м из этих интервалов со сколь угодно высокой точностью описываются системами уравнений вида (13). Тогда все рассуждения, которые мы приводили ранее для доказательства единственности обращения в ноль процесса $p_2(t)$, описываемого этими уравнениями при вещественности их корней, остаются в силе.

Поскольку из условия максимума функции Гамильтона, в соответствии с (11), следует, что на протяжении всего процесса изменения $p_2(t)$, $p_1(t)$ $sign\, p_2^k = sign\, d^k Q_j^k$, то знак $d^k Q_j^k$ должен изменяться не более одного раза.

Что касается числа переключений суставной силы Q_j^k, то поскольку, в соответствии с (12) $sign\, Q_j^k = sign\, d^k p^k$, это число равно сумме числа изменений знака дополнительной переменной p_2, равного единице, и числа изменений знака коэффициента $d(x_1) = d(l)$. Последний всегда можно вычислить для текущего x_1, т.к. уравнения (7) известны. Следовательно, определение момента переключения Q_j, вызванного изменением знака $d(x_1)$, не представляет проблемы.

Определить момент переключения суставной силы Q_j на k-м интервале, вызванного изменением знака $p_2(t)$, более сложно.

Используем для этой цели нижеследующие идеи.

1. На первом $k = 1$ и последнем $k = m$ вспомогательных временных интервалах изменения процесса $l(t)$ не составляет труда определить номера и знаки суставных сил $Q^1{}_j$ и $Q_i{}^m$, которые являются определяющими на этих участках.

Номера j и i суставных сил, соответствующих определяющим ограничениям на первом и последнем вспомогательных временных интервалах, опреде-

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ляются как номера, соответствующие номерам минимального из n ускорений, определяемого по формуле $\ddot{l} = \dfrac{Q_{j\max} - R_j(l_b)}{M_j(l_b)}$, $j = 1,2,...,n$ для начального момента при $t = t_b$ и по номеру минимального из n ускорений, определяемого по формуле $\ddot{l} = \dfrac{Q_{j\max} - R_j(l_e)}{M_j(l_e)}$ для конечного момента при $t = t_e$, что было уже отмечено ранее.

Для определения знака $Q_j^k = sign(p_2^k d^k(x_1))Q_{j\max}^k$ на первом интервале для $k = 1$ необязательно определять знак $p_2^k d^k(x_1)$, а можно использовать нижеизложенные очевидные соображения. Из исходного уравнения (9) для процесса $l(t)$, с учетом того что $Q_j^k = Q_j(t_b) = const$, следует:

$$\ddot{l}(t) = \frac{Q_j(t_b) - N_j(l)(\dot{l})^2 - P_j(l)\dot{l} - R_j(l)}{M_j(l)}.$$

Поскольку $\left|Q_j(t_b)\right| = Q_{j\max} > \left|-N_j(l)\dot{l}^2 - P_j(l)\dot{l} - R_j(l)l\right|$, по крайней мере в течение малого, но конечного интервала времени $t_b < t < t'$, то $\dot{l}(t)$ сохраняет на этом интервале неизменный знак. Он, очевидно, совпадает со знаком

$$\frac{Q_j(t_b)}{M_j(l_b)} = \ddot{l}(t_b). \tag{16}$$

Этот знак должен быть таким, чтобы приращение параметра l на интервале $t_b < t < t'$ $\Delta l = \int_{t_b}^{t'} \dot{l}(t)dt \approx \dot{l}(t_b)t'$ обеспечивало $\left|l_e - l_b\right| > \left|(l_e - l_b) - \dot{l}(t_b)t'\right|$.

Тогда

$$sign(l_e - l_b) = sign\, \dot{l}(t_b)t' = sign\, \dot{l}(t_b). \tag{17}$$

Таким образом, из (16) и (17) следует, что $sign\dfrac{Q_j(t_b)}{M_j(l_b)} = sign\,(l_e - l_b)$, откуда на первом временном интервале

$$sign\, Q_j = sign\, M_j(l_b)(l_e - l_b). \tag{18}$$

На последнем интервале Q_j, очевидно, будет:

$$sign\, Q_j = -sign\, M_j(l_b)(l_e - l_b). \tag{19}$$

2. Поскольку левая часть системы дифференциальных уравнений (9) известна, в том числе для j-го и i-го уравнений, соответствующих определяющим ограничениям на первом и последнем временных интервалах, а также известны правые части этих уравнений — значения суставных сил Q_j^1 и Q_i^m на этих временных интервалах, то в принципе возможно:

— осуществить «прямое» интегрирование j-го уравнения системы (9) на первом интервале от $t = t_b$ до момента $t = t^1_{ñì}$ смены j-го определяющего ограничения на другое k-е , продолжить интегрирование на 2-м интервале уже k-го уравнения на 2-м интервале от $t^1_{ñì}$ до $t^2{}_{ñì}$ и т.д. вплоть до последнего интервала, на котором l достигает значения $l = l_e$; в результате этого будут найдены процессы $l(t)$, $\dot{l}(t)$ на интервале от $t = t_b$ до некоторого $t = \hat{t}$ для заданных начальных условий $l(t_b) = l_b$, $\dot{l}(t_b) = 0$;

— осуществить "обратное" интегрирование i-го уравнения системы (9) на последнем интервале от τ_e до момента $\tau = \tau^1_{ñì}$ смены i-го определяющего ограничения на другое s-е, продолжить обратное интегрирование на этом следующем интервале уже s-го уравнения и т.д. вплоть до интервала, на котором l достигает значения $l = l_b$; в результате будут найдены процессы $l(\tau)$, $\dot{l}(\tau)$ на интервале от $\tau = \tau_e$ до некоторого $\tau = \hat{\tau}$ для заданных начальных условий $l(\tau_e) = l_e$, $\dot{l}(\tau_e) = 0$.

После интегрирования уравнений, которое рационально осуществлять численными методами, получаются данные, достаточные для построения процессов изменения во времени $l(t)$, $\dot{l}(t)$ при "прямом" и "обратном" интегрировании, а также для построения фазовых траекторий $\dot{l} = \varphi(l)$.

Процессы $l(t)$, $\dot{l}(t)$, полученные в результате прямого интегрирования, очевидно, будут соответствовать оптимальному процессу на участке от $t = t_b$ до момента переключения суставной силы Q^k_j, соответствующие определяющему ограничению на k-м интервале, как и отрезок фазовой траектории на этом участке.

Процессы $l(t)$, $\dot{l}(t)$, полученные в результате "обратного" интегрирования, будут соответствовать оптимальному процессу на участке от момента конца процесса до предшествующего момента, соответствующего переключению суставной силы Q^k_j, как и отрезок фазовой траектории на этом участке.

Тогда момент времени, соответствующий пересечению фазовых траекторий первого и второго интервалов, который для первого интервала обозначим как t_0, а для второго как τ_0, будет соответствовать искомому моменту переключения управления, а общее время управления будет:

$$\mathrm{T} = (t_0 - t_b) + (\tau_e - \tau_0).$$

В результате этих действий первый этап решения выше сформулированной задачи оптимизации, а именно нахождения оптимального процесса $l(t)$ и соответствующего ему закона $Q_j(t)$, оказывается решенным.

Для решения второго этапа задачи нахождение изменения во времени остальных $(n-1)$ значений суставной силы Q_j можно использовать полученные значения $l(t)$, $\dot{l}(t)$, $\ddot{l}(t)$.

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Подставляя их в левые части $(n-1)$ уравнений (9), исключая j-е и осуществляя вычисления правых частей этих уравнений, можно получить искомые значения суставных сил.

Важно отметить, что в процессе “прямого” и “обратного” интегрирования, помимо проверки точки пересечения фазовых траекторий $\dot{l}=\varphi(l)$, соответствующих результатам прямого и обратного интегрирования, необходимо осуществлять нижеследующие проверки:

— проверку соблюдения $(n-1)$ неравенств $\left|Q_j\right| \leq Q_{j\max}$ (исключение составляет неравенство, соответствующее определяющему ограничению) и в случае нарушения некоторого j-го неравенства необходимо осуществить смену уравнения используемого для интегрирования;

— проверку знака коэффициента $d(x_1)$ интегрируемого уравнения и в случае смены знака при $t=t_s$ изменить в этот момент t_s на противоположный знак Q_j перед продолжением интегрирования.

3. Алгоритм реализации метода формирования минимальной по времени траектории движения манипулятора

Реализация разработанного метода предполагает использование нижеследующего алгоритма формирования закона изменения во времени суставных сил робота $Q_j=Q_j(t)$, $j=1,2,...,n$, который обеспечивает минимальное по времени перемещение его по заданной геометрической траектории.

Данный алгоритм должен иметь две ветви. Первая из них предназначена для адаптации разработанного метода к конкретному манипулятору. Она формирует по известным параметрам манипулятора (массы, моменты инерции, звеньев, положения их центров масс, типы и направления осей суставов и т.д.) уравнения динамики данного конкретного робота, связывающего его суставные силы Q_j, $j=1,2,...,n$, с суставными координатами q_j, $j=1,2,...,n$.

Эта ветвь алгоритма используется однократно, только в случае установки программы в управляющий компьютер конкретного робота. Эта ветвь описана подробно в [8].

Вторая ветвь алгоритма, будучи реализована программно, представляет собой часть транслятора, формирующего управления каждым приводом робота. Входом для этой части транслятора является выход первой его части, которая формирует геометрическую траекторию, обеспечивающую обход препятствий манипулятора, в виде последовательности значений векторов суставных координат $q^1,q^2,...,q^m$.

Эта ветвь включает следующую последовательность операций:

1. Формирование геометрической траектории как непрерывной функции $q=q(l)$ параметра-скаляра l по заданным точкам $q^1,q^2,...,q^m$ геометрической траектории.

2. Формирование системы n дифференциальных уравнений (9), связывающих неизвестный параметр l; оно осуществляется путем замены вектора суставных координат q его выражением $q(l)$ в уравнении динамики манипулятора (7).

3. Определение из n уравнений системы (9) номеров уравнений, подлежащих прямому с момента $t = t_b$ и обратному с момента $t = t_e$ интегрированию. С этой целью осуществляется вычисление значений величин вторых производных параметра l в начальный $\ddot{l}(t_b)$ и конечный $\ddot{l}(t_e)$ моменты времени по выражениям:

$$\ddot{l}(t_b) = \frac{Q_{j\max} - R(l_b)}{M(l_b)}, \quad \ddot{l}(t_e) = \frac{Q_{j\max} - R(l_e)}{M(l_e)}, \ i = 1,2,\ldots,n .$$

Эти значения определяют номера уравнений системы (9), которые должны интегрироваться в прямом (индекс j) и обратном (индекс i) направлениях, соответственно для начальных условий $l(t_b) = l_b$, $\dot{l}(t_b) = 0$ и для конечных условий $l(t_e) = l_e$, $\dot{l}(t_e) = 0$.

4. Определение знаков суставных сил Q_j и Q_i в начальный и конечный моменты времени по формулам (18) и (19) для формирования правых частей j-го и i-го уравнений системы (9).

5. Осуществление прямого и обратного интегрирования на интервалах изменения параметра l от l_b до l_e и от l_e до l_b соответственно. Интегрирование начинается с j-го уравнения (прямое интегрирование) и с i-го уравнения (обратное интегрирование). В процессе интегрирования осуществляются:

— проверка соблюдения $(n-1)$ неравенств $Q_j \le |Q_{j\max}|$ (исключение составляет неравенство, соответствующее определяющему ограничению), и в случае нарушения некоторого i-го неравенства необходимо осуществить смену уравнения для интегрирования;

— проверка знака коэффициента $M(l) = d^{-1}(x_1)$ и в случае смены знака в некоторый момент t_s изменение на противоположный знака Q_j.

В результате интегрирования строится:

— прямая и обратная ветви фазовых траекторий $\dot{l} = \varphi(l)$,

— «прямой» и «обратный» переходные процессы $l = f_1(t)$, $\dot{l} = f_2(t)$,

— запоминаются моменты $\hat{t}$ смены определяющих ограничений и индексов j, соответствующих их номерам,

— формируются зависимости от времени $Q_j = F(t)$ суставных координат, не достигших определяющих ограничений.

4. Заключение

В результате проведенного в статье анализа был разработан теоретический подход, реализующий задачи формирования программной траектории робота-манипулятора как функции времени. Он обеспечивает перемещение манипулятора по параметрической кривой, заданной в виде функции $q = f(l)$ скалярного аргумента «геометрической» траектории, из начального в конечное положение за минимальное время при соблюдении ограничении на величины суставных сил, развиваемых приводами робота.

Эта задача в работе была сведена к нахождению минимального по времени процесса изменения некоторой переменной l, связанной системой из n не-

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

линейных дифференциальных уравнений второго порядка при соблюдении двусторонних ограничений на правые части этих уравнений, которые являются управлениями. Начальные и конечные значения l также заданы.

Найденный численный метод решения задачи предполагает использование достаточно простого алгоритма, описанного в работе, основанного на интегрировании нелинейного дифференциального уравнения в прямом, т.е. от $t = t_b$ до $t = t_e$ и обратном от $t = t_e$ до $t = t_b$ направлениях.

Последнее возможно, т.к. $l(t_e)$ не является особой точкой фазовой плоскости.

Метод корректен для широкого класса задач, хотя и имеет ограничения. Они состоят в предположении, что исходное нелинейное дифференциальное уравнение (9) таково, что, будучи линеаризированным в любой точке фазового пространства $(l, \dot{l})$ имеет вещественные корни.

Следует отметить, что эти ограничения не существенны и не сужают применяемость метода.

Литература

1. *Dlabka M., Held J., Zhang Y.* A Practical approach for planning and realization of optimal trajectories for industrial robots // Proc. of the IFAC Intern. Symposium on Robot Control. Karlsruhe, FRG, 1988. P. 517–522.
2. *Duelen G., Munch H., Surdilovic D.* Advanced robot control systems // The Int. Conf. on Manufacturing Systems and Environment, Looking Toward the 21st Century. Japan Society of Mechanical Engineers, Tokyo, May 29 - June 1, 1990.
3. *Игнатьев М. Б., Покровский А. М.* Алгоритмы управления роботами-манипуляторами. Л.: Машиностроение, 1972. 247 с.
4. *Khatib O*. Commande dynamique dans l’espace operationnel des robots manipulateurs en presence d’obstacles // *Docteur Ingenieur Thesis, L’Ecole Nationale Superieure de l’Aeronautique et de l’Espace*, Toulouse, France, 1980.
5. *Кулаков Ф. М.* Организация супервизорного управления роботами-манипуляторами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. N 5. С. 37–46.
6. *Кулаков Ф. М.* Организация супервизорного управления роботами-манипуляторами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. N 6. С. 78–90.
7. *Кулаков Ф. М.* Организация супервизорного управления роботами-манипуляторами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1977. N 1. С. 51–66.
8. *Сольницев Р. И., Кононюк А. Е., Кулаков Ф. М.* Автоматизация проектирования ГПС. Л.: Машиностроение, 1990. 415 с.