# ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ИНДЕКСНОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ИММУННОЙ СЕТИ

Л. А. Соколова

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178

<lucy@sokolova.fsnet.co.uk>

УДК 004.8

*Соколова Л. А.* **Оптимизация параметров индексной формальной иммунной сети** // Труды СПИИРАН. Вып. 4. — СПб.: Наука, 2007.

**Аннотация.** *В статье предложена структура индексной формальной иммунной сети, введено понятие индекса риска, поставлена и решена задача оптимизации параметров индекса в смысле среднеквадратического критерия качества.* — Библ. 10 назв.

UDC 004.8

*Sokolova L. A.* **Optimization of Index Parameters of a Formal Immune Network** // SPIIRAS Proceedings. Issue 4. — SPb.: Nauka, 2007.

**Abstract.** *This article proposed an index structure for a formal immune network. It introduced a new notation of risk index, set the objective of optimizing index parameters in terms of mean square performance criterion, which was then solved.* — Bibl. 10 items.

## 1. Введение

Иммунокомпьютинг (ИК) представляет собой новое направление информатики, базирующееся на принципах обработки информации молекулами белков и иммунными сетями [1–8]. В качестве основного принципа используется принцип свободного связывания базовых элементов ИК (*формальные протеины*) в рамках *формальной иммунной сети* (ФИС). В [3–8] введено понятие индекса сложной многомерной системы, индексной формальной иммунной сети (ИФИС), разработаны и исследованы математические модели и базовый вычислительный алгоритм иммунокомпьютинга, позволяющие проецировать исходные данные образа в пространство ИФИС и там решать задачи обучения, распознавания образов, классификации и класстеризации. Приведены [9–10] результаты сравнительного анализа эффективности вычислений на основе подходов интеллектуальных вычислительных технологий (нейрокомпьютинг и генетические алгоритмы) и иммунокомпьютинга.

Ниже представлены результаты решения задачи оптимизации параметров индексной ФИС.

## 2. Базовый алгоритм вычисления индекса

Известно, что базовый алгоритм иммунокомпьютинга (ИК-алгоритм) отображает любой образ в формальное пространство формальной иммунной сети [1, 3–4]. При этом любой образ может рассматриваться как частный случай формального протеина и его распознавание основывается на энергии связи с антителом формального протеина.

Пусть состояние многомерной системы характеризуется вектором индикаторов $\mathbf{X} = [x_1, ..., x_n]$. Пусть имеется набор из $m$ векторов $\mathbf{X}_k$, $k = 1, \dots, m$, с известными значениями индикаторов. Базовый алгоритм вычисления индекса данной системы состоит из следующих шагов:

Шаг 1. По исходным данным формируется матрица $\mathbf{A} = [\mathbf{X}_1 \ldots \mathbf{X}_m]^T$ размерности $m \times n$, где $m$ — количество объектов, которые соответствуют строкам матрицы, а $n$ — количество параметров (индикаторов), которые соответствуют столбцам матрицы.

Шаг 2. Методом сингулярного разложения матрицы $\mathbf{A}$ вычисляется $k$-й правый сингулярный вектор $\mathbf{V}_k = [v_1, \ldots, v_n]_k$, который соответствует $k$-му сингулярному числу матрицы $s_k$.

Шаг 3. Для любого входного (распознаваемого) вектора $\mathbf{Z}$ размерности $n \times 1$ вычисляется его энергия связи с вектором $\mathbf{V}_k = [v_1, \ldots, v_n]_k$:

$$w_k(\mathbf{Z}) = \frac{1}{s_k} \mathbf{Z}^T \mathbf{V}_k. \tag{1}$$

Шаг 4. Искомое значение индекса вычисляется по следующей формуле:

$$I_k(\mathbf{Z}) = c_0 + c_1 w_k. \tag{2}$$

Далее проанализированы математические свойства вышеприведенного алгоритма.

***Утверждение 1.*** Если входной вектор совпадает со строкой матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{Z}^T = \mathbf{A}_i$, $i = 1, \ldots, m$, то *энергия связи* в точности совпадает с соответствующей компонентой левого сингулярного вектора $\mathbf{U}_k = [u_1, \ldots, u_m]_k$:

$$w_k(\mathbf{A}_i) = u_{ki}. \tag{3}$$

*Доказательство.* Воспользуемся свойством сингулярного вектора

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_k = s_k \mathbf{U}_k \tag{4}$$

и умножим обе части соотношения (4) справа на $\mathbf{V}_k^T$:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T = s_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^T.$$

Учитывая условие ортогональности сингулярных векторов, получим:

$$\mathbf{A} = s_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^T. \tag{5}$$

Из (5) для $\mathbf{Z}^T = \mathbf{A}_i$, $i = 1, \ldots, m$ имеем:

$$\mathbf{A}_i = s_k u_{ki} \mathbf{V}_k^T. \tag{6}$$

Подставив (6) в выражение для энергии связи (1), получим:

$$w_k(\mathbf{Z}) = \frac{1}{s_k} s_k u_{ki} \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k = u_{ki}. \tag{7}$$

что подтверждает справедливость (3). ♦



Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

В формуле (2) в качестве параметров обучения выступают значения коэффициентов индекса $c_0$, $c_1$ и номер $k$ правого сингулярного вектора.

В следующем подразделе представлены результаты параметрической оптимизации данных величин.

## 2.2. Определение оптимальных коэффициентов индекса

Значения коэффициентов $c_0$ и $c_1$ индекса $I_k(\mathbf{Z})$, а также номер $k$ правого сингулярного вектора в уравнении (2) могут определяться двумя способами:

1) экспериментально (на основе экспертных оценок) в соответствии с особенностью приложения;
2) на основе строгих математических методов, как решение задачи параметрической оптимизации вектора значений индекса.

Рассмотрим решение задачи параметрической оптимизации вектора значений индекса на основе среднеквадратического критерия качества.

Пусть имеется матрица $\mathbf{M} = [w_{kj}]$ размерности $(p \times m)$, где $k = 1, ..., p$ и $p$ — количество сингулярных векторов, используемых для расчета индекса, а $j = 1, ..., m$ … и $m$ — количество обучающих векторов. При этом значения элементов данной матрицы вычисляются по формуле (1) базового алгоритма для обучающих векторов.

Представим задачу в следующем векторно-матричном виде:

$$\mathbf{MC} = \mathbf{B}, \tag{8}$$

где $\mathbf{C}$ — вектор коэффициентов индекса размерности $m \times 1$:

$$\mathbf{C} = [c_{m-1}, ..., c_1, c_0]^T;$$

вектор $\mathbf{B}$ — вектор размерности $(p \times 1)$, компонентами которого являются вычисленные значения индекса для обучающей выборки:

$$\mathbf{B} = [b_1,.....,b_p]^T.$$

Рассмотрим сингулярное разложение матрицы $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \sigma_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{R}_1^T + ... + \sigma_r \mathbf{L}_r \mathbf{R}_r^T. \tag{9}$$

Определим матрицу $\mathbf{M}^+$ следующим образом:

$$\mathbf{M}^+ = \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{R}_1 \mathbf{L}_1^T + ... + \frac{1}{\sigma_r} \mathbf{R}_r \mathbf{L}_r^T. \tag{10}$$

***Утверждение 2***. Справедливо следующее условие:

$$\mathbf{MM}^+\mathbf{M} = \mathbf{M}. \tag{11}$$

*Доказательство.* Используя выражения (9, 10) в левой части соотношения (11), получим:

$$\mathbf{MM}^+\mathbf{M} = \left(\sigma_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{R}_1^T + ... + \sigma_r \mathbf{L}_r \mathbf{R}_r^T\right) \times \left(\frac{1}{\sigma_1} \mathbf{R}_1 \mathbf{L}_1^T + ... + \frac{1}{\sigma_r} \mathbf{R}_r \mathbf{L}_r^T\right) \times \left(\sigma_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{R}_1^T + ... + \sigma_r \mathbf{L}_r \mathbf{R}_r^T\right) = \left(\sigma_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{R}_1^T + ... + \sigma_r \mathbf{L}_r \mathbf{R}_r^T\right). \tag{12}$$

Как видно из полученного равенства (12), условие (11) выполняется. ♦

***Утверждение 3.*** Матрица $\mathbf{M}^{+}$ определяет решение уравнения (8) в следующем виде:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{+}\mathbf{B}. \tag{13}$$

*Доказательство.* Умножим обе части уравнения (8) слева на матрицу $\mathbf{M}^{+}$:

$$\mathbf{M}^{+}\mathbf{M}\mathbf{C} = \mathbf{M}^{+}\mathbf{B}. \tag{14}$$

Умножим обе части полученного уравнения (14) слева на матрицу $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^{+}\mathbf{M}\mathbf{C} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{+}\mathbf{B}. \tag{15}$$

Учитывая в левой части (15) условие (11), получаем:

$$\mathbf{M}\left(\mathbf{C} - \mathbf{M}^{+}\mathbf{B}\right) = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор размерности $(p \times 1)$.

Так как исходная матрица тождественно не равна нулю, получаем решение (13). ♦

***Утверждение 4.*** Формула (13) дает решение уравнения (8) в смысле минимума среднеквадратической ошибки:

$$Q = (\mathbf{M}\mathbf{C} - \mathbf{B})^{T}(\mathbf{M}\mathbf{C} - \mathbf{B}). \tag{16}$$

*Доказательство.* Для доказательства определим в явном виде вектор коэффициентов $\mathbf{C}$ таким образом, чтобы минимизировать квадратичный критерий качества (16):

$$Q = \mathbf{C}^{T}\mathbf{M}^{T}\mathbf{M}\mathbf{C} - 2\mathbf{C}^{T}\mathbf{M}^{T}\mathbf{B} + \mathbf{B}^{T}\mathbf{B}. \tag{17}$$

Возьмем производную от $Q$ по $C$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dQ}{dC} = 2\mathbf{M}^{T}\mathbf{M}\mathbf{C} - 2\mathbf{M}^{T}\mathbf{B} = 0. \tag{18}$$

Из полученной системы алгебраических уравнений (18) определим вектор коэффициентов $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{M}^{T}\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^{T}\mathbf{B}. \tag{19}$$

Получим выражение для правой части (19) через компоненты сингулярного разложения.

Транспонированная матрица $\mathbf{M}^{T}$ для (9) имеет следующий вид:

$$\mathbf{M}^{T} = \sigma_1\mathbf{R}_1\mathbf{L}_1^{T} + \ldots + \sigma_r\mathbf{R}_r\mathbf{L}_r^{T}. \tag{20}$$

Сформируем произведение $\mathbf{M}^{T}\mathbf{M}$, используя соотношения (9, 20):

$$\mathbf{M}^{T}\mathbf{M} = \sigma_1^{2}\mathbf{R}_1\mathbf{L}_1^{T}\mathbf{L}_1\mathbf{R}_1^{T} + \ldots + \sigma_1\sigma_r\mathbf{R}_1\mathbf{L}_1^{T}\mathbf{L}_r\mathbf{R}_r^{T}. \tag{21}$$

С учетом соотношений (9, 20) и условий ортогональности для правых и левых сингулярных векторов получим:

$$\mathbf{M}^{T}\mathbf{M} = \sigma_1^{2}\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^{T} + \ldots + \sigma_r^{2}\mathbf{R}_r\mathbf{R}_r^{T}. \tag{22}$$

Так как матрица (22) симметричная, то обратная матрица представляется в следующем виде:

$$\left(\mathbf{M}^T\mathbf{M}\right)^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2}\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^T + \ldots + \frac{1}{\sigma_r^2}\mathbf{R}_r\mathbf{R}_r^T. \qquad (23)$$

Сравнивая (23) с (10), получаем:

$$\mathbf{M}^+ = \left(\mathbf{M}^T\mathbf{M}\right)^{-1}\mathbf{M}^T, \qquad (24)$$

что и требовалось доказать.♦

Как известно, матрица $\mathbf{M}^+$ (24) размерности $n \times m$ при $n \geq m$ называется псевдообратной матрицей (Мура–Пенроуза) для матрицы $\mathbf{M}$. Если $n < m$, то матрица $\mathbf{M}^+ = \mathbf{M}^T\left(\mathbf{M}\mathbf{M}^T\right)^{-1}$. При $m = n = \mathrm{rank}(\mathbf{M})$ псевдообратная матрица в точности является обратной матрицей $\mathbf{M}^+ = \mathbf{M}^{-1}$.

Используя свойства сингулярного разложения (10), нетрудно проверить, что матрица $\mathbf{M}^+$ удовлетворяет следующим четырем условиям Мура–Пенроуза:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\mathbf{M}^+\mathbf{M} = \mathbf{M}, \qquad &&\mathbf{M}^+\mathbf{M}\mathbf{M}^+ = \mathbf{M}^+, \\ &\left(\mathbf{M}\mathbf{M}^+\right)^T = \mathbf{M}\mathbf{M}^+, \qquad &&\left(\mathbf{M}^+\mathbf{M}\right)^T = \mathbf{M}^+\mathbf{M}. \end{aligned} \qquad (25)$$

Важным свойством представления $\mathbf{M}^+$ в виде (10) является то, что задача определения оптимальных коэффициентов индекса $\mathbf{C}$ решается на основе сингулярного разложения матрицы $\mathbf{M}$ (9), которое выполняется теми же процедурами базового алгоритма вычисления индекса.

Если в (10) подставить (13), то получим в явном виде выражение для оптимального вектора коэффициентов индекса $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \left(\frac{1}{\sigma_1}\mathbf{R}_1\mathbf{L}_1^T + \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{R}_2\mathbf{L}_2^T + \ldots + \frac{1}{\sigma_r}\mathbf{R}_r\mathbf{L}_r^T\right)\mathbf{B}. \qquad (26)$$

Как было отмечено выше, элементами матрицы $\mathbf{M}$ являются вычисленные значения энергии связи $\mathbf{M} = \left[w_{kj}, k = 1,\ldots,p, \quad j = 1,\ldots,m\right]$, которые зависят от выбираемых правых сингулярных векторов $\mathbf{V}_k, k = 1,\ldots,p$. Ниже представлены выражения в аналитической форме для оптимального вектора значений индекса при использовании в матрице $\mathbf{M}$ одного выбранного правого сингулярного вектора для следующих случаев:

– одномерный линейный: элементы матрицы $\mathbf{M}$ линейно зависят от вычисленных значений энергии связи $w_{kj}$;

– одномерный нелинейный: элементы матрицы $\mathbf{M}$ полиномиально зависят от вычисленных значений энергии связи.

## 2.3. Одномерный линейный случай

Для этого случая обучающая система уравнений (2) имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
c_1 w_1 + c_0 &= b_1,\\
c_1 w_2 + c_0 &= b_2,\\
&\dots\\
c_1 w_m + c_0 &= b_m.
\end{aligned} \tag{27}
$$

В векторно-матричном представлении этой системы (8) матрица $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$, где матрица $\mathbf{M}_1$ размерности $(m \times 2)$ и вектор коэффициентов индекса $\mathbf{C}_1$ размерности $(2 \times 1)$ имеют следующий вид:

$$
\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} w_1 & 1 \\ w_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ w_m & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}. \tag{28}
$$

***Утверждение 5.*** Для одномерного линейного случая оптимальные коэффициенты индекса определяются аналитически и имеют следующий вид:

$$
c_1 = \frac{1}{d}\Big( \big( m w_1 - q \big) b_1 + \dots + \big( m w_m - q \big) b_m \Big), \tag{29}
$$

$$
c_0 = \frac{1}{d}\Big( \big( p - q w_1 \big) b_1 + \dots + \big( p - q w_m \big) b_m \Big), \tag{30}
$$

где

$$
p = w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_m^2, \quad q = w_1 + w_2 + \dots + w_m, \quad d = mp - q^2. \tag{31}
$$

*Доказательство.* Матрица $\mathbf{M}_1^T$ размерности $(2 \times m)$ и произведение матриц $\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1$ размерности $(2 \times 2)$ равны:

$$
\mathbf{M}_1^T = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{32}
$$

$$
\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 & 1 \\ w_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ w_m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & m \end{bmatrix}. \tag{33}
$$

Согласно (24), псевдообратная матрица $\mathbf{M}_1^+$ равна

$$
\mathbf{M}_1^+ = \left( \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 \right)^{-1} \mathbf{M}_1^T = \frac{1}{\left( mp - q^2 \right)} \begin{bmatrix} m & -q \\ -q & p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{34}
$$


Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\mathbf{M}_1^+ = \begin{bmatrix} \dfrac{mw_1 - q}{mp - q^2} & \cdots & \dfrac{mw_m - q}{mp - q^2} \\ \dfrac{p - qw_1}{mp - q^2} & \cdots & \dfrac{p - qw_m}{mp - q^2} \end{bmatrix}.$$

Вектор оптимальных коэффициентов индекса через псевдообратную матрицу $\mathbf{M}_1^+$ (34) в векторно-матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}_1^+\mathbf{B}, \tag{35}$$

или в покомпонентной записи:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(mw_1 - q)b_1 + \ldots + (mw_m - q)b_m}{d} \\ \dfrac{(p - qw_1)b_1 + \ldots + (p - qw_m)b_m}{d} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Приравнивая соответствующие компоненты в правой и левой частях (36), получим (29, 30).♦

Полученное аналитическое решение (20, 30) уравнения (8) для матрицы $\mathbf{M}_1$ вида (28) позволяет определить случай, когда эти уравнения не имеют решения, т.е. при $d = 0$.

Используя введенные обозначения (31) в уравнении

$$mp - q^2 = 0, \tag{37}$$

получим:

$$m(w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_m^2) - (w_1 + w_2 + \ldots + w_m)^2 = 0. \tag{38}$$

Рассмотрим частные случаи (38) при различных значениях $m$:

$m = 2$:

$$2(w_1^2 + w_2^2) - (w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2) = (w_1 - w_2)^2 = 0.$$

Условие $d = 0$ выполняется при $w_1 = w_2$.

$m = 3$:

$$3(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (w_1 + w_2 + w_3)^2 = (w_1 - w_2)^2 + (w_1 - w_3)^2 + (w_2 - w_3)^2. \tag{39}$$

Как видно, в правой части (39) стоит сумма положительных слагаемых. Она равна нулю при равенстве нулю всех слагаемых, т.е. при $w_1 = w_2 = w_3$.

Для случая (38) получим, что

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1, \\ i>j}}^{m} (w_i - w_j)^2 = 0, \tag{40}$$

которое выполняется при $w_i = w_j, \quad i, j = 1, \ldots, m$.

Таким образом, задача определения оптимальных коэффициентов индекса для одномерного линейного случая не имеет решения при равенстве всех энергий связи на обучающей выборке.


Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

## 2.4. Одномерный нелинейный случай

В рассматриваемом случае обучающая система уравнений (2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &c_{m-1}w_1^{m-1}+c_{m-2}w_1^{m-2}+\ldots+c_1w_1+c_0=b_1,\\ &c_{m-1}w_2^{m-1}+c_{m-2}w_2^{m-2}+\ldots+c_1w_2+c_0=b_2,\\ &\qquad\qquad\qquad\ldots\\ &c_{m-1}w_m^{m-1}+c_{m-2}w_m^{m-2}+\ldots+c_1w_m+c_0=b_m, \end{aligned} \tag{41}$$

или матрица $\mathbf{M}=\mathbf{M}_2$, где матрица $\mathbf{M}_2$ $(m\times m)$ и вектор коэффициентов индекса $\mathbf{C}_2$ $(m\times 1)$ представляются:

$$M_2=\begin{bmatrix} w_1^{m-1} & w_1^{m-2} & \ldots & w_1 & 1\\ w_2^{m-1} & w_2^{m-2} & \ldots & w_2 & 1\\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots\\ w_m^{m-1} & w_m^{m-2} & \ldots & w_m & 1 \end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix} c_{m-1}\\ c_{m-2}\\ \ldots\\ c_1\\ c_0 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Как видно, матрица $\mathbf{M}_2=\mathbf{M}_V$ является матрицей Вандермонда, определитель которой равен

$$\det(\mathbf{M}_V)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{\substack{j=1\\ i>j}}^{m}(w_i-w_j) \tag{43}$$

Отсюда следует, что матрица $\mathbf{M}_2$ невырожденная в том и только в том случае, когда все энергии связи $w_1,\ldots,w_m$ различны.

Положим, что все энергии связи $w_1,\ldots,w_m$ различны, т.е. $\det(\mathbf{M}_2)\neq 0$.

***Утверждение 6.*** Для одномерного нелинейного случая оптимальные коэффициенты индекса при $m\leq 3$ в аналитическом виде имеют следующий вид:

$$c_2=\frac{1}{d_2}\left[b_1(w_2-w_3)-b_2(w_1-w_3)+b_3(w_1-w_2)\right], \tag{44}$$

$$c_1=\frac{1}{d_2}\left[-b_1(w_2+w_3)(w_2-w_3)+b_2(w_1+w_3)(w_1-w_3)-b_3(w_1+w_2)(w_1-w_2)\right], \tag{45}$$

$$c_0=\frac{1}{d_2}\left[b_1w_2w_3(w_2-w_3)-b_2w_1w_3(w_1-w_3)+b_3w_1w_2(w_1-w_2)\right], \tag{46}$$

где

$$d_2=(w_1-w_2)(w_1-w_3)(w_2-w_3). \tag{47}$$

*Доказательство.* С помощью матрицы Вандермонда $\mathbf{M}_2$ задача интерполяции решается следующим образом.

$$p(w)=c_{m-1}w^{m-1}+c_{m-2}w^{m-2}+\ldots+c_1w+c_0\,. \tag{48}$$


Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 4. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 4. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

найти многочлен степени не выше $m-1$, удовлетворяющий соотношениям (41) с использованием элементарных лагранжевых интерполяционных многочленов

$$L_i(w)=\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(w-w_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(w_i-w_j)},\quad i=1,2,\dots,m. \tag{49}$$

Каждый многочлен $L_i(w)$ имеет степень $m-1$ и обладает тем свойством, что $L_i(w_k)=0$, если $k\neq i$, и $L_i(w_i)=1$.

Для случая $m=3$

$$p(w)=b_1L_1(w)+b_2L_2(w)+b_3L_3(w), \tag{50}$$

где элементарные лагранжевы интерполяционные многочлены $L_i(w)$, $i=1,2,3$ соответственно равны:

$$L_1(w)=\frac{(w-w_2)(w-w_3)}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}, \tag{52}$$

$$L_2(w)=\frac{(w-w_1)(w-w_3)}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)}, \tag{53}$$

$$L_3(w)=\frac{(w-w_1)(w-w_2)}{(w_3-w_1)(w_3-w_2)}. \tag{54}$$

Подставляя (53–55) в правую часть уравнения (52), получим:

$$\begin{aligned} p(w)&=b_1\frac{(w-w_2)(w-w_3)}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}+b_2\frac{(w-w_1)(w-w_3)}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)}+b_3\frac{(w-w_1)(w-w_2)}{(w_3-w_1)(w_3-w_2)}=\\ &=c_0+c_1w+c_2w^2. \end{aligned} \tag{55}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной $w$ в правой и левой частях (55), получим (44–46).

Приведенные результаты решения задачи оптимизации параметров индексной формальной иммунной сети были использованы при решении ряда важных прикладных задач: при формировании индексов, позволяющих оценивать и прогнозировать опасные состояния компьютерных, военно-прикладных и экологоландшафтных систем на основе обработки информации по их мониторингу [2–8].

## Литература


[1]. *Tarakanov A. O., Skormin V. A., Sokolova S. P.* Immunocomputing: Principles and Application. New York: Springer, 2003. 208 p.

[2]. *Варнавских Е. А., Кравченко Ю. В., Соколова Л. А.* Возможности применения иммунокомпьютинга в прикладных задачах военной педагогики и психологии // Морской сборник. 2005. № 8. С. 41–43.

[3]. *Соколова Л. А.* Комплексная оценка многомерных систем методами иммунокомпьютинга. Автореф. на соискание учен. ст. канд. техн. наук. СПб., 2005.

[4]. *Sokolova L. A.* Index design by Immunocomputing// Lecture Notes in Computer Science. Vol. 2787. Berlin: Springer, 2003. P. 120–127.

[5]. *Sokolova S. P., Sokolova L. A.* Immunocomputing for complex interval objects // Conference Proceedings of the 1-st International Conference on Artificial Immune Systems, University of Kent at Canterbury, 2002, UK. P. 222–230.

[6]. *Соколова Л. А.* Индекс риска чумы на основе иммунокомпьютинга // *Труды СПИИРАН* (под ред. Р. М. Юсупова). СПб.: СПИИРАН, 2003. Вып.1. т. 3. С. 137–141.

[7]. *Варнавских Е. А., Кравченко Ю. В., Соколова Л. А.* Интегральные коэффициенты подросткового кризиса. Проблемы педагогики высшей и средней школы. Сборник трудов молодых ученых /Под ред. Т.Б.Гребенюк, С.М.Конюшенко. Калининград: КГУ, 2004. Вып.1. С. 71–80.

[8]. *Кравченко Ю. В., Соколова Л. А.* Индексы подросткового кризиса в рамках информационно-психологической безопасности. Актуальные проблемы современной психологии // Ученые записки / Под ред. А.Г. Маклакова. СПб.: ЛГУ, 2005. Вып. 2. С. 135–142.

[9]. *Tarakanov A. O., Tarakanov Yu. A.* A Comparison of immune and genetic algorithm for two real-life tasks of pattern recognition // International Journal of Unconventional Computing. 2005. Vol. 1(4). P. 357–374.