ЛОКАЛЬНЫЙ АПРИОРНЫИ ВЫВОД В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ: КОМПЛЕКС ОСНОВНЫХ АЛГОРИТМОВ

А. В. СИРОТКИН, А. Л. ТУЛУПЬЕВ

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178

<avs@iias.spb.su>, <alt@iias.spb.su>

УДК 004.8

Сироткин А. В., Тулупьев А. Л. **Локальный априорный вывод в алгебраических байесовских сетях: комплекс основных алгоритмов** // Труды СПИИРАН. Вып. 5. — СПб.: Наука, 2007.

Аннотация. *Проведение априорного логико-вероятностного вывода является одной из важных операций в работе интеллектуальных систем поддержки принятия решений. Данная статья описывает комплекс алгоритмов локального априорного вывода в рамках парадигмы алгебраических байесовских сетей: алгоритм разбора логических формул и алгоритмы построения задач линейного программирования, соответствующих разным случаям локального априорного вывода.* — Библ. 9 назв.

UDC 004.8

Sirotkin A.V., Tulupyev A. L. **Local a priori Inference in Algebraic Bayesian Network: a Set of Basic Algorithms** // SPIIRAS Proceedings. Issue 5. — SPb.: Nauka, 2007.

Abstract. *A priori inference is a key feature in intellectual decision support systems based on imperfect probabilistic knowledge. The paper describes a set of local a priori inference algorithms in algebraic Bayesian networks.* — Bibl. 9 Items.

1. Введение

Одной из парадигм, применяемых в интеллектуальных системах, является парадигма алгебраических байесовских сетей, предложенная В. И. Городецким в 1983 году [1, 2]. В основе этой парадигмы лежит представление знаний в виде баз фрагментов знаний. В теории алгебраических байесовских сетей (АБС) математической моделью фрагмента знаний (ФЗ) является идеал цепочек конъюнкций (идеал конъюнктов, будет определен далее) с оценками вероятности истинности входящих во фрагмент знаний элементов. Для формализации понятия вероятности истинности пропозициональной формулы используется подход Н. Нильсона [3].

Цель настоящей работы — описать алгоритмы, используемые при проведении локального априорного вывода над ФЗ АБС.

2. Непротиворечивость оценок вероятностей над идеалом конъюнктов

Для дальнейших рассуждений требуется определить объекты, с которыми мы будем работать. Все построения мы будем проводить над конечным числом атомарных переменных x_{-t}. Пусть $A = \{xi\}=1$, тогда назовем множество всех различающихся пропозициональных формул F(A). Говоря «различающиеся формулы», мы имеем ввиду, что тождественные, но графически не совпадающие формулы считаем одной и той же формулой. Литерал (аргументное место)

Xj обозначает, что на данном месте в формуле может стоять либо xj, либо его отрицание Xj.

По теореме о совершенной нормальной дизъюнктивной форме любая пропозициональная формула может быть представлена в виде дизъюнкции конечного числа конъюнкций вида X1X2...X_n (для удобства записи мы будем опускать знаки конъюнкций и называть подобные конъюнкции *квантами).* Так как при любом зафиксированном означивании всех переменных X1, X2, ..., x_n никакие два разных кванта не могут быть одновременно истинны, а, с другой стороны, один из них заведомо истинен, можно рассмотреть множество таких конъюнктов как множество элементарных событий. Задав вероятность на квантах, можно, в свою очередь, построить вероятностное пространство, на котором будет определена вероятность любой пропозициональной формулы. За более подробным описанием аксиоматики вероятностной логики можно обратиться, например, к [4].

Обозначим множество всех квантов через $Q = \{XX\ldots X\^{}_n\}$. Тогда определение вероятности на элементах множества Q потребует следующих ограничений:

$$\mathrm{V}q e\ Q\ \ p(q)>0; \tag{1a}$$

$$\underset{qeQ}{I}\ p(q) = 1. \tag{1б}$$

В алгебраических байесовских сетях мы, в основном, работаем не с квантами, а с конъюнктами (элементами вида $x_{-t}\ x_{i2}\ \ldots x_{ik}$, где 1 < /1 < /2 <… < ik < n, а k < n). В монографии [4] показано, что через вероятности конъюнктов, как и через вероятности квантов можно выразить вероятность любой пропозициональной формулы. Там же приведен конструктивный способ перехода от выражения вероятности истинности пропозициональной формулы через вероятности квантов к выражению через вероятности конъюнктов. При этом ограничения (1) принимают вид:

$$\mathbf{I}n \times \mathbf{Pc},n > \mathbf{0}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{P_C}$ — единый символ, представляющий вектор, состоящий из вероятностей конъюнктов, идущих в *определенном* порядке, n — количество атомов, а матрица $\mathbf{I_N}$ — матрица перехода от вероятностей квантов к вероятностям конъюнктов. Порядок следования конъюнктов и описание матрицы $\mathbf{I_N}$ можно найти в [4]. Знак неравенства при векторах следует трактовать как поэлементное неравенство.

3. Алгоритм разбора формул

В процессе проведения локального логико-вероятностного вывода одним из ключевых шагов является выражение вероятности произвольной пропозициональной формулы через вероятности базисных формул (в случае АБС — через вероятности квантов). Для такого выражения, требуется приведение формулы к каноническому виду, в нашем случае — к СДНФ.

Исходно формула может быть задана в одной из следующих форм: 1) в виде таблицы истинностей; 2) в виде строки, содержащей формулу, состоящую из переменных, допустимых операций и дополнительных символов (таких как скобки).

В первом случае мы уже имеем необходимые для нас сведения, так как означивания переменных, при которых формула истинна, однозначно определяют кванты, через вероятность которых выражается вероятность истинности формул. Во втором случае требуется предварительно преобразовать формулу к табличному виду. Для этого удобнее всего произвести разбор формулы, представить ее в виде дерева операций и по построенному дереву вычислить значение формулы для каждого означивания переменных. Это позволит построить представление формулы в СДНФ, так как СДНФ состоит в точности из дизъюнкции квантов, таких, что при соответствующем этому кванту означивании формула становится истинна.

Разбор строки с формулой мы будем производить на основе алгоритма Бауэра и Замельсона [5]. Для этого нам потребуется два стека — стек операций и стек, хранящий вершины деревьев подфомул. Назовем эти стеки T и E соответственно.

Алгоритм работает корректно без дополнительных проверок, если формат входной строки подчиняется следующим требованиям. Мы полагаем, что формула состоит из однозначно определяемых элементов. Каждый из элементов может быть:

1) переменной;
2) открывающей скобкой;
3) закрывающей скобкой;
4) знаком операции.

Кроме этого, мы предполагаем, что никакие две переменные не стоят рядом, а разделены, по крайней мере, одним знаком операции. Нам потребуется также определить приоритеты операций. Мы определяем их следующим образом: импликация имеет наименьший приоритет — 1; дизъюнкция — 2; конъюнкция, «исключающее или» — 3; «отрицание» — 4. Этот список легко может быть дополнен в зависимости от потребностей. Кроме того, мы определим нечисленный «приоритет» для открывающей и закрывающей скобок — «(» и «)» соответственно; а для пустой операции — «$».

В процессе разбора выражений нам потребуются следующие функции:

- F1 — поместить символ операции из исходной строки в стек T;
- F2 — извлечь из стека T операцию, извлечь из стека E один или два элемента в зависимости от арности операции, сформировать новый узел, поместить полученный результат в стек E, записать текущую операцию в стек T;
- F3 — исключить символ из стека T;
- F4 — извлечь из стека T операцию, извлечь из стека E один или два элемента в зависимости от арности операции, сформировать новый узел, поместить полученный результат в стек E, совершить операцию по таблице 1;
- F5 — вывести сообщение об ошибке, закончить разбор;
- F6 — закончить разбор.

При невозможности выполнить операцию F2 или F4 из-за отсутствия в стеке E необходимого числа аргументов алгоритм прерывает работу и сообщает об ошибке.

Схема алгоритма для разбора выражения приведена на рис. 1.

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 5. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Таблица 1

Выбор действия «парсера» в зависимости от операций ($ —пустая операция)

		Приоритет операции из входной строки						
		$	(	1	2	3	4	)
Приоритет операции на вершине стека Т	$	F6	F1	F1	F1	F1	F1	F5
	(	F5	F1	F1	F1	F1	F1	F3
	1	F4	F1	F2	F1	F1	F1	F4
	2	F4	F1	F4	F2	F1	F1	F4
	3	F4	F1	F4	F4	F2	F1	F4
	4	F4	F1	F4	F4	F4	F2	F4

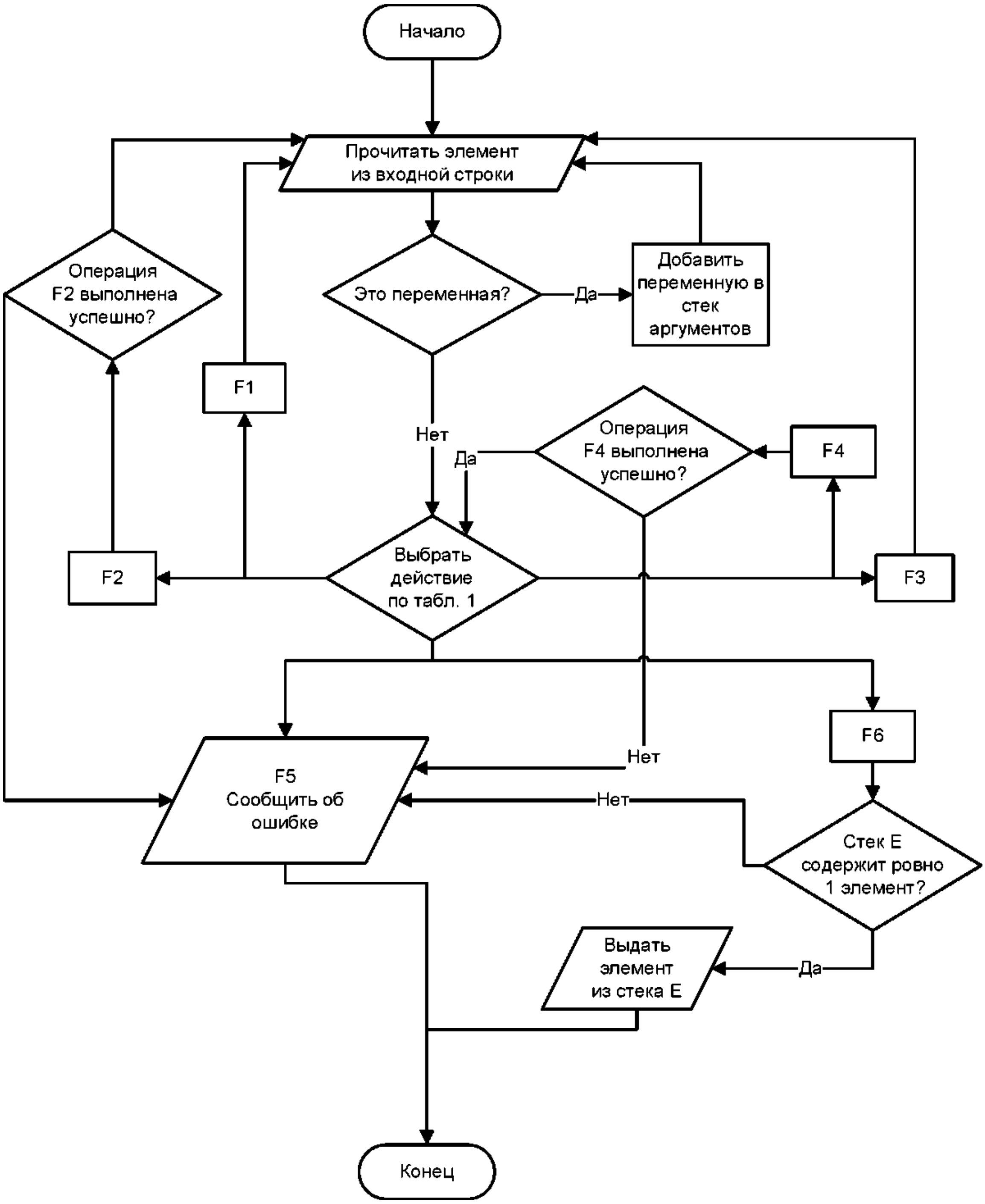

Рис. 1. Блок-схема алгоритма Бауэра-Замельсона для разбора выражения.

Если разбираемая формула была корректна, то алгоритм успешно завершит работу; стек E будет содержать ровно один элемент, который будет соответствовать вершине дерева операций исходной формулы. В противном случае алгоритм выдаст сообщение об ошибке.

Имея дерево операций, легко вычислить значение формулы при каждом означивании или построить те означивания, при которых формула истинна, — что, в свою очередь, позволит получить СДНФ-представление формулы.

4. Общая схема проведения локального априорного вывода

Теперь, когда у нас описан алгоритм разбора формул, можно перейти непосредственно к проведению априорного вывода. Как уже говорилось выше, суть априорного вывода сводится к получению оценок вероятности истинности одного набора пропозициональных формул на основе оценок другого набора пропозициональных формул. В контексте ФЗ АБС можно выделить следующие 3 подвида задачи априорного вывода:

- *первый вид* — дан некий набор исходных формул с оценками, требуется оценить вероятности истинности элементов ФЗ, построенного над всеми входящими в набор атомами;
- *второй вид* — дан ФЗ, с оценками истинности, требуется оценить формулу, не входящую в ФЗ;
- *третий вид* — дан произвольный набор формул с оценками, требуется оценить формулу, не входящую во фрагмент знаний.

Очевидно, что третий вид априорного вывода включает в себя второй, но так как ФЗ в теории АБС является важной структурной единицей, такой случай стоит рассматривать отдельно. Мы не будем останавливаться на вопросах поддержания непротиворечивости фрагментов знаний (сведения об этом можно найти в [4]), а сразу перейдем к априорному выводу.

Начнем рассмотрение со второго вида. Пусть задан непротиворечивый ФЗ с оценками истинности. Тогда мы имеем ограничения вида: $\mathbf{P^-} < \mathbf{P_C} < \mathbf{P+}$, где $\mathbf{P_C}$ — вектор вероятностей конъюнктов, входящих в ФЗ, а $\mathbf{P^-}$ и $\mathbf{P+}$ — векторы, состоящие из соответствующих нижних и верхних оценок.

Рассмотрим пропозициональную формулу *f*, вероятность истинности которой требуется оценить. Обозначим через $\mathbf{L}f$ вектор, содержащий 2^{n} элементов, каждый из которых является единицей или нулем, в зависимости от того, входит или не входит соответствующий по номеру квант в СДНФ формулы *f*. Для построения такого вектора воспользуемся алгоритмом, приведенным в предыдущем разделе для разбора формулы, и вычислим значения формулы *f* при каждом означивании. Вероятность формулы *f* можно выразить формулой $p(f) = (\mathbf{L},\mathbf{Pq})$, где $\mathbf{Pq}$ — вектор вероятностей квантов. Для перехода к вероятностям конъюнктов воспользуемся уже применявшейся выше формулой $\mathbf{Pq}_n = \boldsymbol{I_n} \, \boldsymbol{x}\mathbf{P_{CN}}$ и получим:

$$p(f) = (\mathbf{L},\mathbf{L_N} \times \mathbf{Pc}) = \mathbf{L}^7 \times (\mathbf{L_N} \times \mathbf{Pc}) = (\mathbf{L}^7 \times \mathbf{L_N}) \times \mathbf{Pc} = (\mathbf{L_N}^7 \times \mathbf{L},\mathbf{Pc}).$$

Таким образом, мы выразили вероятность произвольной формулы через вероятности конъюнктов. Теперь сведем вместе всю информацию, которая у нас есть, и построим задачу линейного программирования (ЗЛП).

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 5. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Переменными нашей ЗЛП будут элементы вектора $\mathbf{P_C}$. Ограничениями будут неравенства $\mathbf{P^-} < \mathbf{P_C} < \mathbf{P+}$, заданные ФЗ, и неравенства $\mathbf{I_N} \times \mathbf{P_{C\,N}} > \mathbf{0}$, заданные аксиоматикой теории вероятностей. Целевая функция описывается $p(f) = (\mathbf{I_N}^\mathbf{T} \times \mathbf{L}, \mathbf{P_C})$. Найдем максимум и минимум целевой функции — это и будут искомые оценки вероятности формулы *f*. Если же построенная ЗЛП не будет иметь решения, то это означает, что исходный набор оценок был противоречив.

Рассмотрим теперь ситуацию, описанную в первом пункте. Оценка элементов ФЗ может стать важным шагом при переходе от локального априорного вывода к глобальному [6]. Как и прежде нам потребуется решать ЗЛП.

Рассмотрим исходный набор формул $\{f\ \}^k=1$. На нем определены оценки истинности вида $p\sim(f) < p(f-) < p+(f)$. Как было описано в предыдущем случае, можно выразить вероятность формулы через вероятность конъюнктов: $p(fj) = (\mathbf{I_N}^\mathbf{T} \times \mathbf{L}f.\ , \mathbf{P_C})$. Построим ограничения для серии ЗЛП. Можно пойти двумя путями: 1) переменными наших ЗЛП будут вероятности конъюнктов; 1) переменными наших ЗЛП будут вероятности квантов.

В первом случае ограничения примут вид:

$$p\text{-}f) < (\mathbf{In}^\mathbf{T} \times \boldsymbol{L}f.\ , \mathbf{Pc}) < p^+(fi) \qquad 1 < i < k,$$

$$^In \ ^x\, \mathbf{^Pc},n > {}^\mathbf{0},$$

а целевыми функциями станут сами переменные $\mathbf{P_C}$, каждая в своей задаче.

Во втором случае ограничения примут вид:

$$p\sim(f;\ ) < (\mathbf{L}f.\ \mathbf{Pq}) < p+f\ ) \quad 1 < i < k$$

$$\mathbf{Pq} > \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{Pq}, \mathbf{1n}) = 1,$$

где $\mathbf{1_N}$ — вектор, состоящий из 2^n единиц), а целевыми функциями будут функции вида $(\mathbf{J_N}^\mathbf{T} \times (8j), \mathbf{Pq})$, где $\mathbf{J_N}$ — матрица обратная матрице $\mathbf{I_N}$, и $(8j)$ — вектор состоящий из 2^n элементов, с единицей на *i* -том месте и с нулями — на всех остальных.

Несмотря на то, что решив указанные задачи, мы получим оценки вероятности истинности конъюнктов, следует отметить, что если оценки будут интервальными, то этот процесс будет, в общем случае, необратим, и по оценкам ФЗ нельзя будет однозначно восстановить оценки исходных формул, как это можно было бы сделать, если бы все полученные оценки были бы точечными.

Последняя изучаемая задача — переход от оценок произвольного набора формул к оценке произвольной формулы. Как и в двух предыдущих случаях нам потребуется построить и решить ЗЛП. Эту задачу тоже можно построить, выразив все вероятности истинности, фигурирующие в условиях формул, либо через вероятности конъюнктов, либо через вероятности квантов.

В первом случае ограничения примут вид:

$$p\sim(f;\ ) < (\mathbf{In}^\mathbf{T} \times Lf.\ , \mathbf{Pc}) < p^+(f\text{-}) \quad 1 < i < k,$$

$$^In \ ^x\, \mathbf{^Pc},n > {}^\mathbf{0},$$

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 5. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

а целевой функцией будет

$$p(f) = (\mathbf{Ln}^7 \times \mathbf{L,Pc}).$$

Во втором случае ограничения примут вид:

$$p{\sim}(fi) < (\mathbf{L}f.,\mathbf{Pq}) < p^{+}(fi) \qquad 1 < i < k,$$

$$\mathbf{Pq} * \mathbf{0} ,$$

$$(\mathbf{Pq,1n}) = 1,$$

а целевой функцией будет

$$p(f) = (\mathbf{L,Pq}).$$

Найдя соответствующие максимум и минимум целевой функции, мы получим искомые оценки.

5. Формирование семантически эквивалентного образа направленного БСД-цикла для локального априорного вывода

Направленный цикл (рис. 2) в байесовской сети доверия (БСД) является в первую очередь направленным графом. Этот граф состоит из узлов, в которых расположено по одному бинарному литералу, и ребер, соединяющих узлы так, что все они входят в один направленный цикл (далее — направленный БСД-цикл или просто — БСД-цикл). Кроме того, каждому узлу приписаны тензоры условных вероятностей. Речь идет о вероятностях литерала принять то или иное истинностное означивание в зависимости от означивания литерала в узле-родителе.

До сих пор не предложено БСД-исчисления [7], в котором можно было бы обработать направленный БСД-цикл. Цель раздела — преобразовать совокупность тензоров условных вероятностей, задающих БСД-цикл, в набор маргинальных вероятностей, который можно обрабатывать с помощью алгоритмов локального логико-вероятностного вывода.

До определенного момента мы будем следовать соглашениям в области обозначений из [8]. Затем воспользуемся новым определением величины r_t, что позволит нам упростить ряд расчетных формул.

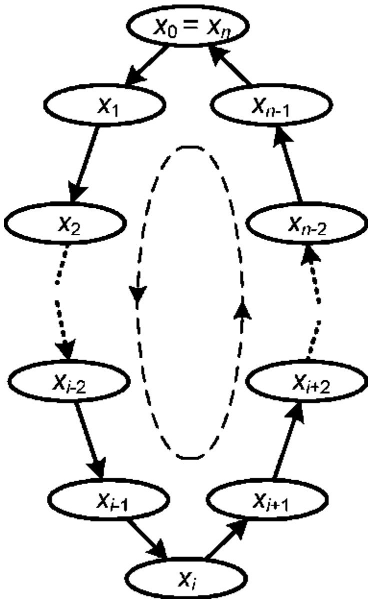

Рис 2. БСД-цикл (направленный).

Литералы, стоящие в узлах, обозначим х, (х,- может принимать значения х, и х,), где i е $\{1,...,n\}$, а n — число узлов в цикле. На узлы цикла будем ссылаться либо с помощью указания соответствующего литерала X, либо (особенно на рисунках) с помощью указания на связанный с ним атом Xj.

Тензор условных вероятностей, стоящий в узле, имеет вид p(Xj | XXj), где индекс j предшествует i. Как правило, $j = i$ -1, но для i = 1 предшествующим

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 5. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

индексом будет $j = n$. Для удобства будем считать $j = n$ и $j = 0$ одним и тем же значением индекса, что влечет, например, совпадение $x_0 = x_n$. Более того, поскольку цикл замыкается, удобно рассматривать индексы (номера) узлов, которые больше n; будем считать, что они ссылаются на тот узел, «исходный» номер которого совпадает с остатком от целого деления индекса на n.

Тензор условных вероятностей $p(X\backslash \mid Xj)$ состоит из четырех величин: $p(Xj \mid Xj)$ и $p(Xj \mid Xj)$, $p(Xj \mid Xj)$ и $p(Xj \mid Xj)$. Набор указанных четырех значений однозначно определяется всего двумя величинами $p(X_i \mid Xj)$ и $p(X_i \mid Xj)$, поскольку имеют место соотношения вероятностей: $p(Xj \mid Xj) = 1 - p(Xj \mid Xj)$ и $p(Xj \mid Xj) = 1 - p(Xj \mid Xj)$.

Для использования в дальнейшем определим величины r_i как разность условных вероятностей

$$r\text{-} = P(Xi \mid Xj) - p(Xj \mid Xj).$$

Начиная с определения именно этой величины дальнейшее изложение расходится с [8]. В указанном источнике // определялась с противоположным знаком

$$r = p(Xj \mid Xj) - p(Xj \mid Xj).$$

По формуле полной вероятности мы можем рассчитать вероятность истинности $p(Xj)$ атома X_i, если знаем вероятность истинности $p(Xj)$ атома Xj из предыдущего узла: $p(x,) = p(x, \mid Xj)p(Xj) + p(x, \mid Xj)p(Xj)$, или что то же:

$$p(Xj) = p(X/ \mid Xj)p(Xj) + p(Xj \mid Xj)(1 - p(Xj)),$$

$$p(X/) = p(X/1\ Xj)p(Xj) + p(X/1\ Xj) - p(Xj)p(X/1\ Xj),$$

$$p(Xj) = (p(X/ \mid Xj) - p(X/ \mid Xj))p(Xj) + p(X/ \mid Xj),$$

$$p(X/) = r,p(Xj) + p(X/ \mid Xj).$$

Определив величину $p(x,)$, можно аналогичным образом вычислить $p(x,+_1)$, а затем $p(x,+_2)$, $p(x,+_3)$ и так далее, пока цикл не замкнется на $p(Xj_{-1})$. Зная величину $p(Xj_{-1}) = p(Xj)$, по определению условной вероятности можно рассчитать маргинальные вероятности конъюнкции атомов из смежных узлов:

$$p(XjX/) = p(X/ \mid Xj)p(Xj).$$

При известных вероятностях $p(Xj)$, $p(x,)$ и $p(XjX,)$ по формуле включений-исключений можно рассчитать вероятность любого означивания конъюнкции литералов из смежных узлов $p(X\hat{}X,)$:

$$p(XjX/) = p(Xj) - p(XjX/),$$

$$p(XjX,) = p(X,) - p(XjX,),$$

$$p(XjXj) = 1 - p(Xj) - p(X,) + p(XjX,).$$

Таким образом, если бы стала известна маргинальная вероятность хотя бы одного атома из узла цикла, мы смогли бы восстановить все остальные маргинальные вероятности вида $p(Xj)$, $p(X\text{-}_S X\backslash)$ и вообще $p(XjX,)$.

Пусть

$$p(Xq) = n\ . \tag{3}$$

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 5. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Тогда согласно формулам, приведенным выше, через неизвестную п можно выразить последовательно маргинальные вероятности атомов р(Xj) - $p,$ (п). Величину неизвестной п можно будет определить, решив уравнение

$$П - P_п (П). \qquad (4)$$

Узнав численное значение п, можно будет в свою очередь вычислить численные значения интересующих нас маргинальных вероятностей вида р(Xj), р($XjXi$) и вообще р($XjXj$). Если же уравнение относительно п не будет иметь решения, то тогда исходные данные придется признать противоречивыми.

Введем еще несколько обозначений для встречающихся в процессе расчетов величин, исследуем их особенности.

П РЕДЛОЖЕНИЕ 1.

В предположении, что a_0 -1, b_0 - 0, существует набор таких a_t и b, е R, 0 < i < $п$, что справедлив следующий ряд соотношений

$$р_1(п) - a_1п + b_1, \qquad (5.1)$$

$$(п) - a,п + Ь,, \qquad (5.2)$$

$$Pп (п) - aпп + bп . \qquad (5.3)$$

Доказательство. Выполняется методом индукции и аналогично приведенному в [8] с учетом замены знака величины fj.

СЛЕДСТВИЕ 1.1.

$$1 \qquad (6.1)$$

$$a ^- Г \quad -1 \qquad (6.2)$$

$$a \quad r \cdot -1 \quad ^Г2 \cdot \wedge \qquad (6.3)$$

$$^a n \; - \; ^r n \; 'n\text{-}1 \quad \cdot ^Г2 \cdot 1 \qquad (6.4)$$

Заметим, что формула (6.3) упростилась по сравнению аналогичной формулой из [8] — исчез множитель, отвечающий за перемену знака.

СЛЕДСТВИЕ 1.2.

$$b - P(X11X0), \qquad (7.1)$$

$$b - rb\text{-}1 + P(X; \mid x,\text{-}1), \qquad (7.2)$$

$$b - \sum_{k-1}^{k-i} \left| P(x_k \mid x_{k-1}) \prod_{d-k+1}^{d-i} Ъ \right| \qquad (7.3)$$

$$bn - \sum_{k-1}^{k-n} \left| P(x_k \mid x_{k-1}) \prod_{d-k+1}^{d-n} rd \right| \qquad (7.4)$$

Доказательства обоих следствий опираются на метод математической индукции.

Уравнение (4) теперь можно преобразовать следующим образом:

$$aп\,п + bп - п, \qquad п - aп\,п - bп,$$

$$(1 - aп)п\text{-}\; bп, \qquad (1 - r/2 \ldots r_n)п\text{-}\; bп.$$

Если (1 - a_n) Ф 0, уравнение будет иметь единственное решение

$$п \quad \frac{b}{1 - a_n} \quad \frac{b}{1 - r_1 r_2 \ldots r_n}$$

которое можно распространить по циклу и получить численные значения искомых вероятностей. Если коэффициент и свободный член оба равны нулю, то п может принимать любое значение; но, учитывая, что п — это вероятность, возможные значения могут лежать только в промежутке [0;1].

Исследуем особенности $(1 - r_1 r_2 \ldots r_n)$ — коэффициента, образовавшегося перед п.

Если все r = 1, то тогда все $p(x_t \mid XJ) = 0$, а значит и $b_n = 0$. В этом случае уравнение (4) имеет бесконечно много решений пе [0;1].

Если все |r,| = 1, и отрицательные r_t встречаются нечетное число раз, то тогда уравнение (4) имеет единственное решение п = .

Если хотя бы раз |r,| < 1, то уравнение (4) имеет единственное решение.

Если все |r| = 1, и отрицательные r встречаются четное число раз, то тогда при более глубоком анализе обнаруживается, что $b_n = 0$ (доказывается методом математической индукции и анализом поведения (7.3) при перемене знака в последовательности r) и уравнение (4) имеет бесконечно много решений пе[0;1].

Пусть

$$\mathbf{P}n \quad \Gamma \ п \ \hat{} = C \ p(Xq) \ J \quad 1 - rcj \quad [1 - p(XQ)^{J}, \tag{8.1}$$

$$\mathbf{P}, \quad \Gamma \ P i(п) \ \hat{} = C \ p(Xi) \ \bullet_J \quad 1 - P,(п) J \quad [1 - P(X;)^{j} \tag{8.2}$$

$$\mathbf{W}, = \frac{CP(Xj \mid X:) P(Xj \mid X:)\hat{}}{P(Xj \mid Xj) \ p(X, \mid Xj_J) J} \tag{8.3}$$

П Р Е Д Л О Ж Е Н И Е 2.

При введенных обозначениях уравнение (4) эквивалентно векторно-матричному уравнению

$$\mathbf{W} \times \mathbf{W}_{n-1} \quad \mathbf{W} \times \mathbf{W}_0 \times \mathbf{P}_0 \tag{9}$$

Согласно (9), вектор $\mathbf{P}_q$ должен являться собственным вектором произведения матриц $\mathbf{W_N} \times \mathbf{W_{N-1}} \times \ldots \times \mathbf{W_1} \times \mathbf{W}_q$, причем ему должно соответствовать собственное число X = 1.

Заметим, что матрицы **W,** являются стохастическими, их произведение, следовательно, тоже, а вектор $\mathbf{P}_q$ — вектор вероятностей (т.е. его компоненты неотрицательны и в сумме дают единицу).

Кроме того, можно предложить итеративный процесс для вычисления последовательных приближений вектора $\mathbf{P}_q$. Пусть изначально задан произвольный вероятностный вектор $\mathbf{P_0}^{(0)}$, а произведение матриц обозначено как $\mathbf{W} = \mathbf{W_N} \times \mathbf{W_{N-1}} \times \ldots \times \mathbf{W}j \times \mathbf{W}_q$. Тогда будем вычислять члены последовательности векторов $\mathbf{P}Q^{k)}$, где $k > 1$, по рекуррентной формуле

$$\mathbf{P}Q^{k)} = \mathbf{w} : \bullet P(k-1) \tag{10}$$

Такая последовательность векторов $\mathbf{P}_0^{(k)}$ будет сходиться к искомому $\mathbf{P}_0$; хотя тут и требуется сделать некоторые оговорки. Более подробно о стохастических матрицах и вероятностных векторах можно узнать в [9].

Наконец, для вычисления $\mathbf{P}_0$ можно воспользоваться адаптированным к новым обозначениям процессом распространения сообщений, описанном в [8]. Вкратце, процесс сводится к следующей последовательности шагов.

Пусть сообщение имеет векторный вид:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_i = \begin{pmatrix}a_i\\b_i\end{pmatrix}$$

Сообщение $\mathbf{M}_j$ поступает в узел x_j; а в начале работы алгоритма генерируется сообщение $\mathbf{M}_0$ и считается, что оно отправлено из узла $x_0 = x_n$. В уравнениях преобразования сообщения-вектора участвует матрица $\mathbf{R}_i$ и вектор $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix}r_i & 0\\0 & r_i\end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix}0\\p(x_i \mid x_j)\end{pmatrix}.$$

Поступившее сообщение $\mathbf{M}_j$ индуцирует новое, исходящее сообщение $\mathbf{M}_i$ с помощью преобразования $\mathbf{M}_i = \mathbf{R}_i\mathbf{M}_j + \mathbf{v}_i$. Сообщение $\mathbf{M}_i$ пересылается дальше в узел-ребенок.

Процесс останавливается, когда сообщение поступает в узел, с которого началась рассылка сообщений. Заметим, что процесс рассылки обязательно остановится, поскольку число узлов в цикле конечно. В расчетах при обработке сообщений внутри узлов особых ситуаций, связанных с некорректными арифметическими операциями, возникнуть не должно, поскольку используются лишь операции сложения, вычитания и умножения, а операция деления — нет. Распространение сообщений $\mathbf{M}_i$ назовем *первой фазой* алгоритма.

После того как сообщение поступило в узел $x_0 = x_n$, из которого ушло начальное сообщение, формируется уравнение (4), производится его анализ, и в случае существования единственного решения определяется величина п. Она отправляется как вероятность $p(x_0)$ (или, что то же, как величина $p(x_n)$) из узла $x_0 = x_n$ в следующий узел.

Когда в узел x_j поступает сообщение с вероятностью $p(x_j)$, вычисляются вероятности $p(x_j x_i) = p(x_i \mid x_j)p(x_j)$ и $p(x_i) = r_i p(x_j) + p(x_i \mid x_j)$. Если узел еще не отправлял сообщение с вероятностью своего атома, рассчитанная вероятность $p(x_i)$ передается как сообщение узлу-сыну. Поскольку цикл конечный, то алгоритм распространения сообщений завершит свою работу. Распространение вероятностей $p(x_i)$ назовем *второй фазой* алгоритма.

Какой бы путь мы ни избрали бы, он приведет к вычислению изначально искомых маргинальных вероятностей вида $p(x_j)$, $p(x_s x_l)$. Эти вероятности могут быть рассмотрены как исходные данные для различных видов локального априорного логико-вероятностного вывода в алгебраических байесовских сетях.

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 5. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

6. Вывод

Мы описали два ключевых момента в процессе проведения локального априорного вывода — это разбор и подготовка для дальнейшей работы формул и, непосредственно, построение задач линейного программирования, соответствующих различным видам локального априорного вывода.

Одним из возможных источников данных для локального логико-вероятностного вывода в алгебраических байесовских сетях является направленный цикл в байесовской сети доверия. Его невозможно [7] обработать в рамках существующего БСД-исчисления, однако такой цикл может быть преобразован в совокупность объектов из теории АБС [4], алгоритмы обработки которых известны [8] и снабжены в данной работе описанием, позволяющим перейти к программной реализации.

Приведенную в статье модель локального априорного вывода можно применить для произвольного набора пропозициональных формул, однако в таком случае сложность вычислений может оказаться слишком большой. Для уменьшения сложности вычислений можно построить такую алгебраическую байесовскую сеть, что каждая из интересующих нас формул будет задана над одним ФЗ этой сети, а дальше воспользоваться методами, описанными в статье, и методами работы непосредственно с АБС [4, 6].

Литература

1. *Городецкий В. И.* Байесовский вывод. Препринт №149. Л.: ЛИИАН, 1991. 38 с.
2. *Городецкий В. И.* Алгебраические байесовские сети — новая парадигма экспертных систем // Юбилейный сборник трудов институтов Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН. Т. 2. М.: РАН, 1993. С. 120-141.
3. *Nilsson N. J.* Probabilistic Logic // Artificial Intelligence. 1986. Vol. 47. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1986. P. 71-87.
4. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2QQ6. 6Q7 с.
5. *Ахо А., Ульман Дж.* Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции (Том 1. Синтаксический анализ). М.:Мир, 1998. 612 с
6. *Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод. СПб.:Анатолия. 2QQ7. 4Q с.
7. *Jensen F. V.* Bayesian Networks and Decision Graphs. NY.: Springer-Verlag, 2QQ1. 268 p.
8. *Тулупьев А. Л., Абрамян А. К.* Логико-вероятностный вывод в направленном БСД-цикле // Труды СПИИРАН. 2QQ7. Вып. 4. СПб.: Наука, 2QQ7. С. 87-118.
9. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, Гл. редакция физико-математической литературы, 1969. 368 с.

Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2007. Issue 5. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru