МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО КОРРЕКТИРУЮЩЕГО ОПЕРАТОРА РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. И. Миронов[1], Ю. В. Миронов[2]

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178

[1]<ipi@iias.spb.ru>, [2]<mironuv@yandex.ru>

УДК 629.191
Миронов В. И., Миронов Ю. В. **Метод приближенного корректирующего оператора решения краевых задач и нелинейных уравнений** // Труды СПИИРАН. Вып. 7. — СПб.: Наука, 2008.
Аннотация. *Рассматривается итерационный метод решения нелинейных краевых задач и уравнений, основанный на использовании приближенных алгоритмов.* — Библ. 9 назв.

UDC 629.191
Mironov V. I., Mironov Y. V. **Method of the approached correcting operator of the decision of boundary problems and the nonlinear equations** // SPIIRAS Proceedings. Issue 7. — SPb.: Nauka, 2008.
Abstract. *One considers the iterative method of the decision of nonlinear boundary problems and the equations, based on use of the approached algorithms.* — Bibl. 9 items.

1. Введение

При решении многих задач, возникающих в различных областях науки и техники, часто приходится применять методы решения соответствующих краевых задач и нелинейных уравнений. Такая необходимость, в частности, возникает при синтезе высокоэффективных алгоритмов управления подвижными объектами, а также при идентификации и оценивании их динамического состояния. Эти обстоятельства объясняют то внимание, которое уделяется совершенствованию существующих и разработке новых методов решения краевых задач и нелинейных уравнений.

К настоящему времени разработано большое число различных универсальных методов решения таких задач. Они широко освещены в литературе и, в частности, в работах [1, 3, 6–9]. Вместе с тем, в различных областях знаний получены приближенные решения многих упрощенных модельных задач, имеющие ограниченное применение. Так, например, в динамике полета космических аппаратов получено множество аналитических и упрощенных численных алгоритмов решения задач маневрирования в различных модельных гравитационных полях: однородном, линеаризованном, однородном центральном, квази-ньютоновском и ньютоновском.

Обычно эти алгоритмы используются для определения начального приближения при решении более сложных задач. Однако они могут быть также использованы в качестве базовых элементов при конструировании алгоритмов численного решения усложненных задач. Некоторые вопросы синтеза алгоритмов такого рода рассматривались в работах авторов [4, 5] применительно к задачам управления и навигации космических аппаратов.

В данной работе рассматривается конструктивный метод решения краевых задач и нелинейных уравнений – метод приближенного корректирующего оператора (ПКО), который позволяет использовать возможные упрощенные алгоритмы приближенного расчета в схеме численного поиска точного решения полной задачи. Такой подход расширяет конструктивный базис синтеза быстродействующих алгоритмов решения указанных краевых задач и нелинейных уравнений.

2. Постановка краевой задачи

Пусть поведение объекта описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{q},t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \in [t_0,T], \tag{1}$$

где $\bar{x}$ — n-мерный вектор фазового состояния;

$\bar{q}$ — m-мерный вектор управляющих параметров.

Требуется найти такой вектор $\bar{q}$, который переводит управляемый объект из исходного состояния $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ на траекторию требуемого движения, обеспечивающую в заданный момент времени T достижение заданных граничных условий $\bar{p}_T = \bar{p}[\bar{x}(T)]$. Будем считать, что вектор $\bar{p}_T$ имеет размерность m и $m \le n$. Предполагается, что функции $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{q},t)$ и $\bar{p}[\bar{x}(T)]$ определены в некоторых заданных областях изменения аргументов, непрерывны и обладают необходимой степенью гладкости, так что обеспечивается существование и единственность решения рассматриваемой задачи.

3. Метод приближенного корректирующего оператора

Предположим, что нам известен точный нелинейный оператор связи A между вектором начального состояния объекта $\bar{x}_0$, вектором управляющих параметров $\bar{q}$ и состоянием объекта в конечный момент времени $\bar{p}[\bar{x}(T)]$. Оператор A задается процедурой интегрирования соответствующей системы дифференциальных уравнений. Тогда требуемое значение вектора $\bar{q}$, обеспечивающее достижение заданной терминальной точки $\bar{p}_T$, будет удовлетворять уравнению

$$\bar{p}_T = A(\bar{x}_0,\bar{q},T). \tag{2}$$

Допустим далее, что известен приближенный оператор A_1, устанавливающий приближенную связь между векторами $\bar{x}_0$, $\bar{p}_T$ и $\bar{q}$:

$$\bar{p}_T = A_1(\bar{x}_0,\bar{q},T). \tag{3}$$

Будем также считать, что для приближенного оператора A_1 известен обратный оператор A_1^{-1} по вектору параметров управления $\bar{q}$. В практической ситуации оператор A_1 может формироваться либо путем приближенного учета физических факторов, определяющих движение объекта, либо посредством формального упрощения точного оператора интегрирования A, либо комбинацией этих приемов.

Используя приближенный оператор A_1, запишем уравнение (2) в следующей эквивалентной форме:

$$\bar{p}_T = A(\bar{q}) + \Delta A(\bar{q}), \tag{4}$$

где

$$\Delta A(\bar{q}) = A(\bar{q}) - A_1(\bar{q}), \tag{5}$$

или

$$A_1(\bar{q}) = \bar{p}_T - \Delta A(\bar{q}). \tag{6}$$

Подвергнем левую и правую части равенства (6) операторному преобразованию A_1^{-1}. Тогда будем иметь

$$\bar{q} = A_1^{-1}[\bar{p}_T - \Delta A(\bar{q})]. \tag{7}$$

Для решения этого нелинейного операторного уравнения применим метод последовательных приближений. В результате получим итерационный процесс

$$\bar{q}^{(k+1)} = A_1^{-1}[\bar{p}_T - \Delta A(\bar{q}^{(k)})], \qquad k = 0,1,2,\ldots. \tag{8}$$

Значение вектора $\bar{q}$ в первом приближении находим из уравнения (8) при $\Delta A(\bar{q}^{(0)}) \equiv 0$, так что

$$\bar{q}^{(1)} = A_1^{-1}[\bar{p}_T]. \tag{9}$$

Это соответствует решению приближенного уравнения (3).

Согласно (8) на каждом шаге решения задачи необходимо вычислять значение разностного оператора $\Delta A(\bar{q}^{(k)})$. Получим более эффективный в вычислительном отношении итерационный процесс, в котором исключается необходимость определения этого оператора.

Рассмотрим несколько итераций. Согласно общей схеме расчета величина $\bar{q}$ в первом приближении находится из условия

$$\bar{p}_T = A_1(\bar{q}^{(1)}), \tag{10}$$

так что

$$\bar{q}^{(1)} = A_1^{-1}[\bar{p}_T].$$

На втором шаге величина $\bar{q}^{(2)}$ находится из условия

$$\bar{p}_T = A_1(\bar{q}^{(2)}) + A(\bar{q}^{(1)}) - A_1(\bar{q}^{(1)}).$$

Учитывая (10), получаем уравнение:

$$2\bar{p}_T = A(\bar{q}^{(2)}) + A(\bar{q}^{(1)}), \tag{11}$$

что дает

$$\bar{q}^{(2)} = A_1^{-1}[2\bar{p}_T - A(\bar{q}^{(1)})],$$

или

$$\bar{q}^{(2)} = A_1^{-1}[\bar{p}_T - \bar{\Delta}^{(1)}],$$

где

$$\bar{\Delta}^{(1)} = A(\bar{q}^{(1)}) - \bar{p}_T.$$

На третьем шаге величина $\bar{q}^{(3)}$ находится из условия

$$\bar{p}_T = A_1(\bar{q}^{(3)}) + A(\bar{q}^{(2)}) - A_1(\bar{q}^{(2)}). \tag{12}$$

Однако из (11) следует, что

$$A(\bar{q}^{(2)}) = 2\bar{p}_T - A(\bar{q}^{(1)}). \tag{13}$$

Тогда после подстановки (13) в (12), находим:

$$\bar{p}_T = A_1(\bar{q}^{(3)}) + \bar{\Delta}^{(1)} + \bar{\Delta}^{(2)}, \tag{14}$$

где

$$\bar{\Delta}^{(2)} = A(\bar{q}^{(2)}) - \bar{p}_T.$$

Из (14) следует, что

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\bar{q}^{(3)} = A_1^{-1}[\bar{p}_T - \bar{\Delta}^{(1)} - \bar{\Delta}^{(2)}].$$

Продолжая этот процесс, приходим к следующей вычислительной схеме:

$$\bar{q}^{(k+1)} = A_1^{-1}[\bar{p}_T - \sum_{i=1}^{k} \bar{\Delta}^{(i)}], \qquad k = 1,2,\dots, \tag{15}$$

где

$$\bar{\Delta}^{(i)} = A(\bar{q}^{(i)}) - \bar{p}_T,$$

или

$$\bar{\Delta}^{(i)} = \bar{p}(\bar{q}^{(i)}, \bar{x}_0, T) - \bar{p}_T, \tag{16}$$

где

$$\bar{p}(\bar{q}^{(i)}, \bar{x}_0, T) \equiv A(\bar{q}^{(i)}).$$

Величина $\bar{p}(\bar{q}^{(i)}, \bar{x}_0, T)$ характеризует результат A-отображения точки $(\bar{q}^{(i)}, \bar{x}_0)$ в соответствующее пространство параметров терминального состояния $\bar{p}^{(i)}(T)$. Для динамических объектов эта операция представляет собой интегрирование дифференциальных уравнений движения.

Вычислительный процесс (15) удобно представить в следующем виде:

$$\bar{q}^{(k+1)} = M[\bar{p}_T - \sum_{i=1}^{k} \bar{\Delta}^{(i)}], \qquad k = 1,2,3,\dots, \tag{17}$$

где $M[\bullet] \equiv A_1^{-1}[\bullet]$ — приближенный корректирующий оператор, выражающий алгоритм приближенного решения краевой задачи (2).

Условия сходимости данного метода устанавливаются на основе принципа сжимающих отображений [1, 3].

Заметим, что с точки зрения сходимости вычислительные процессы (8) и (17) полностью эквивалентны. Поэтому при анализе условий сходимости можно исходить из (8). Введем далее функцию

$$\Phi(\bar{q}) = M[\bar{p}_T - \Delta A(\bar{q})], \qquad k = 1,2,3,\dots. \tag{18}$$

Тогда (8) переходит в рекуррентное равенство

$$\bar{q}^{(k+1)} = \Phi(\bar{q}^{(k)}), \qquad k = 1,2,3,\dots, \tag{19}$$

которое определяет метод последовательных приближений для рассматриваемой краевой задачи. Согласно [1], можно утверждать следующее.

Пусть функция $\Phi(\bar{q})$ и замкнутое множество $S \subseteq D(\Phi) \subseteq R_m$ таковы, что

$$\Phi(\bar{q}) \in S \ \forall\ \bar{q} \in S;$$

$$\exists \alpha < 1: \left\| \Phi(\bar{q}) - \Phi(\tilde{\bar{q}}) \right\| \le \alpha \cdot \left\| \bar{q} - \tilde{\bar{q}} \right\| \ \forall\ \bar{q}, \tilde{\bar{q}} \in S.$$

Тогда $\Phi(\bar{q})$ имеет в S единственную неподвижную точку $\bar{q}^*$; последовательность $(\bar{q}^{(k)})$, определяемая (19), при любом $\bar{q}^{(0)} \in S$ сходится к $\bar{q}^*$, и справедливы оценки

$$\left\| \bar{q}^* - \bar{q}^{(k)} \right\| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\| \bar{q}^{(k)} - \bar{q}^{(k-1)} \right\| \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \left\| \bar{q}^{(1)} - \bar{q}^{(0)} \right\| \ \forall\ k \in N.$$

Эти условия можно конкретизировать с учетом структуры $\Phi(\bar{q})$ (18).

Таким образом, вычислительный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии с параметром $\alpha < 1$. Очевидно, что чем ближе приближен-

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ные операторы A_1 и A_1^{-1} к точным операторам A и A^{-1}, тем меньшее значение принимает параметр α и, следовательно, выше скорость сходимости вычислительного процесса.

В целом, рассмотренный метод приближенного корректирующего оператора отличается достаточно высокой экономичностью с вычислительной точки зрения, поскольку значение неизвестного вектора $\bar{q}$ полностью уточняется на каждом итерационном шаге ценой однократного интегрирования дифференциальных уравнений движения объекта.

4. Решение нелинейных уравнений

Рассмотренный выше метод приближенного корректирующего оператора естественным образом распространяется на задачи решения нелинейных уравнений. Согласно этому методу для решения уравнения

$$\bar{\lambda}(\bar{q}) = 0\,, \tag{20}$$

применяется вычислительный процесс

$$\bar{q}_{k+1} = M\left[-\sum_{i=0}^{k}\bar{\lambda}(\bar{q}_i, T)\right]; \qquad k = 1,2,3,\ldots\,. \tag{21}$$

где $M[\bullet]$ — приближенный корректирующий оператор, выражающий алгоритм решения приближенного уравнения

$$\tilde{\bar{\lambda}}(\bar{q}) = 0\,. \tag{22}$$

5. Особенности и варианты применения метода приближенного корректирующего оператора

Выбор приближенных моделей в методе ПКО может быть осуществлен множеством различных способов в конкретной ситуации с учетом специфики исходных зависимостей и условий решаемой задачи. Для этого могут применяться как формальные приемы упрощения исходных моделей, так и методы их аппроксимации.

Во всех случаях необходимо стремиться к тому, чтобы приближенный алгоритм решения задачи был сравнительно простым и обеспечивалась достаточно быстрая сходимость итерационного процесса.

Важной особенностью метода ПКО является то обстоятельство, что на каждой итерации значения $\bar{p}_T(\bar{q})$ и $\bar{\lambda}(\bar{q})$ вычисляются один раз. Таким образом, обеспечивается высокая экономичность вычислений. Ниже это будет показано на примере.

Оператор $M[\bullet]$ может изменяться или уточняться в ходе вычислительного процесса по его текущим результатам на каждой итерации или через несколько итераций. В этом случае можно говорить о комбинированных вариантах использования метода ПКО.

С общих методологических позиций очевидно, что в качестве оператора $M[\bullet]$ могут рассматриваться и операторы различных известных методов численного решения нелинейных уравнений, таких как метод Ньютона, его модификации и другие [1, 3, 6–9].

При линейном представлении $\tilde{\bar{\lambda}}(\bar{q})$ вида

$$\tilde{\bar{\lambda}}(\bar{q}) = A\bar{q} + \bar{b},$$

из (21) следует, что

$$\bar{q}_{k+1} - \bar{q}_k = -M \cdot \bar{\lambda}(\bar{q}_k),$$

или

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k - M \cdot \bar{\lambda}(\bar{q}_k), \tag{23}$$

где

$$M = A^{-1}. \tag{24}$$

Это по форме напоминает модифицированный (упрощенный) метод Ньютона и в частном случае при $M = \left[\dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\bar{q}}\right]^{-1}_{\bar{q}=\bar{q}_0}$ совпадает с ним.

Оператор M может уточняться в ходе итераций по некоторому правилу

$$M_k = M_k(\bar{q}_k, \bar{q}_{k-1}, \ldots, \bar{q}_{k-s}), \tag{25}$$

тогда вычислительный процесс (21) при $s = 1$ принимает вид

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k - M_k(\bar{q}_k) \cdot \bar{\lambda}(\bar{q}_k). \tag{26}$$

В частном случае при $M_k = \left[\dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\bar{q}}\right]^{-1}_{\bar{q}=\bar{q}_k}$ из (26) следует метод Ньютона.

В целом метод ПКО выражает достаточно общую идеологию конструирования алгоритмов решения краевых задач и нелинейных уравнений.

При использовании слишком простых корректирующих операторов M может наблюдаться замедление сходимости вычислительных процессов в окрестности решения. В этом случае целесообразно предусмотреть специальные меры для сокращения числа итераций. Для этого можно применить параметрическую модификацию метода ПКО, либо перейти в ходе итераций к комбинированному использованию метода ПКО с другими методами, например, с одним из методов секущих [1].

Параметрическая модификация метода ПКО может быть представлена в виде

$$\bar{q}^{(k+1)} = M\left[\bar{p}_T - \alpha_k \sum_{i=1}^{k} \bar{\Delta}^{(i)}\right], \qquad k = 1,2,3,\ldots.$$

Рациональным выбором параметров α_k можно добиться ускорения сходимости вычислительного процесса. Возможны различные способы определения этих параметров. Основной из них состоит в решении одномерной задачи минимизации по критерию

$$I = \left\|\bar{\Delta}_{k+1}(\alpha_k)\right\|.$$

Таким образом,

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha_k} I(\alpha_k).$$

Для сокращения числа итераций можно использовать известные методы ускорения сходимости вычислительных процессов, основанные на линейной интерполяции и использовании асимптотических свойств линейно сходящихся последовательностей [1, 3, 8]. Однако эти условия могут нарушаться на средней стадии вычислительного процесса, что может привести к его расходимости.

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

При комбинированном использовании метода ПКО с другими методами более предпочтительным является использование методов, основанных на конечно-разностной аппроксимации матрицы Якоби $\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\bar{q}}$ в методе Ньютона (26) на каждом итерационном шаге, характерной для методов секущих. Различные варианты реализации методов секущих рассмотрены в [1, 7]. В частности, показано, что такие методы обеспечивают сверхлинейную сходимость и имеют порядок по крайней мере $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$. Линейная интерполяция $\bar{\lambda}(\bar{q})$ в R_m может привести к ряду других методов секущих [1, 6].

Проведенный анализ и накопленный опыт решения прикладных задач позволяют рекомендовать для комбинированного использования метода ПКО следующий способ конечно-разностной аппроксимации оператора $M = \left[\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\bar{q}}\right]^{-1}$ на каждом шаге, начиная с некоторой итерации, который применительно к решению уравнения (20) определяется выражением

$$M = \left[\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\bar{q}}\right]^{-1} \approx Q \cdot \Lambda^{-1},$$

где

$$Q = [\Delta\bar{q}_1, \Delta\bar{q}_2, ..., \Delta\bar{q}_m]; \qquad \Lambda = [\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, ..., \bar{\lambda}_m];$$
$$\Delta\bar{q}_i = \bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i .$$

Величины $\Delta\bar{q}_i$ и $\bar{\lambda}_i$, необходимые для проведения вычислений, определяются по результатам первых m итераций согласно основной процедуре метода ПКО (21). При переходе к новой итерации проводится циклический сдвиг элементов матриц Q и Λ, при котором элементы $\Delta\bar{q}_1$ и $\bar{\lambda}_1$ исключаются, все остальные элементы сдвигаются влево на одну позицию, а на место сдвинутых элементов $\Delta\bar{q}_m$ и $\bar{\lambda}_m$ ставятся элементы $\Delta\bar{q}_{m+1}$ и $\bar{\lambda}_{m+1}$.

Для ускорения вычислений можно применить пошаговую аппроксимацию обратных матриц Λ^{-1} на основе метода быстрых обращений Шульца [1, 7].

В заключение отметим, что рассмотренные способы обеспечения сходимости метода ПКО позволяют не только ускорить процессы решения задач при выбранном приближенном корректирующем операторе, но и расширить область практического использования простых операторов.

6. Пример

Рассмотрим особенности применения метода ПКО на примере решения задачи расчета импульсной программы перелета космического аппарата из некоторого исходного состояния, определяемого значениями его фазовых координат $x_0, y_0, z_0, V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0}$ на момент t_0, в требуемое конечное состояние x_T, y_T, z_T за заданное время T.

Будем считать, что полет происходит в нормальном гравитационном поле Земли, учитывающем ее сжатие. Соответствующие уравнения движения в абсолютной геоцентрической экваториальной системе отсчета представим с уче-

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

том [2] в виде, удобном для программирования

$$\dot{x} = V_x; \quad \dot{y} = V_y; \quad \dot{z} = V_z;$$

$$\dot{V}_x = -ax; \quad \dot{V}_y = -ay; \quad \dot{V}_z = (2bc - a)z;$$

где

$$a = b[\alpha_{00} + c(d-1)]; \qquad b = R_0 r^{-3}; \qquad c = 1.5\alpha_{20} R_0^2 r^{-2}; \qquad d = 5z^2 r^{-2};$$

$$J_{20} = -0.001082627; \qquad \alpha_{00} = 62564951 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$\alpha_{20} = -67889.273 \text{ м}^2/\text{с}^2; \qquad R_0 = 6371 \text{ км};$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

В качестве приближенного корректирующего оператора воспользуемся приближенным аналитическим решением этой задачи, соответствующим движению в однородном центральном поле. В этом случае динамика объекта описывается упрощенными уравнениями:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{V}; \qquad \dot{\bar{V}} = -\omega^2 \bar{r},$$

где ω — угловая скорость орбитального движения спутника в начальный момент t_0;

$$\omega = \omega(\bar{x}_0) = \sqrt{\pi_0 r_0^{-3}}; \qquad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Для такой модели рассматриваемая задача импульсного перелета имеет следующее решение.

$$\delta\bar{V} = \omega \frac{\bar{r}_T - \cos\omega T \bar{r}_0 - \omega^{-1} \sin\omega T \cdot \bar{V}_0}{\sin\omega T};$$

$$\delta V = \left(\delta\bar{V}^T \cdot \delta\bar{V}\right)^{1/2};$$

$$\bar{\alpha} = \delta V^{-1} \delta\bar{V},$$

где $\delta\bar{V}$ — вектор требуемого импульса скорости; δV — модуль импульса $\delta\bar{V}$; $\bar{\alpha}$ — вектор направляющих косинусов импульса $\delta\bar{V}$.

Совокупность приведенных соотношений задает приближенный корректирующий оператор $M[\bullet]$. Решение исходной задачи производится в соответствии с процедурой метода ПКО по правилу

$$\bar{q}^{(k+1)} = M[\bar{r}_T - \sum_{i=1}^{k} \Delta\bar{r}^{(i)}(T)], \qquad k = 1,2,\dots,$$

где

$$\bar{q} = [\delta\bar{V}, \delta V, \bar{\alpha}]^T.$$

На каждой итерации производится вычисление невязок $\Delta\bar{r}^{(i)}(T)$ путем однократного интегрирования приведенной выше полной системы дифференциальных уравнений движения объекта в нормальном гравитационном поле. При этом каждый раз изменяются начальные условия интегрирования по значениям элементов вектора скорости $\bar{V}_0^{k+1} = \bar{V}_0 + \delta\bar{V}^k$.

Приведем некоторые результаты численных расчетов. Пусть в исходном состоянии космический аппарат находится на экваториальной круговой орбите с высотой $h = 900$ км и имеет следующие начальные значения фазовых координат:

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$x_0 = 7243 \text{ км}; \quad y_0 = 634 \text{ км}; \quad z_0 = 0; \quad .$$
$$V_{x_0} = -0.645 \text{ км/с}; \quad V_{y_0} = 7.376 \text{ км/с}; \quad V_{z_0} = 0 .$$

Требуется определить импульсную программу перелета, обеспечивающую попадание за время $T = 500$ с в заданную точку с координатами

$$x_T = 5762 \text{ км}; \quad y_T = 4596 \text{ км}; \quad z_T = 0 .$$

Результаты расчета всех элементов импульсной программы управления по итерациям даны в табл. 1.

Таблица 1

Результаты расчета импульсной программы управления по итерациям

Номер итерации	$\delta\rho(T)$	α_x	α_y	δV_x	δV_y	δV
	км	-	-	м/с	м/с	м/с
0	165.446	–0.4317	0.9020	–515	1.075	1.192
1	22.415	–0.6534	0.7570	–848	0.982	1.297
2	2.806	–0.6304	0.7763	–801	0.986	1.270
3	0.348	–0.6333	0.7739	–807	0.986	1.274
4	0.043	–0.6330	0.7742	–806	0.986	1.273

Во второй колонке табл. 1 приведены значения модуля координатного промаха $\delta\rho(T)$ относительно целевой точки по итерациям. Данные таблицы свидетельствуют о хорошей сходимости рассмотренной реализации метода ПКО.

Литература

1. *Вержбицкий В. М.* Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 840 с.
2. Космические траекторные измерения / Под ред. *Агаджанова П. А., Дулевича В. Е., Коростелева А. А.* М.: Сов. радио, 1969. 504 с.
3. *Красносельский М. А.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
4. *Миронов В. И.* Конструктивный метод решения краевых задач управляемого движения // Алгоритмы и программы исследования систем управления. Вып. 6. Л.: ВИКИ им. А. Ф. Можайского, 1980. С. 70–74.
5. *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный вариант метода максимального правдоподобия в задачах статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем. СПб.: СПИИРАН, 2002. 70 с.
6. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 560 с.
7. *Островский А. М.* Решение уравнений и систем уравнений. М.: ИЛ, 1963. 383 с.
8. *Трауб Д. Ф., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983. 382 с.
9. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.