

# ПАКЕТ ПРОГРАММ ДЛЯ РАСЧЕТА СИСТЕМ С ОЧЕРЕДЯМИ И ЕГО ТЕСТИРОВАНИЕ

Ю. И. РЫЖИКОВ

Санкт-Петербург, Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского  
Санкт-Петербургский Институт информатики и автоматизации РАН  
СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178  
<ryzhbox@yandex.ru>

---

УДК 519.872

*Рыжиков Ю. И. Пакет программ для расчета систем с очередями и его тестирование*  
// Труды СПИИРАН. Вып. 7. — СПб.: Наука, 2008.

**Аннотация.** *Описаны назначение и структура пакета прикладных программ МОСТ для расчета стационарных режимов в системах и сетях массового обслуживания, идеология и организация его тестирования. Выборочно приведены результаты тестирования.* — Библ. 29 назв.

UDC 519.872

*Ryzhikov Yu. I. Program package for queuing systems computation and its testing*  
// SPIIRAS Proceedings, issue 7. — SPb.: Nauka, 2008.

**Abstract.** *The appointment, structure an usage of applied program package MOCT for queuing problems calculation are described. Special accent is done on the principles and some results of its testing.* — Bibl. 29 items.

---

## 1. Задачи теории очередей

В разных областях техники, в организации производства, в социальной сфере и в военном деле постоянно возникает необходимость решения своеобразных вероятностных задач, связанных с работой *систем массового обслуживания* разного вида требований. Термин «массовое обслуживание» предполагает многократную повторяемость ситуаций в том или ином смысле (много прибывших в систему и обслуженных заявок, большое число находящихся в эксплуатации аналогичных систем) и статистическую устойчивость картины.

По справедливому замечанию виднейшего советского специалиста в этой области Б. В. Гнеденко легче указать ситуации, где не может быть использована в теории массового обслуживания (ТМО) (она же — теория очередей), чем перечислить все сферы ее потенциального применения. К таким сферам, в частности, относятся:

- в технике связи — проектирование телефонных станций и сетей связи, анализ протоколов обмена информацией;
- на транспорте — анализ процессов дорожного движения, прохождения туннелей, очередей у светофоров, технического осмотра автомашин, формирования железнодорожных составов на сортировочных станциях, регистрации пассажиров, взлета и посадки самолетов, диспетчерской службы в аэропортах, разгрузки и погрузки судов в речных и морских портах, резервирования билетов;

- в промышленности — при планировании сборочных операций (расчет числа линий и емкости бункеров), гибких автоматизированных производств, организации ремонта оборудования, расчете объема восстанавливаемого ЗИП, работе пунктов обслуживания (например, инструментальных складов), расчете зон обслуживания (в прядильном и ткацком производстве), определении числа резервных забоев в шахтах;
- в автоматизированных системах — для оценки своевременности обслуживания заявок на вычислительные работы и подготовку данных, обработки результатов экспериментов, управления технологическими процессами, при исследовании производительности вычислительных систем с асинхронно работающими устройствами;
- в торговле — для определения количества магазинов, продавцов, фасовщиц, узлов расчета, торговых и кассовых автоматов;
- в здравоохранении — при определении необходимого количества аптек, больничных коек, станций и бригад скорой помощи, врачей и младшего медицинского персонала, потребностей в диагностической и лечебной аппаратуре, пропускной способности специализированных санаториев;
- в службе быта — при расчете сети парикмахерских, мастерских разного назначения, количества техники и работников в них, транспортных средств обеспечения услуг населению, пунктов приема коммунальных платежей, количества ремонтников в жилищно-эксплуатационных конторах и трестах, сотрудников бюро по трудоустройству, по обмену жилой площади и т. д.;
- в органах юстиции и внутренних дел и МЧС — при расчете количества судебных органов и их штатной численности, емкости исправительно-трудовых учреждений, численности сотрудников следственного аппарата и оперативников, планировании работы контрольно-пропускных пунктов и пунктов таможенного досмотра, диспетчерских пунктов противопожарной службы — см. [26];
- в сфере науки и образования — при исследовании некоторых видов природных процессов (регистрация элементарных частиц, фильтрация, диффузия, действие катализаторов химических реакций), запуске ИСЗ и обработке спутниковой информации, расчете количества лабораторных установок, экзаменаторов (в том числе автоматических), возможностей учебно-опытных производств, бытового и медицинского обслуживания студентов; при проектировании и анализе работы крупных библиотек;
- в издательском деле — при расчете численности сотрудников, участвующих в подготовке рукописей к изданию;
- в военном деле — при проектировании систем ПВО (каждая цель может рассматриваться как «заявка» на обслуживание, т. е. обстрел), организации охраны границ, расчете патрульных нарядов и во многих других случаях типа указанных выше применительно к боевой и повседневной деятельности войск.

Актуальность проблем ТМО в последние годы существенно возросла в связи с массовым созданием и использованием вычислительных сетей разного масштаба — от локальных до Интернета.

Сразу же подчеркнем, что задачи указанных типов приходится решать не только при проектировании вновь создаваемых систем и сетей обслуживания (СМО, СеМО), но и в процессе эксплуатации имеющихся — при увеличении нагрузки; изменении трудоемкости обработки заявок; выходе из строя, деградации или модернизации техники; снижении квалификации персонала; пересмотре требований к оперативности обработки заявок и т. п.

Универсальным методом получения требуемых числовых характеристик служит имитационное моделирование. Однако существенными недостатками последнего являются сложная логика программ и большой расход машинного времени. Инструментальные системы моделирования типа GPSS содержат встроенный интерпретатор, который в принципе не может быть универсальным и ограничивает (как правило неявно) круг решаемых задач. Имитационному моделированию органически присуща низкая точность определения малых вероятностей, усугубляемая сложностью получения достаточно качественных последовательностей псевдослучайных чисел. Вера в возможность добиться сколь угодно высокой точности соответствующим увеличением числа испытаний основана на гипотезе об идеальной работе датчиков псевдослучайных чисел (ДСЧ). О несостоятельности последней убедительно свидетельствует табл. 1 погрешностей вычисления  $\pi$  методом статистических испытаний: через долю точек, попавших в круг, вписанный в единичный квадрат.

Таблица 1: Погрешности статистического определения числа  $\pi$

$N$	$\delta$	$N$	$\delta$	$N$	$\delta$
1 тыс.	9.8e-2	50 тыс.	2.8e-3	2 млн	-1.4e-4
2 тыс.	8.6e-2	100 тыс.	8.3e-3	5 млн	-1.0e-5
5 тыс.	5.6e-3	200 тыс.	4.3e-3	10 млн	2.9e-4
10 тыс.	1.8e-2	500 тыс.	4.3e-3	20 млн	4.2e-5
20 тыс.	2.2e-3	1 млн	2.0e-3	50 млн	1.2e-4

К этому добавим рост погрешностей статистической оценки среднего времени ожидания в системах обслуживания обратно пропорционально  $(1 - \rho)^2$ , где  $\rho$  — коэффициент загрузки. Наличие статистических погрешностей ухудшает оценку градиента целевой функции и затрудняет (если не исключает вообще) оптимизацию исследуемых процессов по данным имитационного моделирования. Все это вынуждает стремиться к максимальному использованию *численных* методов расчета систем и сетей обслуживания.

Теория массового обслуживания берет свое начало в выполненных около 100 лет назад работах датского ученого А. К. Эрланга по расчету телефонных сетей. В развитии этой теории видная роль принадлежит советским ученым — Г. П. Башарину, А. А. Боровкову, Б. В. Гнеденко, Э. А. Даниеляну, Г. П. Климову, И. Н. Коваленко, А. Н. Колмогорову, А. А. Маркову, Ю. В. Прохорову, Б. А. Севастьянову, А. Я. Хинчину и сотням других. Современная библиография работ по ТМО насчитывает многие тысячи наименований.

С сожалением приходится констатировать, что практика существенно отстает от уровня развития ТМО. Учебная литература [2, 26], исключая университетские курсы [5] и немногие книги предперестроечных лет, освещает в основном марковские СМО и в этом смысле недалеко ушла от первых работ Эрланга да и в этих случаях содержит элементарные ошибки. К сожалению, молодые специалисты по компьютерным сетям убеждены в том, что информационные технологии вполне заменяют знание основ ТМО. К примеру, автор статьи [7] полагает, что «аналитик может провести анализ очередей в заданной сетевой структуре, используя уже готовые таблицы очередей или простые

компьютерные программы, которые занимают несколько строк кода», и далее демонстрирует математическую безграмотность и полное непонимание проблемы: нарушает требования к размерностям величин, не подозревает о существовании распределений с коэффициентом вариации, превышающим единицу; путает производительность и реактивность системы.

Аналогичные ошибки допускались многими авторами докладов на трех всероссийских конференциях по имитационному моделированию [8]. Почему-то считались проблемами: расчет приоритетных режимов для одноканальных систем; анализ систем обслуживания для распределений с «толстыми хвостами»; моделирование с распределениями Парето и Вейбулла; оценка влияния высших моментов на показатели работы системы  $GI/M/1$ . Посредством имитации тщательно исследовалась погрешность приближенных формул для расчета системы с известным *точным* решением. Утверждалось, что аналитическое моделирование требует лишь знания Excel (было даже заявлено — профессором!, что «заниматься имитационным моделированием можно, не зная ни высшей математики, ни теории очередей»). Еще один докладчик заверил, что «ни один производственный или управленец не будет работать с моделью, требующей знания языка программирования (моделирования) и работы с математическими формулами». Это вполне объясняет «успехи» отечественной экономики. Хочется спросить: кого, как и зачем готовят инженерно-экономические вузы («университеты»)?

Эта прискорбная ситуация отчасти объясняется тем, что монографии перечисленных выше авторов написаны на недоступном инженеру уровне. Извлечение из них для практического использования конечных результатов не решает проблемы: в таких случаях эти результаты выглядят менее убедительными, условия их применимости — недостаточно ясными, а проведение каких-либо полезных аналогий становится невозможным. Публикуемые методы расчета немарковских систем [4,5,6,9] редко позволяют довести результаты до числа, а для многоканальных систем разбросаны по журнальным статьям. Достоинно изумления, что в работах [5,9] нет ни таблиц, ни графиков результатов счета.

Теория очередей, как и любая отрасль прикладной математики, требует *доведения результатов до числа*. Это обстоятельство должно заставить исследователя заботиться о верификации предлагаемых им методов, которые, случается, при всей своей внешней заманчивости не выдерживают испытания расчетом: идея оказывается неправильной или неэффективной. Неудача ставит новую и конкретную проблему и стимулирует дальнейший прогресс; успех вдохновляет, укрепляет доверие к полученным результатам, повышает шансы на публикацию и внедрение. К сожалению, в последние десятилетия бездумное увлечение «информационными технологиями» и демагогия о «непрограммируемых пользователях» заметно ухудшили программистскую подготовку будущих математиков и инженеров в их основной массе. *Прикладную математику нельзя изучать в отрыве от программной реализации ее методов*, с помощью которой гораздо лучше уясняются смысл теории, логика алгоритмов и ограничения на их применение.

## 2. Математические эксперименты и ППП

Расчеты систем и сетей обслуживания должны выполняться как на этапе проектирования соответствующих систем, так и в ходе их эксплуатации. В последнем случае необходимость расчетов может порождаться изменением:

- объема нагрузки вследствие подключения дополнительных пользователей;
- характера нагрузки (появление новых задач, смена алгоритмов или технологии решения старых);
- организации работы (введение приоритетов, специализация каналов и узлов, перераспределение потоков в сети, смена операционной системы вычислительной машины);
- конфигурации аппаратной части (вывод в ремонт или на длительную профилактику части устройств, подключение дополнительных, модернизация или замена устаревшей техники);
- требований к качеству функционирования системы (ужесточение их, специализация по видам заявок, предъявление дополнительных требований и т. п.).

Эти расчеты в сущности являются вычислительным экспериментом над математической моделью системы (сети) обслуживания.

Современные методы расчета систем и сетей являются весьма сложными даже в своей идее. Соображения эффективности счета (автоматическая генерация ключей микросостояний и матриц интенсивностей переходов, обеспечение требуемой точности, уплотнение информации, учет специфических структур матриц, ускорение сходимости итераций и т. п.) еще больше усложняют программную реализацию упомянутых методов. Практически как проектировщики, так и менее подготовленный в теории эксплуатационный персонал должны быть вооружены готовыми *пакетами прикладных программ* (ППП) по решению задач теории очередей.

Сложность решения достаточно содержательных задач ТМО сравнительно рано сделала их объектом усилий программистов. Бурный рост числа публикаций по *пакетам* программ для задач ТМО отмечается с конца 1970-х гг. Эти работы велись независимо и практически одновременно в целом ряде стран: США, Японии, Франции, ЮАР, СССР. Очерк истории создания зарубежных пакетов приводится в [28,29]. В Советском Союзе такие работы вели Митрофанов, Порховник, Рыжиков, Сайкин, Яблокова. Из более поздних отечественных разработок назовем серию пакетов, выполненных под м Ю. И. Митрофанова и В. М. Вишневого, а также обширный проект, который координировался В. Ф. Матвеевым (МГУ).

Характеризуя состояние и общий уровень этих разработок *в совокупности*, отметим следующие моменты:

- преимущественную ориентацию пакетов на расчет сетей обслуживания, в первую очередь — удовлетворяющих условиям известной теоремы BCMP;
- сочетание в пакетах аналитических и имитационных моделей, большой удельный вес чисто имитационных пакетов и множество версий GPSS;
- использование широкого круга аппроксимаций и эвристических приемов, в том числе недостаточно проверенных (пакет IQNA — по данным [29], QNA — в части суммирования и преобразования потоков);
- появление интегрированных суперсистем, соединяющих набор специализированных пакетов с базой данных о характеристиках оборудования вычислительных систем и трудоемкости основных подпрограмм операционной системы;

- тенденцию к переносу пакетов на наиболее современные технические средства (от персональных ЭВМ до суперкомпьютеров семейства Cray).

Сопоставление названных пакетов затруднительно, поскольку опубликованные сведения о них неполны и зачастую имеют рекламный характер, а техническая документация недоступна. На конференции по характеристикам и надежности вычислительных систем [27] в 1983 г. отмечалось, что нельзя требовать от компьютерных наук того же совершенства, которое достигнуто за сотни лет в «классическом» инженерном деле. М. Ньютс подвел итоги упомянутой конференции следующим образом:

«Доклады на этой конференции показывают, что когда талантливые люди работают над хорошей проблемой, почти всегда достигается значительный прогресс, хотя, к счастью, конца нашему делу не видно.»

То же самое можно сказать и о *современном* состоянии вопроса. Ниже дано описание истории, состава, возможностей, технологии применения и главным образом тестирования разработанного автором пакета МОСТ по состоянию на сентябрь 2008 г.

### 3. Пакет МОСТ

Полученные автором в 1975–2007 гг. теоретические результаты и расчетные методики [10–25] позволили разработать пакет прикладных программ для расчета систем и сетей обслуживания при весьма общих предположениях об элементах математической модели.

Пакет предназначен для решения возникающих в рамках перечисленных во введении и им подобных приложений *практических* задач анализа проектируемых систем обслуживания, а также для оценки влияния на работу действующих систем изменения входящего потока, числа и производительности каналов обслуживания, трудоемкости заявок, введения приоритетных дисциплин и т. п. Пакет может применяться при: обсчете реальных ситуаций; в *учебном процессе* вузов и курсов повышения квалификации инженеров при проведении учебно-исследовательских работ по дисциплинам, связанным с ТМО; выполнении курсовых, дипломных и диссертационных работ.

Первая версия пакета на Алголе 60 (точнее, Альфа-языке) в составе 18 процедур была разработана в 1977 г. [10,11]. Затем он был переведен на язык ПЛ/1 для ЭВМ ЕС и существенно расширен. Эти работы в декабре 1983 г. докладывались на Заседании Научного Совета по прикладным проблемам при Президиуме АН СССР. В марте 1987 г. пакет успешно прошел межведомственные испытания и под названием МОСТ (Массовое Обслуживание — Стационарные задачи) был передан для тиражирования и распространения в Государственный фонд алгоритмов и программ (Таллинский НУЦ). В эту версию входили 83 функциональных процедуры (6000 операторов ПЛ/1) и около 50 тестов (2000 операторов). По состоянию на 1988 г. пакет эксплуатировался приблизительно в 30 организациях. Позже пакет перманентно модернизировался и развивался, был расширен применительно к сетям обслуживания.

Перенос пакета МОСТ на ПЭВМ сдерживался в распространенных системах программирования отсутствием для них встроенных средств работы с динамическими массивами и комплексными переменными. В версию 5.0 Фортрана 77 фирмы "Microsoft"

такие средства (и ряд других черт Фортрана 90) оказались включены, что и позволило сравнительно легко решить задачу перевода. В процессе перевода ряд программ был серьезно переработан и по существу. Например, благодаря установлению связи между высшими моментами периодов непрерывной занятости (в том числе с разогревом) и моментами активного времени удалось исключить трудоемкую и неустойчивую технологию численного дифференцирования из процедур расчета большинства приоритетных систем.

Ниже обсуждается профессиональная версия МОСТа 2008 г. для ПЭВМ.

### 3.1. Общая характеристика пакета

Пакет имеет *единые теоретические основы* (аппроксимацию непрерывных распределений по методу моментов и законы сохранения ТМО), и в основном базируется на личных научных результатах автора.

Пакет построен по *модульному* принципу, облегчающему его разработку, тестирование и модификацию и увеличивающему гибкость применения, а также уменьшающему общий его объем через однократное программирование частных субалгоритмов. Отдельными модулями независимо от кратности их использования оформлялись внутренние части некоторых алгоритмов, сводящиеся к решению стандартных математических задач (GAUSS, MSQREQ, ROOTPOL). Однотипные вычисления, выполняемые над данными с разными атрибутами (типичный случай REAL — COMPLEX), оформлялись как разные модули (например, INTR и INTRC для обращения треугольных матриц).

Пакет *автономен* в том смысле, что не использует других библиотек стандартных процедур. Его «самообеспеченность» вызвана необходимостью согласования формулировок стандартных задач с принятыми в пакете — по атрибутам переменных, пределам изменения индексов, упаковке матриц специальной структуры и т. п.

Пакет *избыточен* по своему составу. Ряд процедур имеет совпадающие или почти совпадающие области применения (для примера сошлемся на три процедуры многократного численного дифференцирования в нуле). Некоторые процедуры являются частными случаями других (в этом смысле  $MG1 \subset EG1$ ,  $GM1 \subset GE1$ ,  $GM1 \subset GMN$ ). Для других комбинаций (например,  $EG1$  и  $GE1$ ) области применения пересекаются частично. Структурная избыточность пакета позволяет:

- организовать взаимное тестирование процедур на пересечении областей их применения;
- оценить сравнительную эффективность различных подходов к решению задачи и учесть ее тонкую специфику;
- решать каждую задачу средствами минимально необходимой общности — следовательно, с наименьшими затратами памяти и процессорного времени;
- при «отказе» одной процедуры попытаться (с реальными шансами на успех) применить альтернативную.

Набор процедур расчета параметров аппроксимирующих распределений по моментам исходных дополнен процедурами, восстанавливающими моменты по упомянутым параметрам. Это позволяет контролировать один из ключевых аспектов технологии применения пакета.

Пакет *эффективен* по использованию машинных ресурсов. Для процедур, решающих частные задачи, реализованы специализированные алгоритмы. В программах, связанных с большим объемом промежуточных результатов, применены различные виды плотной упаковки матриц и специальные процедуры работы с ними, исключающие вычисление заведомо нулевых элементов. Обратные матрицы, как правило, получаются на месте прямых. Все функциональные модули хранятся в объектной библиотеке, что исключает необходимость их повторной трансляции.

Пакет ориентирован на *компетентного* пользователя — программиста, знающего основы теории вероятностей и фундаментальные соотношения теории массового обслуживания. Такой пользователь, реализуя технологию *сборочного программирования*, самостоятельно пишет главную программу на входном языке пакета. Этим обеспечивается: полное и рациональное использование возможностей пакета; построение условных и циклических вариантов счета; задание специфических целевых функций; включение расчета систем и сетей обслуживания в контур охватывающей оптимизационной задачи; выбор и сопоставление результатов альтернативных расчетных схем; полная свобода управления выводом в целях дальнейшего использования результатов (например, для автоматического построения графиков средствами GnuPlot).

Доступ программиста на *внутренний* уровень пакета (служебные и вспомогательные процедуры) существенно облегчает его работу по решению новых типов задач.

Пакет *дружественно* настроен к пользователю. В его состав входит структурированный электронный каталог, содержащий информацию о назначении каждой процедуры, смысле и формате параметров, рекомендации по применению и выбору свободных параметров. Все процедуры имеют мнемонические имена. Порядок следования параметров унифицирован в соответствии со схемой Кендалла  $A/B/n/R$ . Предусмотрен (насколько допускает система программирования) автоматический контроль согласования атрибутов фактических и формальных параметров. Обширная библиотека тестов и результатов их выполнения содержит богатый набор примеров логики и техники программирования задач теории очередей и может служить источником полезных аналогий.

Процедуры пакета выдают диагностические сообщения в случае некорректного задания исходных распределений (отрицательная дисперсия), перегрузки рассчитываемых систем, некорректных маршрутных матриц сети обслуживания. В документации к полным версиям пакета даются рекомендации по построению цепочек и составлению программ и содержатся "Руководства к лабораторным работам на базе пакета", которые могут и должны использоваться при самостоятельном изучении пакета и обучении студентов и иных категорий пользователей в работе с ним. Выполнение работ поможет:

- лучше усвоить теорию очередей;
- оценить широту возможностей пакета;
- убедиться в его надежности;
- приобрести необходимые для самостоятельной работы технические навыки.



## 4. Профессиональный МОСТ

### 4.1. Состав пакета

По состоянию на октябрь 2008 г. пакет МОСТ насчитывает около 180 процедур, записанных на Фортране 90 и разбитых на следующие функциональные группы:

- APPR — аппроксимация распределений;
- BASE — основные процедуры расчета систем;
- ADVANCED — продвинутые модели;
- FLOWS — операции с потоками;
- IMIT — имитационное моделирование;
- TIME — расчет временных характеристик;
- PRTY — приоритетные дисциплины обслуживания;
- NETW — сети обслуживания;
- MATR — формирование матриц интенсивностей переходов;
- MATH — общематематические процедуры;
- SERV — вспомогательные процедуры.

**APPR.** В эту группу входят процедуры расчета параметров аппроксимаций распределений гамма-плотностью с поправочным многочленом, ДФР Вейбулла с поправочным многочленом, а также фазовых аппроксимаций Кокса по трем моментам, гиперэкспоненты по трем и произвольному числу моментов, гиперэрланговой аппроксимации частного вида. Имеются также процедуры восстановления моментов по параметрам аппроксимации, табулирования плотностей и дополнительных функций распределения.

**BASE** содержит процедуры расчета систем с вышеупомянутыми фазовыми аппроксимациями интервалов между заявками и длительностей обслуживания. Для этих процедур имеются версии с бесконечной и ограниченной очередью, а в случае простейшего входящего потока — и «замкнутые» варианты (интенсивность потока зависит от числа заявок в системе). Сюда же относятся процедуры, реализующие классический подход Кроммелина (MDN, EDN), метод вложенных цепей Маркова (MG1, GM1, GMN) и его комбинации с методом фаз (EG1 и GE1).

**ADVANCED** включает процедуру MMVN расчета системы с неоднородными каналами, обобщения MG1 и MHN на поток групповых заявок с пачками случайного объема, процедуры расчета систем с квантованием времени — циклических и многоуровневых с относительными приоритетами уровней.

**FLOWS** содержит процедуру FILTR случайного прореживания рекуррентного потока; FLOWSUM — суммирования двух таких потоков; три процедуры расчета распределения числа заявок, прибывающих за *случайный* интервал времени.

**IMIT** объединяет программы имитационных моделей, использованных при обосновании и верификации численных методик для: проверки законов сохранения, случайного выбора заявок из очереди, многоуровневых систем с квантованным обслуживанием, многоканальных приоритетных систем. В эту группу входит также процедура

RANDOM генерации равномерно распределенных псевдослучайных чисел и процедура ускоренного получения произвольного члена последовательности по заданному номеру (для формирования датчиков непересекающихся серий псевдослучайных чисел).

**TIME** — это группа процедур, обеспечивающих переход от распределения числа заявок в очереди к моментам распределения времени ожидания начала обслуживания при различных предположениях об аппроксимации интервалов между заявками входящего потока: экспоненциальная, двухфазные эрлангово и гиперэкспоненциальное распределения, произвольная. Большая их часть обеспечивает решение основного интегрального уравнения сохранения стационарной очереди. Процедуры различаются и по способам решения этого уравнения. Процедура RTIME реализует разработанный автором в [17] метод пересчета через коэффициенты немарковости входящего потока.

**PRTY** обеспечивает расчет одноканальных систем с различными видами приоритетов. PRMIX позволяет реализовать схему классов (с относительными приоритетами внутри классов и абсолютными — между классами); PRDIFF — также смешанные приоритеты в зависимости от *разности* номеров типов. Как предельные варианты этих дисциплин реализуются обычные схемы относительного приоритета и абсолютного приоритета с прерыванием и дообслуживанием.

Процедуры PRS1 и PRW1 реализуют дисциплины с обслуживанием прерванных заявок заново — соответственно с новой и прежней реализациями случайной длительности обслуживания. Имеются также аналоги перечисленных процедур, позволяющие получать три начальных момента распределений ожидания/пребывания заявки в системе. Процедура DYNPR1 рассчитывает средние времена ожидания для системы с динамическими приоритетами, линейно растущими по времени ожидания. Имеются две процедуры, реализующие полуэмпирические методы расчета средних времен ожидания/пребывания для *многоканальных* систем: NPNWAIT для относительного приоритета и PRNSOJ — для абсолютного.

**NETW** объединяет процедуры, необходимые для расчета сетей обслуживания на основе потокоэквивалентной декомпозиции их. Это прежде всего доработки процедур группы BASE, дополнительно реализующие для узлов сети расчет выходящего потока. Они построены на коковых и гиперэкспоненциальных аппроксимациях исходных распределений и основаны преимущественно на быстродействующем методе расчета узлов методом матрично-геометрической прогрессии.

Процедура NWSTIME позволяет через моменты распределения времени пребывания заявки в каждом из узлов при *однократном* посещении и маршрутную матрицу вероятностей переходов между узлами получить моменты времени пребывания заявки в сети. Собственно сетевые процедуры позволяют рассчитывать сети однородные и неоднородные; замкнутые, разомкнутые и смешанные.

**MATH** включает процедуры решения возникающих при работе с МОСТом общематематических задач, согласованные по формату данных с функциональными процедурами пакета. Это — процедура вычисления логарифма гамма-функции; две процедуры решения полиномиальных уравнений и процедура решения нелинейных уравнений методом Вегстейна; группа программ для решения задач линейной алгебры расчет определителя и решение систем линейных уравнений с вещественными и комплексными коэффициентами; решение силвестровой системы линейных уравнений; обращение матриц — общего и треугольного вида, упакованных в линейный массив и распакованных. Из процедур анализа укажем процедуры DIFNDIF, DIFNEWT, DIFSTIR многократного численного дифференцирования в нуле таблично заданной функции и SIMFAST — ускоренного численного интегрирования для подсчета усеченных моментов распределений.

Ряд процедур предназначен для вероятностных задач. Это CONV и CONVC — свертки двух распределений в моментах; FASTCONV — быстрая многократная свертка распределения с самим собой (полезна, например, при регулярном прорезивании потока); DISCONV — свертка дискретных распределений; MFACT — расчет факториальных моментов; GENERW — вычисление производящей функции.

**SERV** объединяет процедуры решения вспомогательных вероятностных задач, связанных с численными методами теории очередей. Это расчет преобразований Лапласа и моментов распределения периодов непрерывной занятости, в том числе с разогревом; вычисление стартовых вероятностей в методе Кроммелина расчета систем с регулярным обслуживанием; задание начальных приближений к векторам условных вероятностей микросостояний в итерационном методе расчета многофазных систем и итоговая нормировка вероятностей в том же методе.

## 4.2. Использование пакета

Работа с ППП МОСТ состоит из следующих этапов:

- составление цепочки (выбор основной процедуры и звеньев для подготовки исходных данных и расчета производных показателей);
- согласование обозначений параметров;
- выбор значений свободных параметров;
- оформление главной программы;
- ввод задания в машину, его выполнение и анализ результатов.

В "Руководстве к пакету" даются подробные рекомендации по каждому этапу со схемами выбора решений. Наиболее поучителен первый этап, который мы здесь проиллюстрируем.

Пусть необходимо определить влияние коэффициента вариации  $v$  распределения времени обслуживания при фиксированном среднем на распределение времени пребывания заявки в системе  $M/G/3$  для значений  $v = 0, 0.5, 0.7, 1.0$ . Прежде всего очевидно, что случай  $v = 0$  соответствует схеме  $M/D/n$ . Поскольку эта схема сохраняет принцип «первый пришел — первый обслужен», для нее обобщенные на высшие моменты формулы Литтла верны по отношению к распределениям числа заявок и времени пребывания. Имеем цепочку

$$\text{MDN} \rightarrow \text{MFACT} \rightarrow \text{MTIME} \rightarrow \text{FCWEIB}$$

(по распределению числа заявок в  $M/D/n$  вычисляем его факториальные моменты; через MTIME получаем моменты распределения времени пребывания в системе; по ним строим таблицу ДФР).

Рассмотрим выбор математических моделей для  $v > 0$ . Поскольку предполагаются известными лишь два момента распределения  $G$ , искать его аппроксимацию можно в классе гамма-распределений, причем формула  $\alpha = 1/v^2$  для перечисленных выше ненулевых значений  $v$  дает  $\alpha = 4, \sim 2$  и  $1$  соответственно. Целочисленные  $\alpha$  указывают на применимость распределений Эрланга соответствующего порядка, но при  $\alpha = 4$  предпочтительнее воспользоваться  $H_2$ -аппроксимацией (в этом случае число микросостояний системы окажется много меньше). Следовательно, при  $v = 0.5$  нужно применить цепочку

$$\text{HYPER3} \rightarrow \text{MHN} \rightarrow \text{MFACT} \rightarrow \text{MTIME} \rightarrow \text{CONV} \rightarrow \text{FCWEIB}$$

Здесь соответствующей настройкой процедуры MFACT получаем моменты распределения числа заявок, ожидающих начала обслуживания; через MTIME переходим к моментам распределения времени ожидания, а с помощью CONV вычисляем моменты свертки этого распределения с распределением чистой длительности обслуживания. Эта цепочка может быть применена и как универсальный подход (возможно, кроме  $v = 0.7$ ).

Вариант  $v = 0.7$  дает  $\alpha = 2$  — это особый случай, исключаящий  $H_2$ -аппроксимацию. Правда, в процедуре HYPER3 предусмотрена его обработка с принудительным изменением второго момента на 10%. Если же выбрать эрлангову аппроксимацию, то получим

$$\text{MEKN} \rightarrow \text{MFACT} \rightarrow \text{MTIME} \rightarrow \text{CONV} \rightarrow \text{FCWEIB}$$

Наконец, при  $v = 1$  имеем  $\alpha = 1$  и цепочку

$$\text{MMN} \rightarrow \text{MFACT} \rightarrow \text{MTIME} \rightarrow \text{CONV} \rightarrow \text{FCWEIB}$$

Указанная совокупность цепочек обеспечит решение поставленной задачи с наименьшей затратой процессорного времени. Разумеется, цепочки могут быть и условными. Конечное звено цепочек FCWEIB может быть заменено процедурой FLAGC. Программная реализация цепочек предполагает передачу информации через параметры вызываемых процедур.

В качестве второй задачи рассмотрим возможные подходы к расчету моментов распределения интервалов между заявками при регулярном прореживании потока (поочередное назначение поступающих заявок одному из  $m$  узлов). Регулярное прореживание потока эквивалентно операции свертки исходного распределения интервалов между смежными заявками. Задача может быть решена:

- непосредственно в моментах  $(m-1)$ -кратным последовательным применением процедуры CONV или однократным обращением к FASTCON (в последнем случае свертки организуются на основе двоичного представления кратности);
- по цепочке GLAG  $\rightarrow$  LAPLAG  $\rightarrow$  DIFNEWT (распределение аппроксимируется гамма-плотностью с поправочным многочленом; для  $s = 0, h, \dots, nh$  строится таблица  $m$ -й степени преобразования Лапласа; к таблице применяется процедура численного дифференцирования интерполяционного многочлена Ньютона; знак нечетных производных инвертируется).

В последнем варианте можно вместо DIFNEWT использовать процедуру DIFNDIF — безразностного численного дифференцирования или DIFSTIR — дифференцирования интерполяционного многочлена Стирлинга. Для применения DIFSTIR значения  $s$  должны задаваться по обе стороны от нуля.

Реализация всех перечисленных подходов обеспечивает взаимное тестирование использованных процедур.

Технически пакет МОСТ/F90 включает в себя:

- статическую библиотеку из 180 объектных модулей (3.2 Мбайта);
- каталог пакета;
- библиотеку INTERFACE-блоков;
- библиотеку из 120 тестов на Фортране 90;
- библиотеку результатов тестирования;

- файл с прототипами операторов вызова.

Каждый расчет выполняется в виде *проекта* системы Фортран 90. В проект *включается* вызывающая программа и упомянутая статическая библиотека. После компиляции и линкования («Building») система формирует 32-разрядное приложение, запуск которого дает результаты счета. В документацию к этой версии пакета предполагается включить описание его теоретических основ (подготовленная к изданию книга) и « по расчету систем с очередями».

## 5. Учебный МОСТ

Продукт МОСТ/FPS1 [25] опирается на библиотеку исходных модулей Фортрана PowerStation 1.0 объемом 20 тыс. строк текста. Он сохраняет идеологию профессиональной версии и ее основные возможности в усеченном виде, но реализован на Фортране PowerStation 1.0, соединяющем удобства Windows-интерфейса с умеренными требованиями к дисковой памяти (до 15 Мбайт) и процессору (Pentium не обязателен).

## 6. «Непрофессиональный» МОСТ

Расширение круга пользователей МОСТа вовлечет в него лиц с программистской и теоретической подготовкой, недостаточной для работы на профессиональном уровне. Для таких пользователей разработана автоматизированная версия пакета в среде MS DOS — МОСТ/F1. Она позволяет рассчитывать разомкнутые и замкнутые системы и сети обслуживания по исходным данным, вводимым в процессе диалога, с учетом трех моментов исходных распределений. Допускается прямое указание типов конкретных распределений (показательное, эрлангово, детерминированное) — в этих случаях объем вводимых данных уменьшается. В ближайшее время предполагается переход к графическому (оконному) режиму.

В состав пакета МОСТ/F1 входят:

- ведущая программа, организующая диалог с пользователем и ввод исходных данных;
- четыре генератора программ, формирующих главные Фортран-программы в соответствии с характером задачи и исходными данными конкретного варианта;
- файлы необходимых для этого программных заготовок-фрагментов;
- вырезки из библиотек объектных модулей и интерфейсов профессиональной версии (50 процедур);
- четыре теста — примеры диалога с системой, выводящие на все группы вариантов, и соответствующие результаты счета;
- типовые batch-файлы.

Ввод исходных данных производится с контролем корректности информации. Результаты заносятся в стандартный ответный файл в форме, удобной для использования современными графическими средствами типа Grapher или Gnuplot.

## 7. Тестирование пакета МОСТ

Тестирование программных продуктов является одной из наиболее обсуждаемых проблем программной техники. Рекомендуемые технологии, как правило, претендуют на универсальность — безотносительно к задачам, решаемым программным комплексом и его отдельными частями. Соответственно логика и результаты тестирования оказываются чисто формальными и для пользователя — неубедительными. На наш взгляд, *реальной замены знанию нет и быть не может* и для потребителя гарантированное решение набора типовых подзадач более информативно, чем «процент покрытия ветвей».

Излагаемые здесь выборочно принципы тестирования МОСТа реализуют программу-минимум — продемонстрировать работоспособность его процедур в условиях, допускающих разностороннюю проверку правильности их функционирования [14].

### 7.1. Основные и приоритетные процедуры

В основу проверки этих процедур положен принцип *взаимности* [14] — подбор таких исходных данных, при которых сравниваемые процедуры должны давать одинаковые или близкие результаты. В то же время должны быть проверены весь диапазон функций каждой процедуры и значения входных параметров, априорно вызывающие опасения.

Прежде всего рассмотрим виды входных распределений. Все эти процедуры тестировались на допускающих любые коэффициенты вариации гамма-распределениях с параметром формы  $\alpha$ . Можно показать, что  $H_2$ -аппроксимация в диапазоне  $1 < \alpha < 2$  имеет параметры парадоксальные (одна из вероятностей отрицательна, а другая больше единицы), а при  $\alpha > 2$  — комплексные. Коксова аппроксимация  $C_2$  имеет парадоксальную область при  $0 < \alpha < 1$  и комплексную — также при  $\alpha > 2$ . Показательное распределение ( $\alpha = 1$ ) является особым случаем для обоих распределений, а распределение  $E_2$  — для  $H_2$ -аппроксимации. Соответственно в процедурах пакета должны быть предусмотрены «обходные» варианты.

С другой стороны, частные результаты, получаемые с помощью простейших методов, должны согласовываться с их аналогами для более «мощных» процедур. Все «многоканальные» процедуры должны быть проверены для числа каналов  $n = 1$  и  $n > 1$ . Каждая тестовая ситуация для возможности локализации ошибки должна обсчитываться минимум тремя программными модулями. Сокращенный вариант схемы взаимного тестирования моделей разомкнутых СМО с бесприоритетным обслуживанием показан на рисунке. Числа на пересечении имен модели и модуля указывают ожидаемую длину очереди: этот показатель компактен, инвариантен к масштабу времени и более чувствителен к способу расчета, чем ожидаемое число заявок в системе. Для ряда базовых процедур расчета многоканальных систем было проведено дополнительное нагрузочное тестирование при увеличении числа каналов  $n$  до 50. Расчет подтвердил предсказываемое теорией сближение результатов для различных распределений длительности обслуживания.

	MM/1	M/E <sub>2</sub> /1	M/Г/1	E <sub>2</sub> /M/1	E <sub>2</sub> /Г/1	Г/М/1	J/E <sub>2</sub> /1	D/E <sub>2</sub> /1	M/E <sub>2</sub> /2	M/D/2	E <sub>2</sub> /J/2	E <sub>3</sub> /M/2	
	M/E <sub>3</sub> /1	M/J/1	M/D/1	E <sub>2</sub> /D/1	J/M/1	D/M/1	M/M/2	M/E <sub>3</sub> /2	E <sub>2</sub> /Г/2	E <sub>3</sub> /D/2	E <sub>3</sub> /E <sub>2</sub> /2	M/Г <sub>2,3</sub> /3	Г/М/2
MG1		1.633 – 2.450 – 1.225 – 0.817 – 1.361											
EG1		2.450 – 1.225	0.345 – 1.120	0.857									
GM1		1.633	1.120 – 2.664	0.613 – 1.291									
GE1			1.120	1.291	2.240	0.252							
MMN		1.633				1.345							
MEN	1.089					1.345	0.912		1.020				
MPN		1.225	1.361			1.345			1.020				
MHN	1.089	2.450 – 1.250 – 0.817 – 1.361				1.345	0.911		1.041	0.692	0.823		
MCN	1.089	2.450 – 1.225	1.361						1.020	0.692	0.823		
MDN			0.817							0.691			
EMN				1.120			1.345					0.739	
EHN		2.450	0.352				0.911	0.680					
EDN			0.817	0.345					0.266 – 0.691				
PPN	1.089		1.361			1.302 – 1.345		0.681		0.439	0.902		
PHN			1.361							0.692 – 0.457 – 1.516			
HMN				1.161		0.599						0.738 – 1.038	
HPN		1.225		2.648 – 0.898			2.223	0.715		0.437	0.902		
HHN					0.599		2.249	0.250		0.316 – 0.692	1.550	1.038	
CCN			1.361	2.648	0.599		0.911 – 0.232			0.281		1.038	
GMIN				2.665	0.613		1.345					0.739 – 1.037	

Выявилась нецелесообразность применения при больших  $n$  метода матрично-геометрической прогрессии. Последний значительно уменьшает число итераций, но резко увеличивает трудоемкость каждой. Для модели  $M/H_2/n$  приходится решать систему из  $(n + 1)^2$  уравнений для расчета матричной поправки, так что трудоемкость шага растет как  $O(n^6)$ .

Подобным же способом (и с аналогичными результатами) было проведено взаимное тестирование замкнутых систем и систем с ограниченной очередью.

## 7.2. Временные процедуры

Основная проблема здесь была с немарковским входящим потоком. В качестве эталонов использовались известные расчетные схемы моделей  $GI/E_k/1$  и  $GI/M/n$ .

## 7.3. Приоритетные процедуры

Для моделей обслуживания с приоритетом естественно ожидать:

- совпадения первых моментов из результатов счета по PRTYPR, PRTYRS, PRTYRW, PRTYNP с результатами работы их упрощенных версий, дающих только первые моменты;
- совпадения результатов обсчета дисциплин с абсолютным приоритетом: PR и RS для показательных распределений длительности обслуживания, RS и RW — для постоянной длительности.

Из средних характеристик наиболее чувствительны к технике расчета и дисциплинам обслуживания средние времена пребывания в системе заявок младшего приоритетного типа (в примерах — третьего). Именно они и сопоставлялись на аналогичной матричной схеме.

## 7.4. Сетевые процедуры

Процедуры «сетевой» группы, отвечающие за расчет *отдельных* узлов, в своей основной части копируют базовые и нуждаются в проверке только в связи с анализом выходящего потока. Правильность расчета последнего подтверждается:

- равенством среднего интервала интервалу между заявками входящего потока;
- для одноканальных систем — приближением высших моментов к аналогичным моментам распределения обслуживания при коэффициенте загрузки  $\rho \rightarrow 1$ ;
- согласием результатов при гиперэкспоненциальной и коксовой аппроксимациях одной и той же модели.

Процедура NWSTIME расчета высших моментов распределения времени пребывания заявки в сети тестировалась на тандеме из  $N$  систем вида  $M/M/1$  — в этом случае распределение времени пребывания заявки в сети есть  $N$ -кратная свертка показательного закона с параметром  $\mu - \lambda$ , т. е. распределение Эрланга  $N$ -го порядка с моментами

$$v_k = N(N + 1) \dots (N + k - 1) / (\mu - \lambda)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$



Кроме того, NWSTIME проверялась для разомкнутых сетей произвольной структуры на согласие получаемых через нее первых моментов с вычисляемыми согласно формуле Литтла.

При обсчете неоднородных сетей заявки каждого типа обходили один из узлов сети, что позволило проверить правильность работы со списками посещаемых вершин (без таких списков решение уравнений баланса потоков приводило к делению на ноль).

## 7.5. Процедуры аппроксимации

Очевидным подходом к тестированию процедур этой группы является использование взаимнообратных пар расчета параметров аппроксимации и восстановления по ним исходных моментов: GLAG — MOMLAG, HYPER3 — MOMHYPER, COX3 — MOMCOX, PARMWB — MOMMWB. Процедуры ALAG, DENSLAG, FLAGC, FCWEIB, LAPLAG и LAPHYP тестировались сопоставлением результатов при нарастающем числе учитываемых моментов с полученными по явным формулам для треугольного распределения.

## 7.6. Вспомогательные и математические процедуры

Процедуры численного дифференцирования тестировались на задаче расчета моментов показательного распределения с преобразованием Лапласа—Стилтьеса (ПЛС) вида  $\mu/(\mu + s)$ . Для контроля решения систем линейных уравнений (GAUSS), силвестровой системы (MSQREQ) и нахождения корней многочлена (ROOTPOL) использовались задачи с известным решением. Процедуры обращения матриц общей и треугольной структур проверялись сопоставлением произведения исходной и обратной матриц с единичной. При тестировании процедуры LOGAM проверялись равенство  $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$  и рекуррентная зависимость  $\Gamma(k + 1) = k\Gamma(k)$ .

Процедуры BUSYDET, BUSYLAG, BUSYHYPER расчета ПЛС периода непрерывной занятости системы  $M/G/1$  проверялись сравнением получаемых численным дифференцированием моментов с найденными по явным формулам (BUSYMOM). Процедуры свертки CONV и быстрой многократной свертки FASTCON тестировались на гамма-распределении, для которого свертка порождает также гамма-распределение с параметром формы, умноженным на кратность свертки.

Процедуры GENERW и MFACT расчета производящей функции и факториальных моментов дискретного распределения вероятностей соответственно проверялись на модели  $M/M/1$ , для которой получены явные выражения результатов

$$P(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho z},$$

$$f_{[k]} = k! \left( \frac{\rho}{1 - \rho} \right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Правильность работы остальных процедур (и прежде всего процедур формирования матриц интенсивностей переходов между микросостояниями систем фазового типа) гарантируется успешным выполнением вызывающих их процедур.

Систематичность, глубина, полнота и разнообразие методов тестирования, использованных при разработке МОСТа, и положительные результаты тестирования позволяют считать теоретические основы пакета правильными, а их программную реализацию в проверенном диапазоне условий — достаточно надежной.

## 8. Лабораторные работы с пакетом МОСТ

На базе последовательных версий пакета автор в течение 25 лет проводил (в составе дисциплин учебного плана различной прикладной ориентации) лабораторные работы по теории очередей. Перечислим несколько конкретных работ и их методические установки.

**Преобразование потоков.** Исследуется влияние входных параметров на процессы просеивания, суммирования и преобразования потоков в сетях обслуживания. Экспериментально (по вычисляемым значениям «коэффициентов немарковости») устанавливается скорость приближения к простейшему: просеиваемых потоков — при увеличении вероятности выбрасывания заявки, суммарных — при увеличении числа составляющих. Выявляется приближение регулярно просеиваемого потока к регулярному, выходящего из системы  $A/B/1$  при загрузке  $\rho \rightarrow 1$  — к рекуррентному с распределением  $B$  интервалов между заявками. Обнаруживается драгоценная для расчета сетей практически линейная связь между коэффициентами немарковости выходящего и входящего потоков.

**Проверка законов сохранения.** В каждом варианте этой работы для заданных числа каналов и типа распределения длительности обслуживания стандартная имитационная модель доставляет распределение числа заявок в системе и статистические моменты распределения времени ожидания начала обслуживания. Тип и параметры исходных распределений задаются в сменных внешних датчиках случайных чисел — процедурах пользователя. Проверяются закон сохранения заявок, формулы Литтла для средних значений времен ожидания и пребывания и их аналоги для высших моментов. На основе относительной невязки левой и правой частей соответствующих равенств и сопоставления ее с предсказаниями теории делаются выводы о справедливости различных форм законов сохранения.

**Влияние высших моментов.** Для одноканальных систем  $M/G/1$  и  $GI/M/1$  исследуется влияние числа учтенных моментов немарковского распределения на выбор оптимального объема восстанавливаемого ЗИП и относительное увеличение ожидаемых затрат, а также на относительную погрешность вероятности превышения допустимого времени пребывания заявки в системе. Здесь прежде всего ожидается вывод о недопустимости замены показательным законом распределений законов, заметно от него отличающихся (а именно, равномерное, треугольное, вырожденное, Вейбулла с большим коэффициентом вариации законы распределения).

**Дробление производительности и масштабный эффект.** Исследуется влияние числа каналов  $n = \overline{1, 3}$  на среднее время ожидания и ДФР времени пребывания в системе при фиксированном коэффициенте загрузки  $\rho = 0.8$ . Устанавливается, что при увеличении числа каналов, т. е. при дроблении производительности, среднее время ожидания уменьшается, а среднее время пребывания возрастает. Обучаемый подводится к выводу, что с учетом необходимости ремонта и профилактического обслуживания оптимален выбор  $n = 2$ .

В других вариантах той же работы исследуется изменение средних длительностей ожидания и пребывания в системе при одновременном  $k$ -кратном увеличении интенсивностей входящего потока и обслуживания. Обнаруживается, что при этом упомянутые средние уменьшаются в  $k$  раз — независимо от числа каналов и вида распределения длительности обслуживания.

В Руководстве к профессиональному пакету приводятся описания 10 лабораторных работ. В учебной версии их четыре. Их количество может быть легко увеличено. Имеется реальная возможность выдать всем обучаемым индивидуальные задания. Для экономии машинного времени и ускорения работы рекомендуется бригадная орга-

низация. С учетом времени набора предварительно подготовленной (очень короткой) программы, ее отладки, оформления и защиты отчета работа укладывается в четырехчасовое занятие. В ходе проведения цикла лабораторных работ наблюдалось заметное повышение интереса обучаемых к дисциплине и улучшение понимания основных ее положений.

Автор настоятельно рекомендует выполнить эти работы всем будущим пользователям пакета, имеющим серьезные намерения.

## Литература

1. Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. М.: Наука, Физматлит, 1989. 336 с.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972. 551 с.
3. Ивницкий В. А. Теория сетей массового обслуживания. М.: Физматлит, 2004.
4. Ивченко Г. И., Капитанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. М.: Высш. шк., 1982. 256 с.
5. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966. 243 с.
6. Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. Теория расписаний / Пер. с англ. М.: Наука, 1975. 359 с.
7. Кульгин М. Теория очередей и расчет параметров сети // ВУТЕ - Россия, ноябрь 1999. С. 26–33.
8. Материалы Всероссийских научно-практических конференций «Опыт практического применения языков и программных систем имитационного моделирования в промышленности и прикладных разработках». СПб.: ЦНИИ технологии судостроения. 2003 – 2007 гг.
9. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973. 447 с.
10. Рыжиков Ю. И. Комплекс программ для расчета систем массового обслуживания повышенной сложности // Программирование. 1978. № 4. С. 87–91.
11. Рыжиков Ю. И. Машинные методы расчета систем массового обслуживания. Л.: ВИКИ им. А. Ф. Можайского, 1979. 177 с.
12. Рыжиков Ю. И. Алгоритм расчета многоканальной системы с эрланговским обслуживанием // АиТ. 1980. № 5. С. 30–37.
13. Рыжиков Ю. И., Хомоненко А. Д. Итеративный метод расчета многоканальных систем с произвольным распределением времени обслуживания // Проблемы управления и теории информации. 1980. № 3. С. 32–38.
14. Рыжиков Ю. И. Тестирование функционально избыточных пакетов программ // Программирование. 1986. № 1. С. 22–29.
15. Рыжиков Ю. И., Демиденко Ю. А. Определение моментов распределения времени пребывания заявки в вычислительной сети // АВТ. 1988. № 1. С. 24–27.
16. Рыжиков Ю. И., Хомоненко А. Д. Расчет разомкнутых немарковских сетей с преобразованием потоков // АВТ. 1989. № 3. С. 15–24.

17. Рыжиков Ю. И. Три метода расчета временных характеристик разомкнутых систем массового обслуживания // *АиТ*. 1993. № 3. С. 127–133.
18. Рыжиков Ю. И. Оценка системы моделирования GPSS World // *Информационно-управляющие системы*. 2003. № 2–3. С. 30–38.
19. Рыжиков Ю. И. Расчет многоуровневой системы очередей. // *Информационно-управляющие системы*. 2005. № 5(18). С. 31–34.
20. Рыжиков Ю. И. Полный расчет системы обслуживания с распределениями Кокса // *Информационно-управляющие системы*. 2006. № 2(21). С. 38–46.
21. Рыжиков Ю. И. Средние времена ожидания и пребывания в многоканальных приоритетных системах // *Информационно-управляющие системы*. 2006. № 6(25). С. 43–49.
22. Рыжиков Ю. И. Расчет систем обслуживания с групповым поступлением заявок // *Информационно-управляющие системы*. 2007. № 2(27). С. 39–49.
23. Рыжиков Ю. И. Расчет систем со случайным выбором на обслуживание // *Информационно-управляющие системы*. 2007. № 3(28). С. 56–59.
24. Рыжиков Ю. И. Компьютерное моделирование систем с очередями: курс лекций. СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2007. 164 с.
25. Рыжиков Ю. И. по расчету систем с очередями на базе пакета МОСТ/FPS1: Учебно-методическое пособие. СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2007. 92 с.
26. Таранцев А. А. Инженерные методы теории массового обслуживания. СПб.: Наука, 2007. 175 с.
27. Mathematic computer performance and reliability. // *Proc. of the International Workshop, Piza, 1983*. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1984. 429 p.
28. Modelling technique and performance evaluations // *Proc. of the International Workshop / S. Fdida, G. Pujolle (eds)*. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1987. 340 p.
29. Sauer C. H., McNair E. A. The Evolution of the research queuing package // *Modelling Technique and Tools for Performance Analysis'85. Proc. of the Intern. Conf.* Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1986. 365 p.