УДК 519.65

И.Г. Бурова

О БАЗИСНЫХ СПЛАЙНАХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ РАЗЛИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ

Бурова И.Г. **О базисных сплайнах шестого порядка аппроксимации различной гладкости.**
Аннотация. Построены фундаментальные трижды непрерывно дифференцируемые базисные сплайны шестого порядка аппроксимации минимального дефекта первой высоты. Получены соотношения между базисными сплайнам шестого порядка аппроксимации различной гладкости.
Ключевые слова: сплайны, аппроксимация.

Burova I.G. **About basic splines of the sixth order of approximation of various smoothness.**
Abstract. The fundamental three times continuously differentiated basic splines the sixth order of approximation of the minimal defect of the first height are constructed. The parities between basic splines of the sixth order of approximation of various smoothness are received.
Keywords: splines, approximation.

1. Введение. Хорошо известны полиномиальные сплайны минимального дефекта (B-сплайны [1]). Они участвуют в решении интерполяционной задаче Лагранжа построения приближения минимального дефекта по значениям функции. При решении задачи Эрмита кроме значений функции в узлах сетки используются значения производной. Количество производных, используемых при построении приближения, называем высотой. В данной работе будут построены фундаментальные трижды непрерывно дифференцируемые базисные сплайны шестого порядка аппроксимации первой высоты со свойствами, аналогичными B-сплайнам и коэффициенты перехода от предлагаемых базисных фундаментальных сплайнов к интерполяционным базисным сплайнам (см.[2]) шестого порядка аппроксимации первой и второй высоты. Переход от одних базисных сплайнов к другим возможен с помощью операции арифметического умножения соответствующих частей трижды непрерывно дифференцируемого базисного сплайна на найденные коэффициенты. Предложен способ приближения базисными сплайнами шестого порядка аппроксимации первой высоты. Приближение строится отдельно на каждом сеточном интервале в виде линейной комбинации базисных сплайнов с коэффициентами, представляющими собой значения функии и ее производных в некоторых соседних точках интерполяции. Предложен способ построения четырежды дифференцируемого приближения с помощью спдайнов второй высоты.

2. Построение трижды непрерывно дифференцируемых фундаментальных базисных сплайнов шестого порядка аппроксимации. Пусть $\{X_j\}$ — сетка упорядоченных равноотстоящих вещественных узлов:

$$\ldots < X_{j-1} < X_j < X_{j+1} < \ldots .$$

Для вычисления базисных функций $\omega_{j,i}$ на промежутке $[X_j, X_{j+1}]$ решаем систему уравнений

$$X_{j-1}^s\omega_{j-1,0}(x) + X_j^s\omega_{j,0}(x) + X_{j+1}^s\omega_{j+1,0}(x) + sX_{j-1}^{s-1}\omega_{j-1,1}(x)+$$

$$+sX_j^{s-1}\omega_{j,1}(x) + sX_{j+1}^{s-1}\omega_{j+1,1}(x) = \sum_{k=0}^{5} c_{(s+1)k}x^k, \quad s = 0, 1, \ldots, 5. \tag{1.1}$$

Аналогичные системы уравнений выписываем на соседних промежутках $[X_{j-1}, X_j]$ и $[X_{j+1}, X_{j+2}]$.

Неизвестные коэффициенты c_{iq}, $i = 1, \ldots, 6,\ q = 0, \ldots, 5$ будем находить так, чтобы на вещественной оси функции $\omega_{j,0}$ и $\omega_{j,1}$ были трижды непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяли условиям $\operatorname{supp}\ \omega_{j,1} = \operatorname{supp}\ \omega_{j,0} = [X_{j-1}, X_{j+2}]$, причем при $p = 0, 1, 2, 3$ выполнялись равенства

$\omega_{j+1,0}^{(p)}(X_{j+2}) = 0$, $\omega_{j+1,1}^{(p)}(X_{j+2}) = 0$, $\omega_{j-1,0}^{(p)}(X_{j-1}) = 0$, $\omega_{j-1,1}^{(p)}(X_{j-1}) = 0$, $\omega_{j-1,1}^{(p)}(X_j) = \omega_{j,1}^{(p)}(X_j)$, $\omega_{j-1,0}^{(p)}(X_j) = \omega_{j,0}^{(p)}(X_j)$.

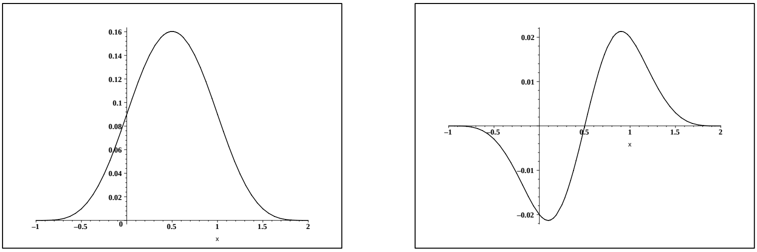
Так как количество неизвестных больше количества условий, то функции $\omega_{j,i}$ определяются неоднозначно. Приведем один из вариантов.

После замены $x = X_j + th$, $t \in [0, 1]$ и полагая $X_j = 0$, получаем шаблоны фундаментальных базисных сплайнов

$$\omega_{0,0}(th) = \begin{cases} -\frac{9h^4}{200}(-2+3t)(1+t)^4, & -h \leqslant t \leqslant 0, \\ \frac{9}{100}h^4 - \frac{9}{20}t^3h^4 + \frac{9}{40}h^4t + 940t^4h^4 & 0 \leqslant t \leqslant h, \\ \frac{9}{200}h^4(-1+3t)(-2+t)^4, & h \leqslant t \leqslant 2h, \end{cases}$$

$$\omega_{0,1}(th) = \begin{cases} -\frac{h^5}{200}(-4+11t)(1+t)^4, & -h \leqslant t \leqslant 0, \\ \frac{h^5}{200}(-1+2t)(4-38t^3+13t+19t^4+6t^2), & 0 \leqslant t \leqslant h, \\ \frac{h^5}{200}(-7+11t)(-2+t)^4, & h \leqslant t \leqslant 2h, \end{cases}$$

Ниже на рис.1 приведены графики функций $\omega_{0,0}$ и $\omega_{0,1}$ при $h = 1$.



а) $\omega_{0,0}(t)$ б) $\omega_{0,1}(t)$

Рис. 1: Графики функций $\omega_{0,0}(t)$ и $\omega_{0,1}(t)$.

Рассмотрим вопрос о построении приближений с различными свойствами при применении полученных базисных функций.

3. Коэффициенты перехода к базисным сплайнам шестого порядка апппроксимации первой высоты и построение этих сплайнов. Возьмем приближение $\widetilde{u}(x)$ к функции $u(x)$ в виде:

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{i=j-1,j,j+1} \Big(K_i\, u(X_i)\omega_{i,0}(x) + \widetilde{K}_i\, u'(X_i)\omega_{i,1}(x) \Big),$$

где $K_i = K_i(x)$, $\widetilde{K}_i = \widetilde{K}_i(x)$. С помощью представления $u(x_i)$ и $u'(x_i)$ по формуле Тейлора, получаем

$$\widetilde{u}(x) = u(x) \sum_{i=j-1,j,j+1} K_i\omega_{i,0}(x) +$$

$$+\sum_{s=1}^{5} u^{(s)}(x) \left(\sum_{i=j-1}^{j+1} \frac{(X_i-x)^s}{s!} K_i\omega_{i,0}(x) + \frac{(X_i-x)^{s-1}}{(s-1)!} \widetilde{K}_i\omega_{i,1}(x) \right) +$$

$$+\frac{1}{5!}\sum_{i=j-1}^{j+1}K_i\omega_{i,0}(x)\int_x^{X_i}u^{(6)}(t)(X_i-t)^5dt+$$

$$+\frac{1}{4!}\sum_{i=j-1}^{j+1}\widetilde{K}_i\omega_{i,0}(x)\int_x^{X_i}u^{(6)}(t)(X_i-t)^4dt.$$

Обозначим

$$U_1=K_{-1}\omega_{j-1,0}(x)+K_0\omega_{j,0}(x)+K_1\,\omega_{j+1,0}(x)-1,$$

$$U_s=\sum_{i=j-1}^{j+1}\frac{(X_i-x)^s}{s!}K_i\omega_{i,0}(x)+\frac{(X_i-x)^{s-1}}{(s-1)!}\widetilde{K}_i\omega_{i,1}(x),$$

$s=2,\ldots,6.$

$$R(x)=\frac{1}{5!}\sum_{i=j-1}^{j+1}K_i\omega_{i,0}(x)\int_x^{X_i}u^{(6)}(t)(X_i-t)^5dt+$$

$$+\frac{1}{4!}\sum_{i=j-1}^{j+1}\widetilde{K}_i\omega_{i,0}(x)\int_x^{X_i}u^{(6)}(t)(X_i-t)^4dt.$$

Решаем систему уравнений $U_s=0$, $s=1,2,\ldots,6$, относительно неизвестных K_{-1}, K_0, K_1, $\tilde{K}_{-1}$, $\tilde{K}_0$, $\tilde{K}_1$, зависящих от параметра x. В этом случае, очевидно, $\widetilde{u}(x)-u(x)=R(x)$.

Далее будем считать $X_j=th$. Переходя к переменной t с помощью соотношения $x=th+jh$, получим

$$K_{-1}(th+jh)=k_{-1}(t)=\frac{50}{9h^4}\,\frac{t^2(4+3t)}{(1-2t+t^2)(2+3t)},$$

$$K_0(th+jh)=k_0(t)=\frac{200}{9h^4}\,\frac{(1-2t^2+t^4)}{(5t^4-10t^3+5t+2)},$$

$$\tilde{K}_0(th+jh)=\tilde{k}_0(t)=\frac{200t}{h^4}\,\frac{(1-2t^2+t^4)}{(20t^2-95t^4-5t+50t^3+38t^5-4)},$$

$$K_1(th+jh)=k_1(t)=\frac{50}{9h^4}\,\frac{(-4-5t+2t^2+3t^3)}{t^2(-5+3t)},$$

$$\tilde{K}_1(th+jh) = \tilde{k}_1(t) = \frac{50}{48\,h^4}\,\frac{(-1-t+t^2+t^3)}{t^2(-15+11t)},$$

$$\tilde{K}_{-1}(th+jh) = \tilde{k}_{-1}(t) = \frac{50t^2}{h^4}\,\frac{(1+t)}{(4+3t-18t^2+11t^3)}.$$

Приближение $\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}(th+jh)$, $t \in [0,1]$, к функции $u(th+jh)$ на промежутке $[X_j, X_{j+1}]$ теперь получаем в виде

$$\widetilde{u}(th+jh) = k_{-1}(t)\,u(X_{j-1})\omega_{j-1,0}(t) + k_0(t)\,u(X_j)\omega_{j,0}(t) +$$

$$+k_1(t)\,u(X_{j+1})\omega_{j+1,0}(t) + \tilde{k}_{-1}(t)\,u'(X_{j-1})\omega_{j-1,1}(t) +$$

$$+\tilde{k}_0(t)\,u'(X_j)\omega_{j,1}(t) + \tilde{k}_1(t)\,u'(X_{j+1})\omega_{j+1,1}(t).$$

Далее с учетом выражений, получаемых в результате решения системы уравнений (1.1),

$$\omega_{11}(t) = -\frac{1}{200}(15h-11th)t^4h^4, \quad \omega_{01}(t) = \frac{9}{200}(5h-3th)t^4h^3,$$

$$\omega_{1-1}(t) = -\frac{1}{200}(-4h-11th)(h-th)^4,$$

$$\omega_{0-1}(t) = -\frac{9}{200h}(-2h-3th)(h-th)^4,$$

$$\omega_{01}(t) = \frac{1}{200}h^5(-1+2t)(6t^2-38t^3+13t+19t^4+4),$$

$$\omega_{00}(t) = -\frac{9}{20}t^3h^4 + \frac{9}{40}h^4t + \frac{9}{40}t^4h^4 + \frac{9}{100}h^4,$$

после преобразований, получим

$$\omega_{-1,0}(t)k_{-1}(t) = \frac{1}{4}(t-1)^2t^2(4+3t), \quad \omega_{0,0}(t)k_0(t) = 1-2t^2+t^4,$$

$$\omega_{1,0}(t)k_1(t) = -\frac{1}{4}(-4-5t+2t^2+3t^3)t^2,$$

$$\omega_{1,1}(t)\tilde{k}_1(t) = \frac{h}{4}(-1 - t + t^2 + t^3)t^2,$$

$$\omega_{-1,1}(t)\tilde{k}_{-1}(t) = \frac{1}{4}(1+t)t^2(-1+t)^2 h, \ \omega_{0,1}(t)\tilde{k}_0(t) = ht(1 - 2t^2 + t^4),$$

Эти произведения дают фрагменты кусочно заданных базисных непрерывно дифференцируемых сплайнов шестого порядка аппроксимации, например,

$$\Omega_{0,0}(t) = \omega_{0,0}(t)k_0(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant h,$$

$$\Omega_{0,1}(t) = \omega_{0,1}(t)\tilde{k}_0(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant h.$$

Теперь естественным образом приходим к приближению сплайнами первой высоты следующего вида:

$$\Omega_{0,0}(t) = \begin{cases} (-\frac{1}{4}(8t + 11t^2 + 3t^3 - 4)(1+t)^2, & -h \leqslant t \leqslant 0, \\ 1 - 2t^2 + t^4, & 0 \leqslant t \leqslant h, \\ \frac{1}{4}(t - 5t^2 + 3t^3 + 1)(-2+t)^2, & h \leqslant t \leqslant 2h, \end{cases}$$

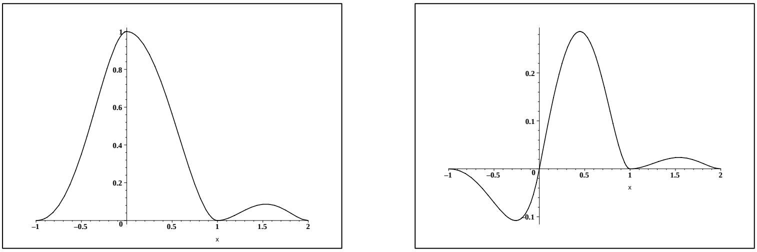
$$\Omega_{0,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}ht(4 + t^2 + 4t)(1+t)^2, & -h \leqslant t \leqslant 0, \\ ht(1 - 2t^2 + t^4), & 0 \leqslant t \leqslant h, \\ \frac{1}{4}ht(1 + t^2 - 2t)(-2+t)^2, & h \leqslant t \leqslant 2h. \end{cases}$$

$$\max_{t\in[0,1]} \omega_{0,1}(t)\tilde{k}_0(t) = -\frac{9}{32}h, \quad \max_{t\in[0,1]} \omega_{-1,1}(t)\tilde{k}_{-1}(t) = \frac{3}{128}h,$$

$$\max_{t\in[0,1]} \omega_{1,1}(t)\tilde{k}_1(t) = -\frac{441}{4096}h, \quad \max_{t\in[0,1]} \omega_{0,1}(t)\tilde{k}_1(t) = \frac{45}{128},$$

$$\max_{t\in[0,1]} \omega_{0,1}(t)\tilde{k}_0(t) = 1, \quad \max_{t\in[0,1]} \omega_{-1,0}(t)\tilde{k}_{-1}(t) = \frac{11}{128}.$$

Приведем графики, иллюстрирующие качество приближения на примере функции $u(x) = 1/(1+25x^2)$ на промежутке $[0,1]$. Для этого на промежутке $[0,1]$ построим сетку узлов X_k, $k = 0, \ldots, n$. Возьмем количество узлов сетки $n = 4$, тогда $X_k = kh$, где $h = 1/n$. Приближения $\tilde{u}(x)$ будем строить в узлах вспомогательной сетки,



а) $\Omega_{0,0}(t)$ б) $\Omega_{0,1}(t)$

Рис. 2: Графики функций $\Omega_{0,0}(t)$ и $\Omega_{0,1}(t)$.

выбирая ее на каждом промежутке X_k следующим образом: $\tilde{X}_j = kh + jh_1$, $h_1 = h/10$.

4. Коэффициенты перехода к базисным сплайнам шестого порядка апппроксимации второй высоты и построение этих сплайнов. Рассмотрим теперь приближение в следующем виде:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=j-1}^{j+1} \left(\alpha_0^k(x)u(x_k) + \alpha_1^k(x)u'(x_h) + \alpha_2^k(x)u''(x_h)\right)\omega_{k,0}(x) +$$

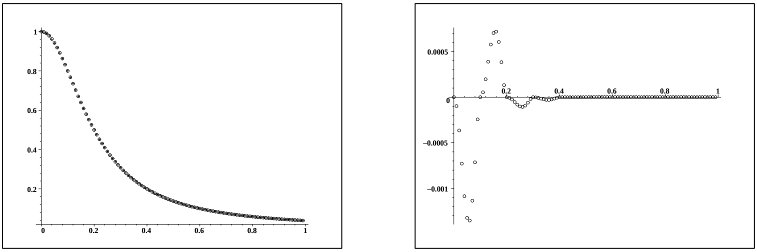
$$+ \sum_{k=j-1}^{j+1} \left(\beta_0^k(x)u(x_k) + \beta_1^k(x)u'(x_h) + \beta_2^k(x)u''(x_h)\right)\omega_{k,1}(x).$$

Представляя $u(x_k)$, $u'(x_k)$, $u''(x_k)$ с помощью формулы Тейлора в окрестности точки x, получаем

$$\tilde{u}(x) - u(x) = \sum_{k=j-1}^{j+1} u(x)(U_{0,k}^A + U_{0,k}^B) + u'(x)(U_{1,k}^A + U_{1,k}^B) +$$

$$+u''(x)(U_{2,k}^A + U_{2,k}^B) + u'''(x)(U_{3,k}^A + U_{3,k}^B) + u^{1V}(x)(U_{4,k}^A + U_{4,k}^B) +$$

$$+u^V(x)(U_{5,k}^A + U_{5,k}^B) + R_1,$$



а) функция и приближение б) погрешность

Рис. 3: Графики функции, приближения и погрешности.

где R_1 — остаток,

$$U_{0,k}^A = \sum_{k=j-1}^{j+1} \alpha_0^k(x)\omega_{k,0}(x) - 1, \quad U_{0,k}^B = \sum_{k=j-1}^{j+1} \beta_0^k(x)\omega_{k,1}(x),$$

$$U_{s,k}^A = \sum_{k=j-1}^{j+1} \left(\alpha_0^k(x)\frac{(x_k - x)^s}{s!} + \alpha_1^k(x)\frac{(x_k - x)^{s-1}}{(s-1)!} + \right.$$

$$\left. +\alpha_2^k(x)\frac{(x_k - x)^{s-2}}{(s-2)!} \right) \omega_{k,0}(x),$$

$$U_{s,k}^B = \sum_{k=j-1}^{j+1} \left(\frac{(x_k - x)^s}{s!}\beta_0^k(x) + \frac{(x_k - x)^{s-1}}{(s-1)!}\beta_1^k(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x_k - x)^{s-2}}{(s-2)!}\beta_2^k(x) \right) \omega_{k,1}(x),$$

$$s = 1, \ldots, 5.$$

Решая систему уравнений $U_{0,k}^A = 0$, $U_{1,k}^A = 0$, $U_{2,k}^A = 0$, $U_{3,k}^A = 0$, $U_{4,k}^A = 0$, $U_{5,k}^A = 0$, получаем $\alpha_0^j(x)$, $\beta_0^{j+1}(x)$, $\alpha_1^j(x)$, $\beta_1^{j+1}(x)$, $\alpha_2^j(x)$, $\beta_1^{j+1}(x)$. Далее подставляя $x = jh + th$, приходим к выражениям

$$k_0(t) = \alpha_0^j(x) = -\frac{200}{9\ h^4}\frac{(-15t^4 - 1 + 6t^5 + 10t^3)}{(-10t^3 + 5t + 5t^4 + 2)},$$

$$sk_0(t) = \beta_0^{j+1}(x) = \frac{200}{h^5 t}\frac{(-15t + 6t^2 + 10)}{(-15 + 11t)},$$

$$k_1(t) = \alpha_1^j(x) = -\frac{200}{9\ h^3}\frac{t(-8t^3 + 3t^4 - 1 + 6t^2)}{(-10t^3 + 5t + 5t^4 + 2)},$$

$$sk_1(t) = \beta_1^{j+1}(x) = -\frac{200}{h^4 t}\frac{(-7t + 3t^2 + 4)}{(-15 + 11t)},$$

$$k_2(t) = \alpha_2^j(x) = -\frac{100}{9\ h^2}\frac{t^2(-3t^2 - 1 + t^3 + 3t)}{(-10t^3 + 5t + 5t^4 + 2)},$$

$$sk_2(t) = \beta_1^{j+1}(x) = -\frac{100}{9\ h^2}\frac{t(-2t + t^2 + 1)}{(-5 + 3t)}.$$

При значениях этих парамеров получаем

$$\omega_{1,1}(t)sk_0(t) = (6t^2 - 15t + 10)t^3,$$

$$\omega_{1,0}(t)k_1(t) = \frac{h(3t-5)t^5(3t^4 - 8t^3 + 6t^2 - 1)}{(-10t^3 + 5t + 5t^4 + 2)},$$

$$\omega_{0,0}(t)k_1(t) = -ht(3t^4 - 8t^3 + 6t^2 - 1),$$

$$\omega_{1,0}(t)k_1(t) = 1/2(t^2 - 2t + 1)t^3h^2,$$

$$\omega_{0,0}(t)k_2(t) = -\frac{1}{2}h^2t^2(t^3 - 3t^2 + 3t - 1),$$

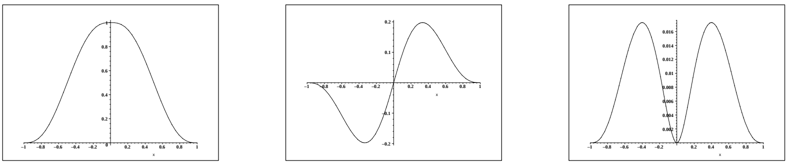
$$\omega_{0,0}(t)k_0(t) = 15t^4 + 1 - 6t^5 - 10t^3.$$

Отсюда легко находим выражения для дважды непрерывно дифференцируемых базисных функций шестого порядка аппроксимации, таких что $W_{j,i}$, $supp\ W_{j,i} = [X_{j-1}, X_{j+1}]$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ (рис. 4)

$$W_{j,0}(th + jh) = \begin{cases} 15t^4 + 1 + 6t^5 + 10t^3, & th + jh \in [(j-1)h, jh], \\ 15t^4 + 1 - 6t^5 - 10t^3, & th + jh \in [jh, (j+1)h], \end{cases}$$

$$W_{j,1}(th+jh) = \begin{cases} -ht(3t^4+8t^3+6t^2-1), & th+jh \in [(j-1)h, jh], \\ -ht(3t^4-8t^3+6t^2-1), & th+jh \in [jh, (j+1)h], \end{cases}$$

$$W_{j,2}(th+jh) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ h^2t^2(t^3+3t^2+3t+1), & th+jh \in [(j-1)h, jh], \\ -\frac{1}{2}\ h^2t^2(t^3-3t^2+3t-1), & th+jh \in [jh, (j+1)h]. \end{cases}$$



а) $W_{1,0}(t)$ б) $W_{1,1}(t)$ в) $W_{1,2}(t)$

Рис. 4: Графики функций $W_{1,0}(t)$, $W_{1,1}(t)$ и $W_{1,2}(t)$.

Замечание. Нетрудно видеть, что для погрешности приближения справедлива оценка $|R| \le Ch^6\|u^{(6)}\|$, $|R_1| = C_1h^6\|u^{(6)}\|$, где C, C_1 — некоторые константы.

5. Построение трижды непрерывно дифференцируемых приближений с помощью сплайнов шестого порядка аппроксмации второй высоты

Пусть N — натуральное число, $N > 3$. На промежутке $[a,\ b]$ построим сетку упорядоченных узлов $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$. Предполагаем, что в точках x_j заданы значения функции $f(x_j)$.

На промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ приближение $\widetilde{f^+}(t)$ для функции $f(t)$ в случае применения сплайнов шестого порядка аппроксимации второй высоты имеет вид

$$\widetilde{f^+}(t) = f(x_j)W_{j,0}(t) + f(x_{j+1})W_{j+1,0}(t) + f'(x_j)W_{j,1}(t) +$$
$$+ f'(x_{j+1})W_{j+1,1}(t) + f''(x_j)W_{j,2}(t) + f''(x_{j+1})W_{j+1,2}(t), \qquad (5.1)$$

где

$$W_{j,2}(t)=\frac{(x_{j+1}-t)^3\,(t-x_j)^2}{2\,(x_{j+1}-x_j)^5},\quad W_{j+1,2}(t)=\frac{(x_j-t)^3\,(t-x_{j+1})^2}{2\,(x_j-x_{j+1})^5}, \tag{5.2}$$

$$W_{j,1}(t)=\frac{(x_{j+1}-t)^3\,(t-x_j)\,(x_{j+1}-4\,x_j+3\,t)}{(x_{j+1}-x_j)^5}, \tag{5.3}$$

$$W_{j+1,1}(t)=\frac{(x_j-t)^3\,(t-x_{j+1})\,(x_j-4\,x_{j+1}+3\,t)}{(x_{j+1}-x_j)^5}, \tag{5.4}$$

$$W_{j,0}(t)=\frac{(x_{j+1}-t)^3(6\,(x_j-t)^2+3(x_j-x_{j+1})(x_j-t)+(x_j-x_{j+1})^2)}{(x_{j+1}-x_j)^5}, \tag{5.5}$$

$$W_{j+1,0}(t)=\frac{(x_j-t)^3(6(x_{j+1}-t)^2+3(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-t)+(x_{j+1}-x_j)^2)}{(x_j-x_{j+1})^5}. \tag{5.6}$$

Заменим теперь $f'(x_j)$ на M_j, $f'(x_{j+1})$ на M_{j+1}, $f''(x_j)$ на P_j, $f''(x_{j+1})$ на P_{j+1}. Таким образом, приближение будем брать в виде

$$\widetilde{f^+}(t)=f(x_j)W_{j,0}(t)+f(x_{j+1})W_{j+1,0}(t)+M_jW_{j,1}(t)+$$

$$+M_{j+1}W_{j+1,1}(t)+P_jW_{j,2}(t)+P_{j+1}W_{j+1,2}(t), \tag{5.7}$$

где неизвестные коэффициенты M_j, M_{j+1}, P_j, P_{j+1} определяем далее.

Нам потребуются производные от выражений $W_{j,0}(t)$, $W_{j,1}(t)$, $W_{j+1,0}(t)$, $W_{j+1,1}(t)$, $W_{j,2}(t)$, $W_{j+1,2}(t)$ третьего и четвертого порядков в точках x_j. Выпишем их.

Для $W_{j,2}(t)$ и $W_{j+1,2}(t)$ из (1.2) получаем

$$W'''_{j,2}(x_j)=-\frac{9}{(x_{j+1}-x_j)^3},\quad W''''_{j,2}(x_j)=\frac{36}{(x_{j+1}-x_j)^4},$$

$$W'''_{j+1,2}(x_j)=\frac{3}{(x_{j+1}-x_j)^3},\quad W''''_{j+1,2}(x_j)=-\frac{24}{(x_{j+1}-x_j)^4}.$$

Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 1(12). ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2010. Issue 1(12). ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Для $W_{j,1}(t)$ и $W_{j+1,1}(t)$ из (1.3), (1.4) получаем

$$W'''_{j,1}(x_j) = -\frac{36}{(x_{j+1}-x_j)^3}, \quad W''''_{j,1}(x_j) = \frac{192}{(x_{j+1}-x_j)^4},$$

$$W'''_{j+1,1}(x_j) = -\frac{24}{(x_{j+1}-x_j)^3}, \quad W''''_{j+1,1}(x_j) = \frac{168}{(x_{j+1}-x_j)^4}.$$

Для $W_{j,0}(t)$ и $W_{j+1,0}(t)$ из (1.5), (1.6) получаем

$$W'''_{j,0}(x_j) = -\frac{60}{(x_{j+1}-x_j)^3}, \quad W''''_{j,0}(x_j) = \frac{360}{(x_{j+1}-x_j)^4},$$

$$W'''_{j+1,0}(x_j) = -\frac{60}{(x_j-x_{j+1})^3}, \quad W''''_{j+1,0}(x_j) = -\frac{360}{(x_j-x_{j+1})^4}.$$

На соседнем промежутке $[x_{j-1}, x_j]$ приближение $\widetilde{f^-}(t)$ для функции $f(t)$ в случае применения сплайнов шестого порядка аппроксимации второй высоты имеет вид

$$\widetilde{f^-}(t) = f(x_{j-1})W_{j-1,0}(t) + f(x_j)W_{j,0}(t) + f'(x_{j-1})W_{j-1,1}(t) +$$
$$+ f'(x_j)W_{j,1}(t) + f''(x_{j-1})W_{j-1,2}(t) + f''(x_j)W_{j,2}(t), \tag{5.8}$$

где

$$W_{j-1,2}(t) = \frac{(x_j-t)^3\,(t-x_{j-1})^2}{2\,(x_j-x_{j-1})^5}, \quad W_{j,2}(t) = \frac{(x_{j-1}-t)^3\,(t-x_j)^2}{2\,(x_{j-1}-x_j)^5}, \tag{5.9}$$

$$W_{j-1,1}(t) = \frac{(x_j-t)^3\,(t-x_{j-1})\,(x_j-4\,x_{j-1}+3\,t)}{(x_j-x_{j-1})^5}, \tag{5.10}$$

$$W_{j,1}(t) = \frac{(x_{j-1}-t)^3(t-x_j)\,(x_{j-1}-4\,x_j+3\,t)}{(x_j-x_{j-1})^5}, \tag{5.11}$$

$$W_{j-1,0}(t) = \frac{(x_j-t)^3(6(x_{j-1}-t)^2+3(x_{j-1}-x_j)(x_{j-1}-t)+(x_{j-1}-x_j)^2)}{(x_j-x_{j-1})^5}, \tag{5.12}$$

$$W_{j,0} = \frac{(x_{j-1}-t)^3\,(6\,(x_j-t)^2+3\,(x_j-x_{j-1})\,(x_j-t)+(x_j-x_{j-1})^2)}{(x_{j-1}-x_j)^5}. \tag{5.13}$$

Заменим $f'(x_{j-1})$ на M_{j-1}, $f'(x_j)$ на M_j, $f''(x_{j-1})$ на P_{j-1}, $f''(x_j)$ на P_j. Рассмотрим на этом промежутке вместо (5.8) следующее выражение:

$$\widetilde{f^-}(t) = f(x_{j-1})W_{j-1,0}(t) + f(x_j)W_{j,0}(t) + M_{j-1}W_{j-1,1}(t) +$$

$$+ M_jW_{j,1}(t) + P_{j-1}W_{j-1,2}(t) + P_jW_{j,2}(t), \qquad (5.14)$$

где неизвестные коэффициенты M_j, M_{j-1}, P_j, P_{j-1} определим далее.

Нам потребуются значения производных от $W_{j,0}(t)$, $W_{j-1,0}(t)$, $W_{j,1}(t)$, $W_{j-1,1}(t)$, $W_{j,2}(t)$, $W_{j-1,2}(t)$ третьего и четвертого порядков в точке x_j.

Для $W_{j-1,2}(t)$ и $W_{j,2}(t)$ из (1.9) получаем

$$W'''_{j-1,2}(x_j) = -\frac{3}{(x_j - x_{j-1})^3}, \quad W''''_{j-1,2}(x_j) = -\frac{24}{(x_j - x_{j-1})^4},$$

$$W'''_{j,2}(x_j) = \frac{9}{(x_j - x_{j-1})^3}, \quad W''''_{j+1,2}(x_j) = \frac{36}{(x_j - x_{j-1})^4}.$$

Для $W_{j-1,1}(t)$ и $W_{j,1}(t)$ из (1.10), (1.11) получаем

$$W'''_{j-1,1}(x_j) = -\frac{24}{(x_j - x_{j-1})^3}, \quad W''''_{j-1,1}(x_j) = -\frac{168}{(x_j - x_{j-1})^4},$$

$$W'''_{j,1}(x_j) = -\frac{36}{(x_j - x_{j-1})^3}, \quad W''''_{j,1}(x_j) = -\frac{192}{(x_j - x_{j-1})^4}.$$

Для $W_{j-1,0}(t)$ и $W_{j,0}(t)$ из (1.12), (1.13) получаем

$$W'''_{j-1,0}(x_j) = -\frac{60}{(x_j - x_{j-1})^3}, \quad W''''_{j-1,0}(x_j) = -\frac{360}{(x_j - x_{j-1})^4},$$

$$W'''_{j,0}(x_j) = \frac{60}{(x_j - x_{j-1})^3}, \quad W''''_{j,0}(x_j) = \frac{360}{(x_j - x_{j-1})^4}.$$

Выберем M_i и P_i, $i = j-1, j, j+1$, из условия

$$\widetilde{f^-}^{(\alpha)}(x_j) = \widetilde{f^+}^{(\alpha)}(x_j), \quad \alpha = 3, 4.$$

Таким образом, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -6P_1 + P_2 - 8M_2 = G_1; \\ P_{j-1} - 6P_j + P_{j+1} + 8M_{j-1} - 8M_{j+1} = G_j, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = 2, \dots, N-1; \\ P_{N-1} - 6P_N + 8M_{N-1} = G_N; \\ P_{N+2} + 16M_{N+1} + 7M_{N+2} = G_{N+1}; \\ P_{j-1} + P_{j+1} + 7M_{j-1} + 16M_j + 7M_{j+1} = G_, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = N+2, \dots, 2N-1; \\ P_{2N-1} + 7M_{2N-1} + 16M_{2N} = G_{2N}, \end{cases} \tag{5.15}$$

где правые части уравнений (в случае сетки узлов с постоянным шагом $h = x_{j+1} - x_j$) имеют вид

$$\begin{cases} G_1 = -15(f(x_0) - f(x_2)) - 7f'(x_0)h - f''(x_0)h^2; \\ G_i = 15(f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 2, \dots, N-1; \\ G_N = -15(f(x_{N-1}) - f(x_{N+1})) - 7f'(x_{N+1})h + f''(x_{N+1})h^2; \\ G_{N+1} = 20(f(x_1) - f(x_0)) + 20(f(x_1) - f(x_2)) - \\ -8f'(x_0)h - f''(x_0)h^2; \\ G_{i+N+1} = 20(f(x_i) - f(x_{i-1})) + 20(f(x_i) - f(x_{i+1})), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \dots, N-2; \\ G_{2N} = 20(f(x_N) - f(x_{N-1})) + 20(f(x_N) - f(x_{N+1})) + \\ +8f'(x_{N+1})h - f''(x_{N+1})h^2. \end{cases}$$

В случае $N = 3$ матрица системы уравнений (1.15) имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -6, & 1, & 0, & 0, & -8, & 0 \\ 1, & -6, & 1, & 8, & 0, & -8 \\ 0, & 1, & -6, & 0, & 8, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 16, & 7, & 0 \\ 1, & 0, & -1, & 7, & 16, & 7 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 7, & 16 \end{pmatrix}.$$

Матрица Q очевидным образом распадается на четыре блока:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -6, & 1, & 0, \\ 1, & -6, & 1, \\ 0, & 1, & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0, & -8, & 0 \\ 8, & 0, & -8 \\ 0, & 8, & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0, \\ 1, & 0, & -1, \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 16, & 7, & 0 \\ 7, & 16, & 7 \\ 0, & 7, & 16 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица системы уравнений Q может быть приведена к виду

$$Q_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1 = D/8$, $D_1 = -A$, $C_1 = B/8$, $B_1 = -C$.

В случае $N = 3$ получаем

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2, & 7/8, & 0, \\ 7/8, & 2, & 7/8, \\ 0, & 7/8, & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0, \\ 1, & 0, & -1, \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 6, & -1, & 0 \\ -1, & 6, & -1 \\ 0, & -1, & 6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\det(M_1) = \det(A_1)\det(D_1 - C_1 A_1^{-1} B_1) \neq 0,$$

так как матрица $D_1 = C_1 A_1^{-1} B_1$ есть матрица с диагональным преобладанием, и, следовательно, не вырождена.

Решив систему уравнений (1.15), получаем приближение $\widetilde{f} \in C^4[a,b]$ в виде

$$\widetilde{f}(t) = M_i \, \frac{(x_{i+1} - t)^3 \, (t - x_i) \, (x_{i+1} - x_i - 3\,(x_i - t))}{(x_{i+1} - x_i)^5} +$$

$$+ M_{i+1} \, \frac{(x_i - t)^3 \, (t - x_{i+1}) \, (x_i - x_{i+1} - 3\,(x_{i+1} - t))}{(x_{i+1} - x_i)^5} +$$

$$+P_{i+N}\,\frac{(x_{i+1}-t)^3\,(t-x_i)^2}{2\,(x_{i+1}-x_i)^5}+P_{i+1+N}\,\frac{(x_i-t)^3\,(t-x_{i+1})^2}{2\,(x_i-x_{i+1})^5}+$$

$$+f(x_i)\frac{(x_{i+1}-t)^3(6(x_i-t)^2+3(x_i-x_{i+1})(x_i-t)+(x_i-x_{i+1})^2)}{(x_{i+1}-x_i)^5}+$$

$$+f(x_{i+1})\frac{(x_i-t)^3(6(x_{i+1}-t)^2+3(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-t)+(x_{i+1}-x_i)^2)}{(x_i-x_{i+1})^5}.$$

Литература

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

2. *Бурова И.Г., Демьянович Ю.К.* Минимальные сплайны и их приложения. СПб.: Издательство СПбГУ, 2010. 364 с.

Бурова Ирина Герасимовна — д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры вычислительной математики, а также кафедры параллельных алгоритмов математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: разработка и применение сплайновых приближений, распараллеливание вычислений. Количестово научных публикаций — более 100. BurovaIG@mail.ru, Университетский пр., дом 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, 198504, Россия, р.т. +7(812)428-4227,

Irina G. Burova — PhD in Computational Science, Professor of the Department of Computational Mathematics, Professor of the Parallel Algorithms Department,Mathematics and Mechanics Faculty, St. Petersburg State University (SPbSU). Research area: the development splines and its applications. Number of publications — more then 100. BurovaIG@mail.ru, office phone +7(812)428-4227.

Поддержка исследований. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты № 10-01-00297а, 10-01-00245а.

Рекомендовано кафедрой параллельных алгоритмов, зав. каф. Ю.К. Демьянович.

Статья поступила в редакцию 22.11.2010.

РЕФЕРАТ

Бурова И.Г. **О базисных сплайнах шестого порядка аппроксимации различной гладкости.**

Хорошо известны полиномиальные сплайны минимального дефекта (B-сплайны). Они участвуют в решении интерполяционной задачи Лагранжа. Обычно применяется следующий подход к построению гладкого приближения. Решаем систему уравнений с использованием значений приближаемой функции в узлах сетки, затем строим сплайн минимального дефекта.

При решении задачи Эрмита кроме значений функции в узлах сетки используются значения производных функции в узлах сетки. Число производных, применяемых при построении приближения, называем высотой.

В данной работе построены фундаментальные полиномиальные трижды непрерывно дифференцируемые базисные сплайны шестого порядка аппроксимации первой высоты со свойствами, аналогичными B-сплайнам. Они состоят из двух базисных сплайнов, носитель каждого из которых занимает три сеточных интервала.

В ряде случаев для построения приближения удобно использовать локальные интерполяционные базисные сплайны. Преимущество этого подхода состоит в том, что решение строится отдельно на каждом сеточном интервале и обладает свойством гладкости определенного порядка на всем промежутке интерполяции. Приближение строиться в виде суммы произведений значений функции (и, возможно, ее производных в узлах сетки) и интерполяционных базисных сплайнов. Решение систем уравнений при этом не предполагается.

В этой статье получены соотношения между базисными фундаментальными эрмитовыми сплайнами и базисными локальными интерполяционными эрмитовыми сплайнами шестого порядка аппроксимации. Найдены коэффициенты, с помощью которых можно легко построить базисные интерполяционные сплайны шестого порядка аппроксимации первой высоты исходя из фундаментальных эрмитовых базисных сплайнов шестого порядка интерполяции. Получены формулы новых интерполяционных базисных сплайнов шестого порядка аппроксимации первой высоты. Показано, как можно построить приближение шестого порядка аппроксимации четвертой гладкости при применении базисных сплайнов шестого порядка аппроксимации второй высоты.

Приведены графики всех базисных сплайнов, полученных в этой работе и графики, иллюстрирующие качество приближения с использованием рассматриваемых сплайнов.

SUMMARY

Burova I.G. **About basic splines of the sixth order of approximation of various smoothness.**

The polynomial splines of the minimal defect (B-splines) are well-known. They participate in the decision of the Lagrange interpolation problem. The most known way of the construction of smooth approximation is following. We solve the system of equations with using of values of approached function in knots of a grid, then we build a spline of the minimal defect.

At the decision of Hermite problem together with values of function in knots of a grid we also use values of derivatives of this function in knots of a grid. The quantity of the derivatives that applied at construction of approximation, we call the level of approximation.

In the this work three times continuously differentiated fundamental polynomial basic splines of the sixth order of approximation are constructed. They have the properties similar B-splines. There are two parts in basic splines, the support of each of them occupies three net intervals.

In some cases for construction of approximation it is convenient to use local interpolation basic splines. Advantage of this approach is that the decision build separately on everyone net interval with the certain order property of smoothness on all interval of interpolation. Approximation to be under construction is in the form of the sum of the products values of function (and, probably, its derivatives in knots of a grid) and interpolating basic splines. The decision of any system of the equations it is not supposed.

In this article parities are received between basic fundamental Hermite splines and basic local interpolational Hermite splines of the sixth order approximations. Factors by means of which it is possible to construct basic splines are found. Interpolational splines of the sixth order of approximation of the first level proceeding from fundamental Hermite basic splines of the sixth order of interpolation. New formulas are received for interpolational basic splines of the sixth order approximations of the first level. It is shown, how it is possible to construct approximation of the sixth order with the fourth smoothnesses by application of basic splines of the sixth order of approximation of the second level.

Schedules of all basic splines received in this work and the quality of numeric approximation with splines are represented.