УДК 519+519.4

С.П. Соколова, О.И. Ширяева

АГРЕГАТИРОВАННАЯ СИСТЕМА СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Соколова С.П., Ширяева О.И. **Агрегатированная система сравнения для интервальной системы управления.**

Аннотация. Представлены результаты развития метода векторных функций Ляпунова и принципа сравнения на класс интервальных систем управления. Представлена процедура построения и исследования динамических свойств агрегатированной системы сравнения для многомерной интервальной системы управления.

Ключевые слова: интервальная система, агрегатированная система сравнения, исследование динамических свойств.

Sokolova S.P., Shiryayeva O.I. **Aggregated composite system to interval control system.**

Abstract. Procedure of construction and research of dynamical properties of the aggregated composite system for interval control system is presented. Results of Lyapunov's method development on the objects with parametrical uncertainty class for the purpose of reception of composite model for separate subsystems and their aggregation in system are offered.

Keywords: interval system, equal-deflection method, aggregation composite system.

1. Введение. Сложные системы управления, как правило, включают в себя набор взаимодействующих определенным образом подсистем, математические модели которых имеют разнообразную динамику, большую размерность, неопределенности (координатные и параметрические), различные области функционирования. При переходе из одной области функционировании в другую в них могут происходить структурные изменения. К числу таких систем можно отнести следующие:

— электроэнергетические, функционирующие в условиях возникновения и развития аварийных ситуаций (короткие замыкания, обрывы линий, отключение и подключение нагрузок и т. д.);

— экономические, включающие в себя развитие и структурные преобразования при изменении выпуска и номенклатуры продукции в соответствии со структурой спроса и предложения;

— природно-экологические с особо опасными динамическими процессами: восходящая и нисходящая ветви эпизоотических процессов, периоды депрессии до и после них;

— распределенные компьютерные сети: режимы нормального и абнормального функционирования (режим вторжения) и т. д.

Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова (ВФЛ) [1] позволяет построить агрегатированную систему сравнения, имеющую, как правило, математическую модель более простой структуры и меньшей размерности (размерность определяется числом входящих подсистем), но эквивалентной исходной системе по динамическим свойствам. Благодаря исследованиям В.М. Матросова, С.Н. Васильева и др. [2, 3] на основе принципа сравнения был развит ВФЛ-метод нелинейного динамического анализа систем разнообразной природы, нашедший многочисленные приложения в исследованиях крупномасштабных систем управления с точечными значениями параметров. Развитие принципа сравнения на класс неопределенных систем с неопределенностью интервального типа неоднозначно, так как из-за отсутствия полноценной дистрибутивности интервального пространства большинство задач интервального анализа являются NP-трудными. Это приводит к необходимости использовать внешние и внутренние оценки соответствующих множеств решений. Построение агрегатированной системы сравнения для многомерной интервальной системы управления позволяет значительно облегчить вычислительные трудности.

Ниже представлено решение задачи построения и исследования динамических свойств агрегатированной системы сравнения на основе использования ВФЛ и принципа сравнения для многомерной интервальной системы управления.

2. Построение уравнений сравнения для отдельных подсистем интервальной системы управления. Пусть математическая модель интервальной системы управления, имеет вид:

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + Bu(t)\,, \; x(t_0) = x_0\,, \tag{1}$$

где $t \in [t_0, \infty)$ — непрерывное время; $t_0 \in R$ — начальный момент времени; $\boldsymbol{A} \in IR^{n \times n}$ — интервальная матрица с элементами [4]

$$\boldsymbol{A} = \; \boldsymbol{a}_{ij} \left| \boldsymbol{a}_{ij} = \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right], \quad i, j = \overline{1, n} \right. \;,$$

$\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \in R$ — соответственно нижняя и верхняя границы значений элементов матрицы $\boldsymbol{A}$; $IR^{n \times n}$ — множество интервальных матриц размерности $(n \times n)$, элементами которых являются вещественные интервалы; $B \in R^{n \times m}$ — матрица размерностью $n \times m$ с элементами

$$B = \left\{ b_{ij} : i = \overline{1, n},\, j = \overline{1, m} \right\},$$

$u(t) \in R^m$ — векторное управление.

Пусть векторное управление имеет вид [5]:

$$u(t) = -Cx(t)\,, \tag{2}$$

где $C \in R^{m \times n}$ — точечная матрица размерностью $m \times n$ с элементами

$$C = \left\{ c_{ij} : i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n} \right\}.$$

С учетом (2) получим математическую модель замкнутой интервальной системы управления в виде

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{D}x(t) = (\boldsymbol{A} - BC)x(t)\,, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{D} \in IR^{n \times n}$ — интервальная матрица размерностью $(n \times n)$ с элементами

$$n \ = \ \boldsymbol{d}_{ij} \left| \boldsymbol{d}_{ij} = \left[\underline{d}_{ij}, \overline{d}_{ij} \right],\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n} \right. \ \ ,\ \ \underline{d}_{ij}, \overline{d}_{ij} \in R\,.$$

Процедура построения уравнений сравнения состоит из нескольких этапов [5]:

— декомпозиции (3) на отдельные подсистемы;

— построения уравнений сравнения для отдельных подсистем и агрегатированной системы сравнения.

Для декомпозиции исходной интервальной системы управления (3) на отдельные подсистемы воспользуемся каскадным типом декомпозиции. В результате ее применения математическая модель исходной системы управления (3) будет иметь структуру, состоящую из $S_k,\ k = \overline{1, l}$, подсистем, связанных между собой различными входо-выходными связями. Каждая подсистема будет представляться математической моделью

$$S_k : \left\{ \dot{x}_k(t) = \boldsymbol{D}_k x_k(t) + \sum_{\substack{k \neq v \\ v=1}}^{l} D_{kv} x_v, \quad k = \overline{1, l}\,, \right. \tag{4}$$

где $x_k(t) \in R^{n_k}$ — вектор состояний k-ой подсистемы; $\sum_{k=1}^{l} n_k = n$,

$\boldsymbol{D}_k \in IR^{n_k \times n_k}$ — интервальные матрицы размерностью $n_k \times n_k$ с элементами

$$n_n = \ \boldsymbol{d}_{ij}^k \left| \boldsymbol{d}_{ij}^k = \left[\underline{d}_{ij}^k, \overline{d}_{ij}^k \right],\ i, j = \overline{1, n_k} \right. \ \ , \quad k = \overline{1, l}, \quad \underline{d}_{ij}^k, \overline{d}_{ij}^k \in R\,,$$

$D_{kv} \in R^{n_k \times n_v}$ — точечные матрицы соответственно размерностью $n_k \times n_v$ с элементами

$$D_{kv} = \left\{ d_{ij}^{kv} \middle| i = \overline{1, n_k},\ j = \overline{1, n_v} \right\}, \quad k, v = \overline{1, l}, \quad k \neq v .$$

Матрица $\boldsymbol{D}$ в блочном виде может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} \underset{(n_1 \times n_1)}{\boldsymbol{D}_1} & \underset{(n_1 \times n_2)}{D_{12}} & \dots & \underset{(n_1 \times n_l)}{D_{1l}} \\ \underset{(n_2 \times n_1)}{D_{21}} & \underset{(n_2 \times n_2)}{\boldsymbol{D}_2} & \dots & \underset{(n_2 \times n_l)}{D_{2l}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underset{(n_l \times n_1)}{D_{l1}} & \underset{(n_l \times n_2)}{D_{l2}} & \dots & \underset{(n_l \times n_l)}{\boldsymbol{D}_l} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{D}_k \in IR^{n_k \times n_k}$, $k = \overline{1, l}$ — диагональные матрицы, определяющие собственную динамику подсистем, $D_{kv} \in M_{n_k, n_v}(R)$, $n_k \neq n_v$, $k, v = \overline{1, l}$ — внедиагональные матрицы связи, определяющие взаимосвязи между подсистемами.

Рассмотрим процедуру построения уравнений сравнения для отдельных подсистем S_k, $k = \overline{1, l}$, без учета взаимосвязей между подсистемами, т. е. при условии, что матрицы

$$D_{kv} \equiv 0_{n_k \times n_v}, \quad k, v = \overline{1, l} .$$

Математические модели для изолированных подсистем в соответствии с (4) представляются в следующем виде:

$$S_k : \dot{x}_k(t) = \boldsymbol{D}_k x_k(t), \quad k = \overline{1, l} . \tag{5}$$

Чтобы построить уравнения сравнения для (4), выберем ВФЛ в виде знакоопределенных положительных квадратичных форм:

$$\boldsymbol{V}_k(x_k) = x_k^T(t) \boldsymbol{H}_k x_k(t), \quad k = \overline{1, l} , \tag{6}$$

где $\boldsymbol{H}_k$ — симметрические, положительно-определенные интервальные матрицы $\boldsymbol{H_k} = \boldsymbol{H_k}^T \rhd 0$, размерности $n_k \times n_k$:

$$\boldsymbol{H}_k^{sym} = \left[\underline{H}_k^{sym}, \overline{H}_k^{sym} \right] =$$

$$= \left\{ H_k \in R^{n_k \times n_k} \middle| H_k \in \boldsymbol{H}_k, \quad \underline{H}_k^{sym} = \left(\underline{H}_k^{sym} \right)^T \rhd 0, \quad \overline{H}_k^{sym} = \left(\overline{H}_k^{sym} \right)^T \rhd 0 \right\}.$$

Выбранные матрицы $\boldsymbol{H}_k$ удовлетворяют интервальным матричным уравнениям Ляпунова:

$$\boldsymbol{D}_k^T \boldsymbol{H}_k + \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{D}_k = -\boldsymbol{G}_k^{sym}, \quad k = \overline{1,l}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{G}_k^{sym}$ — произвольно задаваемые интервальные симметрические положительно определенные матрицы $\boldsymbol{G}_k^{sym} = \left(\boldsymbol{G}_k^{sym}\right)^T$, $\boldsymbol{G}_k^{sym} \rhd 0$,= размерности $n_k \times n_k$, такие, что:

$$\boldsymbol{G}_k^{sym} = \left[\underline{G}_k^{sym}, \overline{G}_k^{sym}\right] =$$
$$= \left\{ G_k \in R^{n_k \times n_k} \middle| G_k = G_k^T,\ \underline{G}_k^{sym} = \left(\underline{G}_k^{sym}\right)^T \rhd 0,\ \overline{G}_k^{sym} = \left(\overline{G}_k^{sym}\right)^T \rhd 0 \right\}. \tag{8}$$

Введем множество матриц $H_k \in R^{n_k \times n_k}$ **,** удовлетворяющее выражению:

$$\sum\nolimits_{tol}\left(\boldsymbol{D}_k, \boldsymbol{G}_k^{sym}\right) =$$
$$= \left\{ H_k \in R^{n \times n} \middle| (\forall D_k \in \boldsymbol{D_k}) \left(\exists G_k \in \boldsymbol{G}_k^{sym}\right) \left(D_k^T H_k^T + H_k^T D_k^T = -G_k\right) \right\}, \tag{9}$$

которое называется допустимым множеством решений [4, 6] интервального матричного уравнения Ляпунова (7).

Для решения задачи распознавания непустоты допустимого множества решений (9) введем в рассмотрение вспомогательное матричное уравнение Ляпунова [6]:

$$\boldsymbol{D}_k^T H_k + H_K \boldsymbol{D}_k = -\boldsymbol{G}_k, \quad k = \overline{1,l}. \tag{10}$$

Допустимое множество решений интервального матричного уравнения Ляпунова (10) будет иметь вид:

$$\sum\nolimits_{tol}(\boldsymbol{D}_k, \boldsymbol{G}_k) =$$
$$= \left\{ H_k \in R^{n \times n} \middle| (\forall D_k \in \boldsymbol{D_k}) (\exists G_k \in \boldsymbol{G}_k) \left(D_k^T H_k^T + H_k^T D_k^T = -G_k\right) \right\}. \tag{11}$$

Предположим, что допустимое множество решений (11) непусто и пусть некоторые матрицы $H_k = H_k^T \in \boldsymbol{H}_k$, $k = \overline{1,l}$ принадлежат множеству (11):

$$H_k = H_k^T \in \Sigma_{tol}(\boldsymbol{D}_k, \boldsymbol{G}_k) \neq 0, \quad k = \overline{1,l}, \tag{12}$$

тогда

$$\left\{ H_k \in \sum\nolimits_{tol}(\boldsymbol{D}_k, \boldsymbol{G}_k), H_k = H_k^T \right\} \subseteq \sum\nolimits_{tol}(\boldsymbol{D}_k, \boldsymbol{G}_k). \tag{13}$$

При выполнении соотношения (12) матрицы $D_k^T H_k + H_k D_k$ симметрические для любой

$$D_k \in \boldsymbol{D}_k \text{ и } D_k{}^T H_k + H_k D_k \in -\boldsymbol{G}_k,\ \forall D_k \in \boldsymbol{D}_k .$$

Отсюда следует существование симметрических матриц $G_k = G_k^T \in \mathbf{G}_k$, таких, что

$$D_k^T H_k + H_k D_k \in -\boldsymbol{G}_k, \quad k = \overline{1,l} .$$

Принимая во внимание соотношение (8), можно записать:

$$D_k{}^T H_k + H_k D_k \in -\boldsymbol{G}_k{}^{sym}, \quad k = \overline{1,l} ,$$

для любых H_k, и тогда в силу произвольности выбора симметрических матриц H_k включение (13) является справедливым.

Класс матриц H_k, принадлежащих множеству (11), выделяет следующее соотношение:

$$\left|\mathrm{mid}\,\boldsymbol{D}_k{}^T H_k + H_k \mathrm{mid}\,\boldsymbol{D}_k + \mathrm{mid}\boldsymbol{G}_k\right| \le \mathrm{rad}\,\mathbf{G}_k - \mathrm{rad}\,\boldsymbol{D}_k{}^{\boldsymbol{T}} |H_k| - |H_k| \mathrm{rad}\,\boldsymbol{D}_k , \qquad (14)$$

где

$$\mathrm{mid}\,\boldsymbol{x} = \mathrm{mid}\left[\underline{x};\overline{x}\right] = \frac{\underline{x}+\overline{x}}{2},\ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{x} = \mathrm{rad}\left[\underline{x};\overline{x}\right] = \frac{\overline{x}-\underline{x}}{2}$$

соответственно середина и радиус интервального числа $\boldsymbol{x}$.

Применительно к интервальным матрицам эти процедуры понимаются в поэлементном смысле.

Из соотношения (14) следует, что если некоторые матрицы H_k являются решением точечного уравнения Ляпунова

$$\mathrm{mid}\,\boldsymbol{D}_k{}^{\boldsymbol{T}} H_k + H_k \mathrm{mid}\,\boldsymbol{D}_k = \text{-}\mathrm{mid}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{k}}$$

и удовлетворяет условию

$$\mathrm{rad}\,\boldsymbol{D}_k{}^{\boldsymbol{T}} |H_k| + |H_k| \mathrm{rad}\,\boldsymbol{D}_k \le \mathrm{rad}\,\boldsymbol{G}_k ,$$

где знак неравенства понимается в поэлементном смысле, то:

$$H \subseteq \Sigma_{tol}(\boldsymbol{D}_k, \boldsymbol{G}_k).$$

Для решения системы уравнений (7) воспользуемся формализмом кронекеровского произведения матриц [6] и получим интервальную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\boldsymbol{F}_k \boldsymbol{h}_k = -\boldsymbol{g}_k, \quad k = \overline{1,l} , \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{D}_k^T \otimes E + E \otimes \boldsymbol{D}_k^T,$$

$$\boldsymbol{h}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_1^k \\ \boldsymbol{H}_2^k \\ \dots \\ \boldsymbol{H}_{n_k}^k \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{g}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_1^k \\ \boldsymbol{G}_2^k \\ \dots \\ \boldsymbol{G}_{n_k}^k \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{F}_k \in IR^{n_k^2 \times n_k^2}$, $\otimes$ — символ кронекеровского произведения матриц; E — единичная матрица размерности $(n_k \times n_k)$, $k = \overline{1,l}$; $\boldsymbol{H}_i^k$ — i-е столбцы матриц $\boldsymbol{H}_k$; $\boldsymbol{G}_i^k$ — i-е столбцы матриц $\boldsymbol{G}_k$, $i = \overline{1,n_k}$, $k = \overline{1,l}$.

Условия следующей теоремы позволяют определить внутреннюю оценку множества (15). Задача нахождения внутренней оценки множества хорошо изучена в работе [6], поэтому здесь приведем только теорему относительно уравнения (15).

Теорема 1. Если интервальные векторы $\boldsymbol{h}_k$, $k = \overline{1,l}$, являются правильными, т. е. $\boldsymbol{h}_k \in IR^{n_k^2}$, и представляют собой алгебраическое решение интервальной системы линейных алгебраических уравнений (15), то множество всех симметрических матриц

$$\boldsymbol{H}_k^{sym} = \left\{ H_k \in R^{n_k \times n_k} \middle| H_k \in \boldsymbol{H}_k, \quad H_k = H_k^T, \quad h_k = col\ \left(H_1^k, H_2^k, \dots, H_n^k\right) \in \boldsymbol{h}_k \right\},$$

если оно непусто, является внутренней оценкой множества $\Sigma_{tol}\left(\boldsymbol{D}_k, \boldsymbol{G}_k{}^{sym}\right)$ [6].

Задача нахождения допустимого множества решений (15) является NP-полной. Следующий алгоритм позволяет снизить вычислительные трудности за счет специально сконструированных множеств векторов и матриц.

Для построения семейства точечных матриц $H_k \in \boldsymbol{H}_k$ введем в рассмотрение вспомогательное множество [7]

$$z^k = \left\{ z_i^k \in R^{n_k} : z_i^k \in \{-1,1\} \right\}, \quad k = \overline{1,l}, \quad i = \overline{1,n_k},$$

и определим $q = \overline{1,2^{n-1}}$ ключевых матриц вида:

$$D_{kq} = \left\{ d_{ij}^{kq} \right\}, \quad D_{kq} \in \boldsymbol{D}_k, \tag{16}$$

$$d_{ij}^{kq} = \begin{cases} d_{ij}^{kq}, & z_i^k z_j^k = 1, \quad i, j = \overline{1, n_k}; \\ \overline{d_{ij}^{kq}}, & z_i^k z_j^k = -1, \quad i, j = \overline{1, n_k}. \end{cases}$$

Принимая во внимание выражение (15), систему линейных алгебраических уравнений для каждой ключевой матрицы $D_{kq} \in \boldsymbol{D}_k$ можно представить в виде:

$$F_{kq} h_{kq} = -g_{kq}, \quad k = \overline{1, l}, \quad q = \overline{1, 2^{n-1}}, F_{kq} = D_{kq}^T \otimes E + E \otimes D_{kq}^T, \tag{17}$$

$$h_{kq} = \begin{pmatrix} H_1^{kq} \\ H_2^{kq} \\ \dots \\ H_{n_k}^{kq} \end{pmatrix}, \; g_{kq} = \begin{pmatrix} G_1^{kq} \\ G_2^{kq} \\ \dots \\ G_{n_k}^{kq} \end{pmatrix},$$

где H_i^k — i-е столбцы матриц H_k, G_i^k — i-е столбцы матриц G_k, $i = \overline{1, n_k}$, $k = \overline{1, l}$.

Матрицы H_{kq} и D_{kq}, $k = \overline{1, l}$, $q = \overline{1, 2^{n-1}}$ определяют множество ВФЛ

$$V_{kq}(x_k) = x_k^T(t) H_{kq} x_k(t), \tag{18}$$

удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{gathered} c_{1k}^q \|x_k(t)\|^2 \le V_{kq}(x_k) \le c_{2k}^q \|x_k(t)\|^2, \\ \dot{V}_{kq}(x_k) \le -c_{3k}^q \|x_k(t)\|^2, \; \left\| \operatorname{grad}_{x_k} V_{kq}(x_k) \right\| \le c_{4k}^q \|x_k(t)\|, \end{gathered} \tag{19}$$

где $\|x_k\|$, $k = \overline{1, l}$ — евклидова норма вектора x_k, c_{sk}^q, $s = \overline{1, 4}$, $k = \overline{1, l}$ — положительные вещественные числа, выражающиеся через собственные значения матриц H_{kq} и G_{kq}:

$$\begin{gathered} c_{1k}^q = \lambda_{\min}\left(H_{kq}\right), \; c_{2k}^q = \lambda_{\max} \quad H_{kq} \quad, \\ c_{3k}^q = \lambda_{\min} \quad G_{kq} \quad, \; c_{4k}^q = 2\lambda_{\max} \quad H_{kq} \quad, \end{gathered} \tag{20}$$

$\lambda_{\min}(H_{kq})$, $\lambda_{\max}(H_{kq})$ и $\lambda_{\min}(G_{kq})$ — соответственно минимальные собственные значения матриц H_{kq}, максимальные собственные значения матриц H_{kq}, минимальные собственные значения матриц G_{kq}.

Воспользуемся соотношениями (18)–(20) для построения математической модели системы сравнения относительно $\|x_k\|^2$, которая принимает вид:

$$\dot{z}_{kq}(t) = -\frac{c_{3k}^q}{c_{2k}^q} z_{kq}(t), \quad k = \overline{1,l}, \quad q = \overline{1,2^{n-1}} . \tag{21}$$

Таким образом, системе (5) ставятся в соответствие уравнения сравнения (21), которые эквивалентны по динамическим свойствам отдельным изолированным подсистемам (4).

3. Исследование динамических свойств интервальной агрегатированной системы сравнения. Рассмотрим математическую модель интервальных подсистем с учетом взаимосвязей, где каждая k-я подсистема описывается математической моделью (4). Далее при исследовании динамических свойств интервальной системы (4) будем понимать исследование динамических свойств семейства математических моделей, для которых $D_k(t) \in \boldsymbol{D_k}(t)$:

$$\left\{ x_k(t) = D_k x_k(t) + \sum_{\substack{k \neq v \\ v=1}}^{l} D_{kv} x_v(t) \middle| (D_k \in \boldsymbol{D_k}) \right\}, \; k = \overline{1,l}, \tag{22}$$

где $D_k \in \boldsymbol{D}_k$, D_{kv} — точечные матрицы размерностью $(n_k \times n_k)$ и $(n_k \times n_v)$ соответственно с элементами

$$D_k = \left\{ d_{ij}^k : \; i, j = \overline{1, n_k} \right\}, \quad k = \overline{1,l} ,$$

$$D_{kv} = \left\{ d_{ij}^{kv} : \; i = \overline{1, n_k}, \; j = \overline{1, n_v} \right\}, \quad k, v = \overline{1,l} .$$

Чтобы построить агрегатированную систему сравнения для (22), воспользуемся построенными ВФЛ (18) и оценками (19). Для получения оценки сверху на производные от ВФЛ воспользуемся выражением:

$$\dot{V}_{kq}(x_k) \leq -\frac{c_{3k}^q}{2c_{2k}^q} V_{kq}(x_k) + \frac{\left(c_{4k}^q\right)^2 \sum\limits_{\substack{k=1 \\ v \neq k}}^{l} \left(\left\| D_k^{vq} \right\| \right)^2}{2 c_{3k}^q c_{1v}^{vq}} \sum_{v=1}^{l} V_{vq}(x_k) . \tag{23}$$

На основе полученных дифференциальных неравенств (19) и (23) получим семейство агрегатированных систем сравнения относительно переменных состояний $z_q(t) \in R^{l \times 1}$:

$$\dot{z}_q(t) = M_q z_q(t), \quad q = \overline{1,2^{n-1}}, \tag{24}$$

где M_q — матрицы размерности $(l \times l)$ с элементами

$$M_q = \left\{ m_{ij}^q, \quad i, j = \overline{1,l} \right\}, \quad q = \overline{1,2^{n-1}}, \tag{25}$$

принимающие следующие значения:

$$m_{ij}^q = \begin{cases} -\dfrac{c_{3i}^q}{2c_{2i}^q}, & i = j, \quad i, j = \overline{1,l}; \\ -\dfrac{\left(c_{4i}^q\right)^2 \|D_{kv}\|^2}{2c_{3i}^q c_{1j}^q}, & i \neq j, \quad i, j = \overline{1,l}. \end{cases} \tag{26}$$

В результате получено семейство агрегатированных систем сравнения, зависимых от q.

Используя формализм интервальной оболочки непустого множества семейства матриц $\left\{ M_q, q = \overline{1,2^{n-1}} \right\}$, получим интервальную матрицу $\boldsymbol{M} \in IR^{l \times l}$ с элементами, граничными значениями которых являются наименьшие и наибольшие значения соответствующих элементов (26):

$$\boldsymbol{M} = \left\{ \mathrm{m}_{ij} \middle| n m_{ij} := \left[\inf \quad m_{ij}^q \quad , \sup \quad m_{ij}^q \quad \right], \atop i, j = \overline{1,l}, \quad q = \overline{1,2^{n-1}} \right\}. \tag{27}$$

Таким образом, интервальная агрегатированная система сравнения относительно вектора состояний $z(t) \in M_{l \times 1}(IR)$ имеет вид:

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}(t), \tag{28}$$

где $\mathrm{z} \;\; t \;\; : \quad n\, z(t) = \; \inf \quad z_q(t) \quad , \sup \quad z_q(t) \qquad .$

Для исследования динамических свойств системы (28) необходимо [5], чтобы построенная матрица (28) являлась M-матрицей. В соответствии с критерием Фань Цзи [4], интервальная матрица $\boldsymbol{M} \in IR^{l \times l}$ с интервальными элементами $\boldsymbol{M} = \left\{ \boldsymbol{m}_{ij}, \ i, j = \overline{1,l} \right\}$ является M-матрицей, при выполнении следующих условий:

$$\boldsymbol{m}_{ij} \leq 0 \text{ для всех } i \neq j;$$

$$\boldsymbol{M}v > 0 \text{ для некоторого позитивного вектора } v \in R^l.$$

Для M-матрицы справедливо следующее. Когда интервальная матрица $\boldsymbol{M} \in IR^{l \times l}$ задана своими граничными матрицами:

$$\mathrm{M} = \left[\underline{M}, \overline{M} \right], \quad \underline{M}, \overline{M} \in R^{l \times l}, \tag{29}$$

тогда $\boldsymbol{M} \in IR^{l \times l}$ является M-матрицей, если матрицы $\underline{M}$ и $\overline{M}$ (29) являются M-матрицами.

Для исследования свойства интервальной устойчивости системы построенной агрегатированной системы сравнения (28) введем в рассмотрение матрицу сравнения $\langle \boldsymbol{M} \rangle$ с элементами

$$\langle \boldsymbol{m}_{ij} \rangle := \langle \boldsymbol{m} \rangle_{ij}, \quad i = j, \quad i, j = \overline{1, l},$$

$$\langle \boldsymbol{m}_{ij} \rangle := -|\boldsymbol{m}|_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, l}.$$

Под матрицей $\boldsymbol{M} \in IR^{l \times l}$ будем понимать матрицу с доминирующей диагональю, если выполняется условие:

$$\langle \boldsymbol{m}_{ij} \rangle > \sum_{i \neq j} |\boldsymbol{m}_{ij}|, \qquad i, j = \overline{1, l}. \tag{30}$$

Таким образом, решение задачи исследования интервальной устойчивости интервальной агрегатированной системы сравнения (28) предполагает наличие свойства доминирования диагонали (30) в M-матрице:

$$\boldsymbol{M} \in IR^{l \times l}.$$

4. Заключение. На основе использования интервальных ВФЛ и принципа сравнения разработана процедура построения агрегатированной интервальной системы сравнения, более простой по структуре и меньшей размерности, но эквивалентной по динамическим свойствам исходной многомерной интервальной системе управления, т.е. ее траектории движения мажорируют траектории движения исходной системы.

С использованием метода ключевых матриц и с выполнением условия наличия доминирующей диагонали сформированной M-матрицы получены условия интервальной устойчивости агрегатированной системы сравнения.

Литература

1. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.
2. *Измоденова-Матросова К.В., Матросов В.М.* Учение о ноосфере, глобальное моделирование и устойчивое развитие. М.: Academia, 2005. 352 с.

3. *Abdullin R.Z.,Anapolski L.J. et al.* Vector Lyapunov Functions in Stability Theory. Advanced series in mathematical science and engineering. / Eds V. Lakhmikantam, V. Matrosov, C.P. Tsokos. World Federation Publisher Company, 1996. 394 p.
4. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: Изд. ИВТ СО РАН, 2010. 601 с.
5. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. 352 с.
6. *Sokolova S.P., Ivlev R.S.* Asymptotic stability of interval time-delay systems // Reliable Computing. 2003. Vol. 9. N 4. P. 303–313.
7. *Бобылев Н.А.* О положительной определенности интервальных семейств симметрических матриц // Автоматика и телемеханика. 2000. № 8. С. 4–9.

Соколова Светлана Павловна — д-р. техн. наук, проф.; в. н. с. лаборатории прикладной информатики Учреждения Российской академии наук, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН). Область научных интересов: адаптивные системы управления; интеллектуальные информационные технологии. Число научных публикаций — 142. sokolova_sv @mail.ru; 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-1919, факс +7(812)328-4450.

Sokolova Svetlana Pavlovna — Dr.Sc. (Tech.), PhD, professor; leading researcher, Applied Informatics Department, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: adaptive control systems, intelligent information technologies. The number of publications — 142. sokolova_sv@mail.ru; SPIIRAS, 39, 14th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-1919; fax +7(812)328-4450.

Ширяева Ольга Ивановна — канд. техн. наук, доцент кафедры автоматизации и управления Казахского национального технического университета им.К.Сатпаева (КазНТУ). Область научных интересов: адаптивные и робастные системы управления. Число научных публикаций — 58. shir_olga@yahoo.com; КазНТУ, д. 22, ул. Сатпаева, Алматы, 050013, Казахстан; р.т. +7(727)292-57-03.

Shiryayeva Olga Ivanovna — Ph.D., associate professor Automation and Control Department, Faculty of Automation and Control of Kazakh National Technical University (KazNTU). Research interests: adaptive and robust control systems. The number of publications — 58. shir_olga@yahoo.com; KazNTU, 22, Satpaev st., Almaty, Kazakhstan; office phone +7(727)292-57-03.