УДК 519.6

А.А. Макаров

КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ СПЛАЙН-ВЭЙВЛЕТЫ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Макаров А.А. **Кусочно-непрерывные сплайн-вэйвлеты на неравномерной сетке.**
Аннотация. В работе построены сплайны лагранжева типа нулевого порядка, доказана вложенность пространств сплайнов на последовательности укрупняющихся/измельчающихся неравномерных сеток, построена простая реализация системы функционалов, биортогональная системе сплайнов, получены вэйвлетные разложения и алгоритмы декомпозиции и реконструкции потоков информации в случаях бесконечного потока с сеткой, заданной на открытом интервале и конечного потока с сеткой, заданной на отрезке.
Ключевые слова: сплайн, вэйвлет, вейвлет, всплеск.

Makarov A.A. **Piecewise continuous spline wavelets on irregular grid.**
Abstract. Piecewise continuous spline of Lagrange type are constructed. An embedding of spline spaces is established for arbitrary refinement of grids. The system of biorthogonal linear functionals to splines is constructed. Wavelet decompositions and decomposition and reconstruction algorithms in the case of an infinite flow for a grid on an open interval and a finite flow for a grid on a segment are constructed.
Keywords: spline, wavelet, spline wavelet decomposition.

1. Введение. Сплайны и вэйвлеты (всплески) широко применяются при составлении эффективных алгоритмов обработки больших потоков цифровой информации. Если удается установить вложенность пространств сплайнов на последовательности укрупняющихся/измельчающихся сеток и представить цепочку вложенных пространств в виде прямой суммы вэйвлетных пространств, а также реализовать базисные функции с минимальной длиной носителя, то это ведет к вэйвлетному разложению потока информации и существенно экономит ресурсы вычислительных систем. Таким образом, исходный поток информации удается разложить на составляющие так, что можно выделить основной и уточняющий информационные потоки. Это приводит к сжатию поступающего цифрового сигнала и к возможности быстрой передачи основного потока и фрагментарной передаче уточняющего потока в зависимости от потребностей. Хорошо известны вэйвлетные разложения в случае равномерной сетки на интервале $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$. В этом случае применяется мощный аппарат гармонического анализа (в пространстве функций $L^2(\mathbb{R}^1)$ и в пространстве последовательностей l^2), используется лифтинговая схема или вэйвлетная схема; имеется большое число исследований (см., например, [1–3] и приведенную там библиографию).

Многие практические приложения требуют рассматривать ограниченный интервал $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ и неравномерную сетку. Например, для эффективного сжатия неоднородных потоков информации (имеющих сингулярности или быстро меняющиеся характеристики) целесообразно использовать адаптивную неравномерную сетку, учитывающую особенности обрабатываемого потока. Это позволяет улучшить приближение функций без усложнения вычислений. Для случая неравномерной сетки работ немного (см., например, [4–12]); обычно применяемое преобразование Фурье в условиях неравномерной сетки использовать затруднительно.

В компьютерной геометрии исследуются различные способы построения сплайнов, которые обладают свойствами B-сплайнов (см., например, [13, 14]). Сплайны, построенные в данной работе, являются неполиномиальным обобщением B-сплайнов, в зависимости от выбранной порождающей функции φ. Исходными здесь являются аппроксимационные соотношения, из которых могут быть получены, например, тригонометрические, гиперболические и экспоненциальные сплайны. Частным случаем рассматриваемых в работе сплайнов является характеристическая функция, являющаяся полиномиальным B-сплайном нулевой степени. В этом случае получается хорошо известный вэйвлет Хаара на равномерной сетке.

Цель данной работы — построить сплайны лагранжева типа нулевого порядка, доказать вложенность пространств сплайнов на последовательности укрупняющихся/измельчающихся неравномерных сеток, построить простую реализацию системы функционалов, биортогональную системе сплайнов, получить вэйвлетные разложения и алгоритмы декомпозиции и реконструкции потоков информации в случаях бесконечного потока с сеткой, заданной на открытом интервале и конечного потока с сеткой, заданной на отрезке.

2. Пространство сплайнов нулевого порядка. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R}^1$ — множество вещественных чисел. Линейное пространство непрерывных на интервале (α, β) функций обозначим через $C(\alpha, \beta)$. Пространство кусочно-непрерывных функций $u(x)$ с конечным числом разрывов первого рода на каждом отрезке $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$ обозначим через $C^{-1}(\alpha,\beta)$; при этом будем считать, что каждая функция этого пространства непрерывна слева.

На интервале $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, такую, что

$$X: \ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j\to-\infty} x_j$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j\to+\infty} x_j$ (случаи $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ не исключаются).

При $K_0 \geqslant 1$, $K_0 \in \mathbb{R}^1$ обозначим через $\mathcal{X}(K_0,\alpha,\beta)$ класс сеток вида (1) со свойством *локальной квазиравномерности* (подробнее о таких сетках см. [15]):

$$K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1}-x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K_0 \ \ \forall j \in \mathbb{Z},$$

и положим $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} (x_{j+1}-x_j)$.

Рассмотрим измеримую функцию $\varphi : (\alpha,\beta) \mapsto \mathbb{R}^1$, отличную от нуля почти всюду на интервале (α,β). *Координатными сплайнами нулевого порядка* называются функции $\omega_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие условиям

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in C^{-1}(\alpha,\beta)$ и $\varphi(t) \neq 0$ для всех $t \in (\alpha,\beta)$. Тогда для всех $j \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие утверждения:*

1. $\omega_j \in C^{-1}(\alpha,\beta)$.
2. $\operatorname{supp}\omega_j(t) = [x_j, x_{j+1}]$.
3. *Если $\varphi(t) > 0 (< 0)$, то $\omega_j(t) > 0 (< 0)$, при $t \in [x_j, x_{j+1})$;* $\omega_j(t) \equiv 0$ *при $t \notin [x_j, x_{j+1})$.*
4. *Система функций $\{\omega_j(t)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ линейно независима на интервале (α,β).*
5. $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \omega_j(t) = \varphi(t) \ \ \forall\, t \in (\alpha,\beta)$.

Доказательство. Принадлежность функций $\omega_j(t)$ в условиях пункта 1 к классу кусочно-непрерывных на (α,β) функций очевидна. Пункты 2, 3 и 5 следуют из формулы (2). Система $\{\omega_j(t)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ линейно независима, благодаря локальности носителей функций $\omega_j(t)$ и отделенности от нуля функции φ на интервале (α,β). $\square$

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$, получаемых для функции $\varphi\in C^{-1}(\alpha,\beta)$, $\varphi(t)\neq 0\;\forall\, t\in(\alpha,\beta)$ по формуле (2), называется *пространством кусочно-непрерывных сплайнов* на сетке X и обозначается через

$$\mathbb{S}(X)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{u\,|\,u=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_j\,\omega_j\quad\forall\, c_j\in\mathbb{R}^1\},$$

функция φ называется *порождающей функцией* для пространства $\mathbb{S}(X)$, условия (2) называются *аппроксимационными соотношениями.*

Замечание 1. *При $\varphi(t)\equiv 1\;\forall\, t\in(\alpha,\beta)$ из формулы (2) получаем равенство $\omega_j(t)=\chi_{[x_j,x_{j+1})}(t)$, где $\chi_{[x_j,x_{j+1})}(t)$ – характеристическая функция промежутка $[x_j,x_{j+1})$.*

Из бесконечной сетки X выделим конечную сетку $X_n, n\in\mathbb{N}$,

$$X_n: x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n.$$

Введем обозначения:

$$a\stackrel{\mathrm{def}}{=}x_0,\quad b\stackrel{\mathrm{def}}{=}x_n,\quad J_n\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{0,\ldots,n\}.$$

Для измеримого (по Лебегу) множества $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^1$ обозначим через $\mathrm{mes}\,(\mathcal{M})$ его лебегову меру.

Пусть система $\{f_j\}$ состоит из функций $f_j(t)$, заданных почти везде на интервале (α,β), и $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$. Система функций $\{f_j\mid\mathrm{mes}\,(\mathrm{supp} f_j\cap(a,b))>0\}$ называется *сужением* системы $\{f_j\}$ на отрезок $[a,b]$.

Сузим все функции пространства $\mathbb{S}(X)$ на множество $[a,b]\backslash X$. Совокупность этих сужений представляет собой конечномерное линейное пространство

$$\mathbb{S}(X_n)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{u\mid u=\sum_{j\in J_n}c_j\,\omega_j\quad\forall c_j\in\mathbb{R}^1\}.$$

Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 3(14). ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2010. Issue 3(14). ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Теорема 2. *Функция* $u_n(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{j\in J_n} c_j\,\omega_j(t)$, $t \in [a,b]$ *является следом функции* $u(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j\,\omega_j(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$ *на отрезке* $[a,b]$, *лежит в пространстве* $\mathbb{S}(X_n)$ *и полностью определяется набором узлов* $\{x_j\}_{j\in J_n}$ *и набором коэффициентов* $\{c_j\}_{j\in J_n}$.

Доказательство следует непосредственно из определений пространств $\mathbb{S}(X)$ и $\mathbb{S}(X_n)$. □

Следствие 1. *Сужения функций* ω_j *образуют линейно независимую систему на* $[a,b]$, *причем* $\dim\mathbb{S}(X_n) = n+1$.

3. Калибровочные соотношения и матрицы реконструкции. Из исходной сетки X для фиксированного $k\in\mathbb{Z}$ удалим один узел x_{k+1} и на полученной таким образом *укрупненной (разреженной) сетке* $\widetilde{X}$ рассмотрим сплайны $\widetilde{\omega}_j(t)$, $j\in\mathbb{Z}$.

Пусть $\xi \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_{k+1}$, а $\widetilde{x}_j$ — узлы вновь полученной сетки:

$$\widetilde{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\widetilde{x}_j \mid j\in\mathbb{Z}\}:$$

$$\widetilde{x}_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} x_j & \text{при } j\leqslant k,\\ x_{j+1} & \text{при } j\geqslant k+1. \end{cases} \tag{3}$$

Условимся ставить знак «тильда» сверху над обозначениями всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой $\widetilde{X}$. Функции $\widetilde{\omega}_j(t)$ можно отыскать по формуле (2), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\widetilde{x}_j$, $j\in\mathbb{Z}$.

Теорема 3. *Для* $j,k\in\mathbb{Z}$ *и* $t\in(\alpha,\beta)$ *справедливы соотношения:*

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \begin{cases} \omega_j(t) & \textit{при } j\leqslant k-1,\\ \omega_k(t)+\omega_{k+1}(t) & \textit{при } j=k,\\ \omega_{j+1}(t) & \textit{при } j\geqslant k+1. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Тождества (4), получаемые при $j\leqslant k-1$ и при $j\geqslant k+1$ очевидны ввиду локальности носителей функций $\widetilde{\omega}_j(t)$ и $\omega_j(t)$. Осталось установить тождество (4) в случае $j=k$, а именно:

$$\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \omega_k(t)+\omega_{k+1}(t). \tag{5}$$

Для доказательства тождества (5) рассмотрим последовательно представление функции $\widetilde{\omega}_k(t)$ на промежутках $[\widetilde{x}_k,\xi)$ и $[\xi,\widetilde{x}_{k+1})$.

1. Записывая аппроксимационные соотношения (2) при

$$t \in [\widetilde{x}_k, \xi)$$

для функций $\omega_j(t)$ и $\widetilde{\omega}_{j'}(t)$ (на сетках X и $\widetilde{X}$ соответственно) ввиду равенства $[\widetilde{x}_k, \xi) = [x_k, x_{k+1})$ находим

$$\omega_k(t) \equiv \varphi(t), \quad \widetilde{\omega}_k(t) \equiv \varphi(t);$$

отсюда $\forall t \in [\widetilde{x}_k, \xi)$ получаем тождество $\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \omega_k(t)$, фактически совпадающее с тождеством (5) на рассматриваемом промежутке, ибо на нем $\omega_{k+1}(t) \equiv 0$.

2. При $t \in [\xi, \widetilde{x}_{k+1})$ из аппроксимационных соотношений (2) ввиду равенства $[\xi, \widetilde{x}_{k+1}) = [x_{k+1}, x_{k+2})$ имеем $\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \omega_{k+1}(t)$, откуда получаем тождество (5), ибо на рассматриваемом промежутке $\omega_k(t) \equiv 0$. Теорема доказана. $\square$

Равенства (4) называются *калибровочными соотношениями.*

Дадим матричный вариант формулировки теоремы 3. Введем бесконечномерные вектор-столбцы, компонентами которых являются функции $\omega_j(t)$ и $\widetilde{\omega}_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$\omega(t) = (\ldots, \omega_{-2}(t), \omega_{-1}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \ldots)^T,$$

$$\widetilde{\omega}(t) = (\ldots, \widetilde{\omega}_{-2}(t), \widetilde{\omega}_{-1}(t), \widetilde{\omega}_0(t), \widetilde{\omega}_1(t), \widetilde{\omega}_2(t), \ldots)^T.$$

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$\widetilde{\omega}(t) = \mathfrak{P}\, \omega(t), \tag{6}$$

где $\mathfrak{P}$ *— бесконечная матрица вида* $\mathfrak{P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ *с элементами*

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{при } i \leqslant k-1, \ \forall j, \\ \delta_{k+1,j} & \text{при } i = k, j \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, j = k, \\ \delta_{i,j-1} & \text{при } i \geqslant k+1, \ \forall j. \end{cases} \tag{7}$$

Матрица $\mathfrak{P}$ называется *матрицей реконструкции* на интервале (α, β).

Замечание 2. *Матрицу $\mathfrak{P}$ можно представить в виде*

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ k+3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \ldots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \ldots \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \end{array}.$$

Рассмотрим случай, когда исходная сетка X дополняется новым узлом $\overline{\xi}$, и на полученной таким образом *измельченной сетке* $\overline{X}$ строятся сплайны $\overline{\omega}_j(t),\ j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\overline{\xi} \in (x_k, x_{k+1})$, а $\overline{x}_j$ – узлы вновь полученной сетки $\overline{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{x}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$:

$$\overline{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_j & \text{при } \ j \leqslant k, \\ \overline{\xi} & \text{при } \ j = k+1, \\ x_{j-1} & \text{при } \ j \geqslant k+2. \end{cases} \tag{8}$$

Будем надчеркивать обозначения всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой $\overline{X}$. Функции $\overline{\omega}_j(t)$ можно отыскать по формуле (2), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\overline{x}_j,\ j \in \mathbb{Z}$.

Введем бесконечномерный вектор-столбец, компонентами которого являются функции $\overline{\omega}_j(t), j \in \mathbb{Z}$:

$$\overline{\omega}(t) = (\ldots, \overline{\omega}_{-2}(t), \overline{\omega}_{-1}(t), \overline{\omega}_0(t), \overline{\omega}_1(t), \overline{\omega}_2(t), \ldots)^T.$$

Тогда, аналогично теореме 4, справедливы *калибровочные соотношения*

$$\omega(t) = \mathfrak{P}\,\overline{\omega}(t), \tag{9}$$

с матрицей реконструкции $\mathfrak{P}$, элементы которой задаются равенством (7).

Рассмотрим калибровочные соотношения в конечномерном случае, используя введенные ранее сужения всех функций на отрезок $[a, b]$.

Предполагая, что $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, удалим узел x_{k+1} из сетки X_n; в результате получим укрупненную сетку

$$\widetilde{X}_n: \quad \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_{n-1},$$

где узлы $\widetilde{x}_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, по-прежнему определяются формулами (3). Для $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ добавим узел $\overline{\xi} \in (x_k, x_{k+1})$ к сетке X_n; в результате получим измельченную сетку

$$\overline{X}_n: \quad \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_{n+1},$$

где узлы $\overline{x}_i$, $i = 0, \ldots, n+1$, по-прежнему определяются формулами (8).

Введем конечномерные вектор-функции:

$$\omega_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_0(t), \omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))^T,$$

$$\widetilde{\omega}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_0(t), \widetilde{\omega}_1(t), \ldots, \widetilde{\omega}_{n-1}(t))^T,$$

$$\overline{\omega}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\omega}_0(t), \overline{\omega}_1(t), \ldots, \overline{\omega}_{n+1}(t))^T.$$

Ввиду равенств (6), (9) в конечномерном случае калибровочные соотношения для $t \in [a, b]$ могут быть записаны в виде

$$\widetilde{\omega}_{(n)}(t) = \widetilde{\mathfrak{P}}_n\, \omega_{(n)}(t), \tag{10}$$

$$\omega_{(n)}(t) = \overline{\mathfrak{P}}_n\, \overline{\omega}_{(n)}(t), \tag{11}$$

где $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ — прямоугольная числовая матрица размеров $n \times (n+1)$, $\overline{\mathfrak{P}}_n$ — прямоугольная числовая матрица размеров $(n+1) \times (n+2)$. Матрица $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ называется *матрицей укрупняющей реконструкции* на отрезке $[a, b]$, матрица $\overline{\mathfrak{P}}_n$ называется *матрицей измельчающей реконструкции* на отрезке $[a, b]$.

4. Биортогональная система функционалов и матрицы декомпозиции. Рассмотрим некоторое линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{U}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{U}$. Значение функционала f на элементе $u \in \mathfrak{U}$ обозначим через $\langle f, u \rangle$. Система функционалов $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ *биортогональна* системе функций $\{\omega_{j'}\}_{j' \in \mathbb{Z}}$, если $\langle f_j, \omega_{j'} \rangle = \delta_{j,j'}$ $\forall j, j' \in \mathbb{Z}$, где $\delta_{j,j'}$ – символ Кронекера.

Рассмотрим линейные функционалы $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, заданные на пространстве $C^{-1}(\alpha,\beta)$ формулой

$$\langle f_j, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\eta_j+0)/\varphi(\eta_j+0), \quad u\in C^{-1}(\alpha,\beta),\ \eta_j\in[x_j,x_{j+1}),\ j\in\mathbb{Z}. \tag{12}$$

Результат действия функционала f_j на функцию u определяется значением этой функции в правосторонней окрестности точки η_j; эту точку будем называть *носителем функционала* f_j и писать $\mathrm{supp} f_j = \eta_j$.

Теорема 5. *Система линейных функционалов* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *биортогональна системе функций* $\{\omega_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$, *т. е.*

$$\langle f_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'} \quad \forall j, j'\in\mathbb{Z}. \tag{13}$$

Доказательство. Поскольку при $j\leqslant j'-1$ и при $j\geqslant j'+1$ точка η_j не является внутренней точкой носителя функции $\omega_{j'}$, то сама функция в этой точке равна нулю, поэтому функционал (12) на такой функции обращается в нуль. Следовательно, для доказательства (13) достаточно рассмотреть случай $j'=j$. При $u=\omega_j$ согласно (12) и (2) имеем $\langle f_j,\omega_j\rangle = \omega_j(\eta_j+0)/\varphi(\eta_j+0)=1$. Теорема доказана. □

Далее будем рассматривать конкретную реализацию функционала (12) при $\eta_j = x_j$, $j\in\mathbb{Z}$. Рассмотрим интерполяционную задачу

$$u(x_j+0) = v_j, \quad u\in\mathbb{S}(X), \quad \forall j\in\mathbb{Z}, \tag{14}$$

где $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — заданная последовательность чисел (бесконечная в обе стороны).

Теорема 6. *В пространстве* $\mathbb{S}(X)$ *существует единственное решение задачи (14), и это решение дается формулой*

$$u(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\,\omega_j(t), \quad t\in(\alpha,\beta).$$

Доказательство вытекает из теоремы 5. □

Пусть $\widetilde{f}_j$ – реализация функционала (12) для $\eta_j=\widetilde{x}_j$, $j\in\mathbb{Z}$. Вычислим значения функционала $\widetilde{f}_j$ на функциях $\omega_{j'}(t)$. Пусть далее

$$\mathfrak{q}_{j,j'} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{f}_j, \omega_{j'}\rangle, \quad j, j'\in\mathbb{Z}.$$

Теорема 7. *Для $j, j', k \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства:*

$$\mathfrak{q}_{j,j'} = \begin{cases} \delta_{j,j'} & \textit{при} \ \ j' \leqslant k, \\ 0 & \textit{при} \ \ j' = k+1, \\ \delta_{j,j'-1} & \textit{при} \ \ j' \geqslant k+2. \end{cases} \qquad (15)$$

Доказательство. Благодаря соотношениям (4) и (13) для

$$j' \leqslant k-1, \forall j$$

выполняются равенства

$$\mathfrak{q}_{j,j'} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_{j'} \rangle = \langle \widetilde{f}_j, \widetilde{\omega}_{j'} \rangle = \delta_{j,j'},$$

а для $j' \geqslant k+2, \forall j$ верны равенства

$$\mathfrak{q}_{j,j'} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_{j'} \rangle = \langle \widetilde{f}_j, \widetilde{\omega}_{j'-1} \rangle = \delta_{j,j'-1}.$$

Пусть $j' = k$. Воспользуемся представлением функции $\widetilde{\omega}_k$ на промежутке $[\widetilde{x}_k, \xi) = [x_k, x_{k+1})$. На нем калибровочное соотношение (4) имеет вид: $\widetilde{\omega}_k(t) = \omega_k(t)$, ибо $\operatorname{supp} \omega_{k+1}(t) = [x_{k+1}, x_{k+2}]$. Поэтому справедливы равенства

$$\mathfrak{q}_{j,k} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_k \rangle = \langle \widetilde{f}_j, \widetilde{\omega}_k \rangle = \delta_{j,k}. \qquad (16)$$

Пусть $j' = k+1$. Тогда ввиду соотношений (4), (13) и (16) получаем

$$\mathfrak{q}_{j,k+1} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_{k+1} \rangle = \langle \widetilde{f}_j, \widetilde{\omega}_k \rangle - \langle \widetilde{f}_j, \omega_k \rangle = \delta_{j,k} - \delta_{j,k} = 0.$$

Теорема доказана. □

Вычислим значения функционала f_j на функциях $\overline{\omega}_{j'}(t)$. Аналогично теореме 6 доказывается, что

$$\langle f_j, \overline{\omega}_{j'} \rangle = \mathfrak{q}_{j,j'}, \ \ j, j' \in \mathbb{Z},$$

где $\mathfrak{q}_{j,j'}$ определяются формулой (15).

Замечание 3. *Пусть $\overline{f}_j$ — реализация функционала (12) для $\eta_j = \overline{x}_j, j \in \mathbb{Z}$. Тогда для всех $j, j' \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство*

$$\mathfrak{p}_{j,j'} = \langle f_{j'}, \widetilde{\omega}_j \rangle = \langle \overline{f}_{j'}, \omega_j \rangle.$$

Далее рассмотрим матрицу $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, элементы которой задаются формулой (15). Матрица $\mathfrak{Q}$ называется *матрицей декомпозиции* на интервале (α, β).

Теорема 8. *Матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T$, т. е.*

$$\mathfrak{Q}\,\mathfrak{P}^T = I. \tag{17}$$

Доказательство. Транспонируя соотношение (6), получаем равенство вектор-строк

$$(\widetilde{\omega})^T(t) = (\omega)^T(t)\,\mathfrak{P}^T. \tag{18}$$

Умножая это равенство на вектор-столбец $\widetilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{f}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, ввиду свойства биортогональности (13) слева получаем единичную матрицу I, а справа появляется матрица $\mathfrak{Q}$ (см. формулу (15)). Итак, из (18) находим $I = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{P}^T$. Теорема доказана. □

Рассмотрим представление матрицы декомпозиции на отрезке $[a, b]$. Выделим из множества функционалов $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из $n+1$ функционалов, из множества функционалов $\{\widetilde{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из n функционалов.

Теорема 9. *Для систем функционалов $\{f_j\}_{j\in J_n}$ и $\{\widetilde{f}_i\}_{i\in J_{n-1}}$ справедливы равенства*

$$\langle f_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}, \quad \langle \widetilde{f}_i, \widetilde{\omega}_{i'}\rangle = \delta_{i,i'}, \quad j, j' \in J_n,\ i, i' \in J_{n-1},$$

причем $\operatorname{supp} f_j \subset [a, b]$, $\operatorname{supp} \widetilde{f}_i \subset [a, b]$.

Доказательство следует из формулы (13). □

Прямоугольная матрица $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j}), i \in J_{n-1}, j \in J_n$, размеров $n \times (n+1)$ называется *матрицей укрупняющей декомпозиции* на отрезке $[a, b]$, прямоугольная матрица $\overline{\mathfrak{Q}}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j}), i \in J_n, j \in J_{n+1}$, размеров $(n+1) \times (n+2)$ называется *матрицей измельчающей декомпозиции* на отрезке $[a, b]$.

Теорема 10. *Для матриц $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ и $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n$, $\overline{\mathfrak{P}}_n$ и $\overline{\mathfrak{Q}}_n$ справедливы соотношения*

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}_n\,\widetilde{\mathfrak{P}}_n^T = I_n, \tag{19}$$

$$\overline{\mathfrak{Q}}_n\,\overline{\mathfrak{P}}_n^T = I_{n+1}, \tag{20}$$

где I_n, I_{n+1} — единичные квадратные матрицы порядка n и $n+1$ соответственно.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8, проведенному в конечномерном случае. □

5. Сплайн-вэйвлетное сжатие на интервале. Согласно калибровочным соотношениям (4) справедливо включение пространств

$$\mathbb{S}(\widetilde{X}) \subset \mathbb{S}(X).$$

Рассмотрим оператор $\widetilde{P}$ проектирования пространства $\mathbb{S}(X)$ на подпространство $\mathbb{S}(\widetilde{X})$, задаваемый формулой

$$\widetilde{P}u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{a}_i\,\widetilde{\omega}_i, \quad \widetilde{a}_i = \langle \widetilde{f}_i, u\rangle \;\; \forall\, u \in \mathbb{S}(X),$$

и введем оператор $\widetilde{Q} = I - \widetilde{P}$, где I — тождественный оператор.

Пространство $W \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{Q}\,\mathbb{S}(X)$ называется *пространством вэйвлетов (всплесков)*, а прямое разложение

$$\mathbb{S}(X) = \mathbb{S}(\widetilde{X}) \dotplus W \tag{21}$$

называется *сплайн-вэйвлетным сжатием* пространства $\mathbb{S}(X)$.

В соответствии с равенством (21) для $u \in \mathbb{S}(X)$ имеем

$$u = \sum_i \widetilde{a}_i \widetilde{\omega}_i + \sum_{i'} b_{i'} \omega_{i'} = \sum_{i'} \left(\sum_i \widetilde{a}_i \mathfrak{p}_{i,i'} + b_{i'} \right) \omega_{i'},$$

так что для чисел $c_j = \langle f_j, u\rangle$ получаем

$$c_j = \sum_i \widetilde{a}_i \mathfrak{p}_{i,j} + b_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Пусть известны коэффициенты $c_{i'}$ в разложении элемента

$$u \in \mathbb{S}(X)$$

по элементам базиса $\omega_{i'}$, а именно:

$$u = \sum_{i'} c_{i'}\, \omega_{i'}.$$

Из соотношений (22) имеем

$$b_j = c_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \widetilde{a}_i,$$

используя равенство $\widetilde{a}_i = \langle \widetilde{f}_i, u\rangle$, получаем

$$b_j = c_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \langle \widetilde{f}_i, \sum_{i'} c_{i'}\omega_{i'}\rangle =$$

$$= c_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \sum_{i'} c_{i'} \langle \widetilde{f}_i, \omega_{i'}\rangle = c_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \sum_{i'} c_{i'}\, \mathfrak{q}_{i,i'}. \tag{23}$$

Формулы

$$\widetilde{a}_i = \sum_{i'} \mathfrak{q}_{i,i'}\, c_{i'}, \tag{24}$$

$$b_j = c_j - \sum_{i'} \left(\sum_i \mathfrak{p}_{i,j}\, \mathfrak{q}_{i,i'} \right) c_{i'} \tag{25}$$

называются *формулами декомпозиции.*

Введем вектор-столбцы

$$\widetilde{\mathbf{a}} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \widetilde{a}_{-1}, \widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots)^T,$$

$$\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T,$$

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T$$

и перепишем формулы декомпозиции (24)–(25) в матричном виде:

$$\widetilde{\mathbf{a}} = \mathfrak{Q}\, \mathbf{c}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T\, \mathfrak{Q}\, \mathbf{c}.$$

Применяя к предыдущему равенству матрицу $\mathfrak{Q}$ и используя формулу (17), получаем

$$\mathfrak{Q}\, \mathbf{b} = \mathfrak{Q}\, \mathbf{c} - \mathfrak{Q}\, \mathfrak{P}^T\, \mathfrak{Q}\, \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Итак, вектор $\mathbf{b}$ содержится в ядре оператора $\mathfrak{Q} : \mathbf{b} \in \ker \mathfrak{Q}$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{L}$ всех числовых последовательностей, представленных вектор-столбцами, $\mathbf{l} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, l_{-1}, l_0, l_1, \ldots)^T$, и линейный оператор, определяемый матрицей $\mathfrak{Q}$ в нем (это определение корректно, ибо упомянутая матрица имеет конечное число ненулевых элементов в каждой строке). Ядро этого оператора представляет собой линейное пространство; обозначим его через $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = (\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots)^T,\ \mathfrak{Q}\, \mathbf{b} = 0\}$, т. е. $\mathcal{B} = \ker \mathfrak{Q}$, так что

$$\mathfrak{Q}\, \mathbf{b} = 0 \quad \text{при } \mathbf{b} \in \mathcal{B}. \tag{26}$$

Рассмотрим еще два экземпляра пространства $\mathbb{L}$, обозначая их через $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{C}$: элементами пространства $\widetilde{\mathcal{A}}$ являются вектор-столбцы $\widetilde{\mathbf{a}} = (\ldots, \widetilde{a}_{-1}, \widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots)^T$, а элементами пространства $\mathcal{C}$ — вектор-столбцы $\mathbf{c} = (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)^T$. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}$ — прямое произведение пространств $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}$: $\widetilde{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathcal{A}} \times \mathcal{B}$, т. е.

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{a}} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \,\middle|\, \widetilde{\mathbf{a}} \in \widetilde{\mathcal{A}},\ \mathbf{b} \in \mathcal{B} \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{D} :\ \mathcal{C} \mapsto \widetilde{\mathcal{F}}, \quad \mathfrak{D} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \end{pmatrix},$$

для которого

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{a}} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathfrak{D}\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \end{pmatrix} \mathbf{c} \iff \begin{cases} \widetilde{\mathbf{a}} = \mathfrak{Q}\,\mathbf{c} \\ \mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q})\,\mathbf{c} \end{cases},$$

этот оператор называется оператором *декомпозиции.*

Теорема 11. *Для сплайн-вэйвлетного сжатия (21) формулы декомпозиции (24)–(25) имеют вид:*

$$\widetilde{a}_i = \begin{cases} c_i & \textit{при } \ i \leqslant k, \\ c_{i+1} & \textit{при } \ i \geqslant k+1, \end{cases} \tag{27}$$

$$b_j = \begin{cases} 0 & \textit{при } \ j \neq k+1, \\ c_{k+1} - c_k & \textit{при } \ j = k+1. \end{cases} \tag{28}$$

Доказательство. Подставляя равенства (15) в выражение (24), находим

$$\widetilde{a}_i = c_i \text{ при } i \leqslant k, \ \ \widetilde{a}_i = c_{i+1} \text{ при } i \geqslant k+1.$$

Из соотношения (23), применяя формулу (15), выводим

$$b_j = c_j - \sum_{i \leqslant k} \mathfrak{p}_{i,j}\, c_i - \sum_{i \geqslant k+1} \mathfrak{p}_{i,j}\, c_{i+1}.$$

С помощью формулы (7) получаем

$$b_j = c_j - \sum_{i \leqslant k-1} \delta_{i,j}\, c_i - \mathfrak{p}_{k,j}\, c_k - \sum_{i \geqslant k+1} \delta_{i,j-1}\, c_{i+1}. \tag{29}$$

При подстановке различных $j \neq k+1$ в равенство (29) получаем, что $b_j = c_j - c_j = 0$. При $j = k+1$ имеем $b_{k+1} = c_{k+1} - c_k$. Теорема доказана. □

Замечание 4. *Согласно формуле (28) вэйвлетным базисом пространства W служит сплайн ω_{k+1}, т. е. $W = \{b\,\omega_{k+1} \mid b \in \mathbb{R}^1\}$.*

Пусть теперь известны коэффициенты $\widetilde{a}_i$ и b в разложениях проекций элемента $u \in \mathbb{S}(X)$ на пространства $\mathbb{S}(\widetilde{X})$ и W: $\widetilde{P}u = \sum\limits_i \widetilde{a}_i\,\widetilde{\omega}_i$, $\widetilde{Q}u = b\,\omega_{k+1}$. Найдем формулы для определения коэффициентов c_j для представления элемента u в виде суммы $u = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j\,\omega_j$; упомянутые формулы называются *формулами реконструкции.*

Оператор $\mathfrak{R} : \widetilde{\mathfrak{F}} \mapsto \mathfrak{C}$, $\quad \mathfrak{R} \overset{\text{def}}{=} (\,\mathfrak{P}^T \quad I\,)$, для которого

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R}\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{a}}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = (\,\mathfrak{P}^T \quad I\,)\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{a}}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} \iff \mathbf{c} = \mathfrak{P}^T\widetilde{\mathbf{a}} + \mathbf{b},$$

называется оператором *реконструкции.*

Теорема 12. *Операторы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$ взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathfrak{C}$ и $\widetilde{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\mathfrak{R}\,\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{D} = (\,\mathfrak{P}^T \quad I\,)\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}\\ I - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\end{pmatrix} = \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q} + I - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q} = I.$$

С другой стороны, с учетом свойств (17) и (26) имеем

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{R}\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{a}}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}\\ I - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\end{pmatrix}(\,\mathfrak{P}^T \quad I\,)\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{a}}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T & \mathfrak{Q}\\ \mathfrak{P}^T - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T & I - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{a}}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{a}} + \mathfrak{Q}\mathbf{b}\\ \mathbf{b} - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{a}}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix},$$

что и требовалось установить. □

Теорема 13. *Для сплайн-вэйвлетного сжатия (21) формулы реконструкции имеют вид:*

$$c_i = \begin{cases} \widetilde{a}_i & \textit{при} \;\; i \leqslant k,\\ b_{k+1} + \widetilde{a}_k & \textit{при} \;\; i = k+1,\\ \widetilde{a}_{i-1} & \textit{при} \;\; i \geqslant k+2. \end{cases}$$

Доказательство следует непосредственно из формул (27) и (28). $\square$

6. Сплайн-вэйвлетное сжатие на отрезке. Согласно калибровочным соотношениям (10) справедливо включение пространств

$$\mathbb{S}(\widetilde{X}_n) \subset \mathbb{S}(X_n).$$

Рассмотрим оператор $\widetilde{P}_n$ проектирования пространства $\mathbb{S}(X_n)$ на подпространство $\mathbb{S}(\widetilde{X}_n)$, задаваемый формулой

$$\widetilde{P}_n\, u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in J_{n-1}} \widetilde{a}_i\, \widetilde{\omega}_i, \;\; \widetilde{a}_i = \langle \widetilde{f}_i, u \rangle \;\; \forall\, u \in \mathbb{S}(X),$$

и введем оператор $\widetilde{Q}_n = I - \widetilde{P}_n$, где I — тождественный в $\mathbb{S}(X_n)$ оператор.

Пространство $W_n \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{Q}_n\, \mathbb{S}(X_n)$ называется *пространством вэйвлетов (всплесков)* в конечномерном случае, а прямое разложение

$$\mathbb{S}(X_n) = \mathbb{S}(\widetilde{X}_n) \dot{+} W_n, \tag{30}$$

называется *сплайн-вэйвлетным сжатием* пространства $\mathbb{S}(X_n)$.

В соответствии с равенством (30) для $u \in \mathbb{S}(X_n)$ имеем

$$u = \sum_{i \in J_{n-1}} \widetilde{a}_i\, \widetilde{\omega}_i + \sum_{i' \in J_n} b_{i'}\, \omega_{i'} = \sum_{i' \in J_n} \Bigg(\sum_{i \in J_{n-1}} \widetilde{a}_i\, \mathfrak{p}_{i,i'} + b_{i'} \Bigg) \omega_{i'},$$

так что для чисел $c_j = \langle f_j, u \rangle$ получаем

$$c_j = \sum_{i \in J_{n-1}} \widetilde{a}_i\, \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \quad \forall\, j \in J_n. \tag{31}$$

Пусть известны коэффициенты $c_{i'}$ в разложении элемента

$$u \in \mathbb{S}(X)$$

по элементам базиса $\omega_{i'}$, а именно:

$$u = \sum_{i' \in J_n} c_{i'}\, \omega_{i'}.$$

Из соотношений (31) имеем

$$b_j = c_j - \sum_{i \in J_{n-1}} \mathfrak{p}_{i,j}\, \widetilde{a}_i \quad \forall\, j \in J_n,$$

используя равенство $\widetilde{a}_i = \langle \widetilde{f}_i, u \rangle$, для всех $j \in J_n$ получаем

$$b_j = c_j - \sum_{i \in J_{n-1}} \mathfrak{p}_{i,j} \langle \widetilde{f}_i, \sum_{i' \in J_n} c_{i'}\, \omega_{i'} \rangle =$$

$$= c_j - \sum_{i \in J_{n-1}} \mathfrak{p}_{i,j} \sum_{i' \in J_n} c_{i'} \langle \widetilde{f}_i, \omega_{i'} \rangle = c_j - \sum_{i \in J_{n-1}} \mathfrak{p}_{i,j} \sum_{i' \in J_n} c_{i'}\, \mathfrak{q}_{i,i'}.$$

Формулы

$$\widetilde{a}_i = \sum_{i' \in J_n} \mathfrak{q}_{i,i'}\, c_{i'} \quad \forall\, i \in J_{n-1}, \tag{32}$$

$$b_j = c_j - \sum_{i' \in J_n} \left(\sum_{i \in J_{n-1}} \mathfrak{p}_{i,j}\, \mathfrak{q}_{i,i'} \right) c_{i'} \quad \forall\, j \in J_n, \tag{33}$$

называются *формулами декомпозиции.*

Введем вектор-столбцы

$$\widetilde{\mathbf{a}}_n \overset{\text{def}}{=} (\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{n-1})^T,$$

$$\mathbf{b}_n \overset{\text{def}}{=} (b_0, b_1, \ldots, b_n)^T,$$

$$\mathbf{c}_n \overset{\text{def}}{=} (c_0, c_1, \ldots, c_n)^T$$

и перепишем формулы декомпозиции (32)–(33) в матричном виде:

$$\widetilde{\mathbf{a}}_n = \widetilde{\mathfrak{Q}}_n\, \mathbf{c}, \quad \mathbf{b}_n = \mathbf{c}_n - \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T\, \widetilde{\mathfrak{Q}}_n\, \mathbf{c}_n.$$

Применяя к предыдущему равенству матрицу $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n$ и используя формулу (19), получаем

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}_n\, \mathbf{b}_n = \widetilde{\mathfrak{Q}}_n\, \mathbf{c}_n - \widetilde{\mathfrak{Q}}_n\, \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T\, \widetilde{\mathfrak{Q}}_n\, \mathbf{c}_n = \mathbf{0}.$$

Итак, вектор $\mathbf{b}_n$ содержится в ядре оператора $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n : \mathbf{b}_n \in \ker \widetilde{\mathfrak{Q}}_n$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{L}_i, i \in \mathbb{N}$, всех числовых последовательностей, представленных вектор-столбцами, $\mathbf{l}_i \overset{\text{def}}{=} (l_0, l_1, \ldots, l_i)^T$, и линейный оператор из пространства $\mathcal{C}_n \overset{\text{def}}{=} \mathbb{L}_n$ в пространство

$\widetilde{\mathcal{A}}_n \overset{\text{def}}{=} \mathbb{L}_{n-1}$, определяемый матрицей $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n$ в нем. Ядро этого оператора представляет собой линейное пространство; обозначим его через $\mathcal{B}_n \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{b}_n \mid \mathbf{b}_n = (b_0, b_1, \ldots, b_n)^T,\ \widetilde{\mathfrak{Q}}_n\, \mathbf{b}_n = 0\}$, т. е. $\mathcal{B}_n = \ker \widetilde{\mathfrak{Q}}_n$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ — прямое произведение пространств $\widetilde{\mathcal{A}}_n$ и $\mathcal{B}_n$:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_n \overset{\text{def}}{=} \widetilde{\mathcal{A}}_n \times \mathcal{B}_n,$$

т. е.

$$\widetilde{\mathcal{F}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \widetilde{\mathbf{a}}_n \in \widetilde{\mathcal{A}}_n,\ \mathbf{b}_n \in \mathcal{B}_n \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\widetilde{\mathfrak{D}}_n :\ \mathcal{C}_n \mapsto \widetilde{\mathcal{F}}_n, \quad \widetilde{\mathfrak{D}}_n \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{Q}}_n \\ I - \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T\, \widetilde{\mathfrak{Q}}_n \end{pmatrix},$$

для которого

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \widetilde{\mathfrak{D}}_n\, \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{Q}}_n \\ I - \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T \widetilde{\mathfrak{Q}}_n \end{pmatrix} \mathbf{c}_n \iff \begin{cases} \widetilde{\mathbf{a}}_n = \widetilde{\mathfrak{Q}}_n\, \mathbf{c}_n \\ \mathbf{b}_n = (I - \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T \widetilde{\mathfrak{Q}}_n)\, \mathbf{c}_n \end{cases},$$

этот оператор называется оператором *декомпозиции.*

Теорема 14. *Если $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, то для сплайн-вэйвлетного сжатия (30) формулы декомпозиции (32)–(33) для $i \in J_{n-1}, j \in J_n$ имеют вид:*

$$\widetilde{a}_i = \begin{cases} c_i & \text{\textit{при}}\ \ i \leqslant k, \\ c_{i+1} & \text{\textit{при}}\ \ i \geqslant k+1, \end{cases} \tag{34}$$

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при}}\ \ j \neq k+1, \\ c_{k+1} - c_k & \text{\textit{при}}\ \ j = k+1. \end{cases} \tag{35}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 11. □

Замечание 5. *Согласно формуле (35) вэйвлетным базисом пространства W_n служит сплайн ω_{k+1}, т. е. $W_n = \{b\,\omega_{k+1} \mid b \in \mathbb{R}^1\}$.*

Пусть теперь известны коэффициенты $\widetilde{a}_i, i \in J_{n-1}$ и b в разложениях проекций элемента $u \in \mathbb{S}(X_n)$ на пространства $\mathbb{S}(\widetilde{X}_n)$ и

W_n: $\widetilde{P}_n u = \sum\limits_{i\in J_{n-1}} \widetilde{a}_i\,\widetilde{\omega}_i$, $\widetilde{Q}_n u = b\,\omega_{k+1}$. Найдем формулы для определения коэффициентов c_j для представления элемента u в виде суммы $u = \sum\limits_{j\in J_n} c_j\,\omega_j$; упомянутые формулы называются *формулами реконструкции.*

Оператор $\widetilde{\mathfrak{R}}_n : \widetilde{\mathfrak{F}}_n \mapsto \mathfrak{C}_n$, $\quad \widetilde{\mathfrak{R}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T & I \end{pmatrix}$, для которого

$$\mathbf{c}_n = \widetilde{\mathfrak{R}}_n \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \iff \mathbf{c}_n = \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T \widetilde{\mathbf{a}}_n + \mathbf{b}_n,$$

называется оператором *реконструкции.*

Теорема 15. *Операторы $\widetilde{\mathfrak{D}}_n$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}_n$ взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathfrak{C}_n$ и $\widetilde{\mathfrak{F}}_n$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 12. □

Теорема 16. *Если $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $i \in J_n$, то для сплайн-вэйвлетного сжатия (30) формулы реконструкции имеют вид:*

$$c_i = \begin{cases} \widetilde{a}_i & \textit{при} \;\; i \leqslant k, \\ b_{k+1} + \widetilde{a}_k & \textit{при} \;\; i = k+1, \\ \widetilde{a}_{i-1} & \textit{при} \;\; i \geqslant k+2. \end{cases}$$

Доказательство следует непосредственно из формул (34) и (35). □

7. Сплайн-вэйвлетное уточнение на интервале. Согласно калибровочным соотношениям (9) справедливо включение

$$\mathbb{S}(X) \subset \mathbb{S}(\overline{X}).$$

Рассмотрим оператор $\overline{P}$ проектирования пространства $\mathbb{S}(\overline{X})$ на подпространство $\mathbb{S}(X)$, задаваемый формулой

$$\overline{P}\,\overline{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i a_i\,\omega_i, \quad a_i = \langle f_i, \overline{u}\rangle \;\; \forall\, \overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X}),$$

и введем оператор $\overline{Q} = I - \overline{P}$.

Пространство $\overline{W} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{Q}\,\mathbb{S}(\overline{X})$ называется *пространством вэйвлетов (всплесков)*, а прямое разложение

$$\mathbb{S}(\overline{X}) = \mathbb{S}(X) \dotplus \overline{W}, \tag{36}$$

называется *сплайн-вэйвлетным уточнением* пространства $\mathbb{S}(\overline{X})$.

В соответствии с равенством (36) для $u \in \mathbb{S}(\overline{X})$ имеем

$$\overline{u} = \sum_i a_i\,\omega_i + \sum_{i'} \overline{b}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'} = \sum_{i'} \left(\sum_i a_i\,\mathfrak{p}_{i,i'} + \overline{b}_{i'} \right) \overline{\omega}_{i'},$$

так что для чисел $\overline{c}_j = \langle \overline{f}_j, \overline{u} \rangle$ получаем

$$\overline{c}_j = \sum_i a_i\,\mathfrak{p}_{i,j} + \overline{b}_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{37}$$

Пусть известны коэффициенты $\overline{c}_{i'}$ в разложении элемента

$$\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X})$$

по элементам базиса $\overline{\omega}_{i'}$, а именно:

$$\overline{u} = \sum_{i'} \overline{c}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'}.$$

Из соотношений (37) имеем

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j}\,a_i,$$

используя равенство $a_i = \langle f_i, \overline{u} \rangle$, получаем

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j}\,\langle f_i, \sum_{i'} \overline{c}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'} \rangle =$$

$$= \overline{c}_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \sum_{i'} \overline{c}_{i'} \langle f_i, \overline{\omega}_{i'} \rangle = \overline{c}_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \sum_{i'} \overline{c}_{i'}\,\mathfrak{q}_{i,i'}.$$

Формулы

$$a_i = \sum_{i'} \mathfrak{q}_{i,i'}\,\overline{c}_{i'}, \tag{38}$$

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_{i'} \left(\sum_i \mathfrak{p}_{i,j}\,\mathfrak{q}_{i,i'} \right) \overline{c}_{i'} \tag{39}$$

называются *формулами декомпозиции*.

Введем вектор-столбцы

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, a_{-1}, a_0,\ a_1, \ldots)^T,$$
$$\overline{\mathbf{b}} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{b}_{-1}, \overline{b}_0, \overline{b}_1, \ldots)^T,$$
$$\overline{\mathbf{c}} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{c}_{-1}, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \ldots)^T$$

и перепишем формулы декомпозиции (38)–(39) в матричном виде

$$\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{c}} - \mathfrak{P}^T\,\mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}}.$$

Применяя к предыдущему равенству матрицу $\mathfrak{Q}$ и используя формулу (17), получаем

$$\mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{b}} = \mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}} - \mathfrak{Q}\,\mathfrak{P}^T\,\mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}} = \mathbf{0}.$$

Итак, вектор $\overline{\mathbf{b}}$ содержится в ядре оператора $\mathfrak{Q}$: $\overline{\mathbf{b}} \in \ker \mathfrak{Q}$. Пусть $\overline{\mathcal{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{\mathbf{b}} \mid \overline{\mathbf{b}} = (\ldots, \overline{b}_{-1}, \overline{b}_0, \overline{b}_1, \ldots)^T,\ \mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{b}} = 0\}$, т. е. $\overline{\mathcal{B}} = \ker \mathfrak{Q}$. Рассмотрим еще два экземпляра введенного ранее пространства $\mathbb{L}$, обозначая их через $\mathcal{A}$ и $\overline{\mathcal{C}}$: элементами пространства $\mathcal{A}$ являются вектор-столбцы $\mathbf{a} = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)^T$, а элементами пространства $\overline{\mathcal{C}}$ — вектор-столбцы $\overline{\mathbf{c}} = (\ldots, \overline{c}_{-1}, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \ldots)^T$. Пусть $\overline{\mathcal{F}}$ — прямое произведение пространств $\mathcal{A}$ и $\overline{\mathcal{B}}$: $\overline{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \times \overline{\mathcal{B}}$, т. е.

$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \;\middle|\; \mathbf{a} \in \mathcal{A},\ \overline{\mathbf{b}} \in \overline{\mathcal{B}} \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{D}:\ \overline{\mathcal{C}} \mapsto \overline{\mathcal{F}}, \quad \mathfrak{D} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ I - \mathfrak{P}^T\,\mathfrak{Q} \end{pmatrix},$$

для которого

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \mathfrak{D}\,\overline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \end{pmatrix} \overline{\mathbf{c}} \iff \begin{cases} \mathbf{a} = \mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}} \\ \overline{\mathbf{b}} = (I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q})\,\overline{\mathbf{c}} \end{cases},$$

этот оператор называется оператором *декомпозиции.*

Теорема 17. *Для сплайн-вэйвлетного уточнения (36) формулы декомпозиции имеют вид:*

$$a_i = \begin{cases} \overline{c}_i & \text{при } i \leqslant k, \\ \overline{c}_{i+1} & \text{при } i \geqslant k+1, \end{cases} \tag{40}$$

$$\overline{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k+1, \\ \overline{c}_{k+1} - \overline{c}_k & \text{при } j = k+1. \end{cases} \tag{41}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 11. □

Замечание 6. *Вэйвлетным базисом пространства* $\overline{W}$ *служит сплайн* $\overline{\omega}_{k+1}$, *т. е.* $\overline{W} = \{\overline{b}\,\overline{\omega}_{k+1} \mid \overline{b} \in \mathbb{R}^1\}$.

Пусть теперь известны коэффициенты a_i и $\overline{b}$ в разложениях проекций элемента $\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X})$ на пространства $\mathbb{S}(X)$ и $\overline{W}$: $\overline{P}\overline{u} = \sum\limits_i a_i\,\omega_i$, $\overline{Q}\overline{u} = \overline{b}\,\overline{\omega}_{k+1}$. Найдем формулы для определения коэффициентов $\overline{c}_j$ для представления элемента $\overline{u}$ в виде суммы $\overline{u} = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \overline{c}_j\,\overline{\omega}_j$; упомянутые формулы называются *формулами реконструкции*.

Оператор $\mathfrak{R}:\ \overline{\mathcal{F}} \mapsto \overline{\mathcal{C}}$, $\quad \mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} (\,\mathfrak{P}^T \quad I\,)$, для которого

$$\overline{\mathbf{c}} = \mathfrak{R}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = (\,\mathfrak{P}^T \quad I\,)\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} \iff \overline{\mathbf{c}} = \mathfrak{P}^T\mathbf{a} + \overline{\mathbf{b}},$$

называется оператором *реконструкции.*

Теорема 18. *Операторы* $\mathfrak{D}$ *и* $\mathfrak{R}$ *взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств* $\overline{\mathcal{C}}$ *и* $\overline{\mathcal{F}}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 12. □

Теорема 19. *Для сплайн-вэйвлетного уточнения (36) формулы реконструкции имеют вид:*

$$\overline{c}_i = \begin{cases} a_i & \text{при } \ i \leqslant k, \\ \overline{b}_{k+1} + a_k & \text{при } \ i = k+1, \\ a_{i-1} & \text{при } \ i \geqslant k+2. \end{cases}$$

Доказательство следует непосредственно из формул (40) и (41). □

8. Сплайн-вэйвлетное уточнение на отрезке. Согласно калибровочным соотношениям (9) справедливо включение

$$\mathbb{S}(X_n) \subset \mathbb{S}(\overline{X}_n).$$

Рассмотрим оператор $\overline{P}_n$ проектирования пространства $\mathbb{S}(\overline{X}_n)$ на подпространство $\mathbb{S}(X_n)$, задаваемый формулой

$$\overline{P}_n\,\overline{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in J_n} a_i\,\omega_i, \quad a_i = \langle f_i, \overline{u}\rangle \ \ \forall\,\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X}_n),$$

и введем оператор $\overline{Q}_n = I - \overline{P}_n$, где I – тождественный в $\mathbb{S}(\overline{X}_n)$ оператор.

Пространство $\overline{W}_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{Q}_n\,\mathbb{S}(\overline{X}_n)$ называется *пространством вэйвлетов (всплесков)*, а прямое разложение

$$\mathbb{S}(\overline{X}_n) = \mathbb{S}(X_n) \dotplus \overline{W}_n, \tag{42}$$

называется *сплайн-вэйвлетным уточнением* пространства $\mathbb{S}(\overline{X}_n)$.

В соответствии с равенством (42) для $u \in \mathbb{S}(\overline{X}_n)$ имеем

$$\overline{u} = \sum_{i \in J_n} a_i\,\omega_i + \sum_{i' \in J_{n+1}} \overline{b}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'} = \sum_{i' \in J_{n+1}} \left(\sum_{i \in J_n} a_i\,\mathfrak{p}_{i,i'} + \overline{b}_{i'} \right) \overline{\omega}_{i'},$$

так что для чисел $\overline{c}_j = \langle \overline{f}_j, \overline{u} \rangle$ получаем

$$\overline{c}_j = \sum_{i \in J_n} a_i\,\mathfrak{p}_{i,j} + \overline{b}_j \quad \forall\, j \in J_{n+1}. \tag{43}$$

Пусть известны коэффициенты $\overline{c}_{i'}$ в разложении элемента

$$\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X}_n)$$

по элементам базиса $\overline{\omega}_{i'}$, а именно:

$$\overline{u} = \sum_{i' \in J_{n+1}} \overline{c}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'}.$$

Из соотношений (43) имеем

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_{i \in J_n} \mathfrak{p}_{i,j}\,a_i \quad \forall\, j \in J_{n+1},$$

используя равенство $a_i = \langle f_i, \overline{u} \rangle$, для всех $j \in J_{n+1}$ получаем

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_{i \in J_n} \mathfrak{p}_{i,j}\,\langle f_i, \sum_{i' \in J_{n+1}} \overline{c}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'} \rangle =$$

$$= \overline{c}_j - \sum_{i \in J_n} \mathfrak{p}_{i,j} \sum_{i' \in J_{n+1}} \overline{c}_{i'} \langle f_i, \overline{\omega}_{i'} \rangle = \overline{c}_j - \sum_{i \in J_n} \mathfrak{p}_{i,j} \sum_{i' \in J_{n+1}} \overline{c}_{i'}\,\mathfrak{q}_{i,i'}.$$

Формулы

$$a_i = \sum_{i' \in J_{n+1}} \mathfrak{q}_{i,i'}\,\overline{c}_{i'} \quad \forall\, i \in J_n, \tag{44}$$

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_{i' \in J_{n+1}} \left(\sum_{i \in J_n} \mathfrak{p}_{i,j}\, \mathfrak{q}_{i,i'} \right) \overline{c}_{i'} \quad \forall j \in J_{n+1}, \tag{45}$$

называются *формулами декомпозиции.*

Введем вектор-столбцы

$$\mathbf{a}_n \stackrel{\text{def}}{=} (a_0,\ a_1, \ldots, a_n)^T,$$
$$\overline{\mathbf{b}}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{b}_0, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_{n+1})^T,$$
$$\overline{\mathbf{c}}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{c}_0, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_{n+1})^T$$

и перепишем формулы декомпозиции (44)–(45) в матричном виде

$$\mathbf{a}_n = \overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathbf{c}}_n, \quad \overline{\mathbf{b}}_n = \overline{\mathbf{c}}_n - \overline{\mathfrak{P}}_n^T\, \overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathbf{c}}_n.$$

Применяя к предыдущему равенству матрицу $\overline{\mathfrak{Q}}_n$ и используя формулу (20), получаем

$$\overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathbf{b}}_n = \overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathbf{c}}_n - \overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathfrak{P}}_n^T\, \overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathbf{c}}_n = \mathbf{0}.$$

Итак, вектор $\overline{\mathbf{b}}_n$ содержится в ядре оператора $\overline{\mathfrak{Q}}_n : \overline{\mathbf{b}}_n \in \ker \overline{\mathfrak{Q}}_n$.

Рассмотрим линейный оператор из пространства $\overline{\mathcal{C}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_{n+1}$ в пространство $\mathcal{A}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_n$, определяемый матрицей $\overline{\mathfrak{Q}}_n$ в нем. Ядро этого оператора представляет собой линейное пространство; обозначим его через $\overline{\mathcal{B}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{\mathbf{b}}_n \mid \overline{\mathbf{b}}_n = (\overline{b}_0, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_{n+1})^T,\ \overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathbf{b}}_n = 0\}$, т. е. $\overline{\mathcal{B}}_n = \ker \overline{\mathfrak{Q}}_n$.

Пусть $\overline{\mathcal{F}}_n$ — прямое произведение пространств $\mathcal{A}_n$ и $\overline{\mathcal{B}}_n$:

$$\overline{\mathcal{F}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_n \times \overline{\mathcal{B}}_n,$$

т. е.

$$\overline{\mathcal{F}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}_n,\ \overline{\mathbf{b}}_n \in \overline{\mathcal{B}}_n \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\overline{\mathfrak{D}}_n :\ \overline{\mathcal{C}}_n \mapsto \overline{\mathcal{F}}_n, \quad \overline{\mathfrak{D}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{Q}}_n \\ I - \overline{\mathfrak{P}}_n^T\, \overline{\mathfrak{Q}}_n \end{pmatrix},$$

для которого

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{D}}_n\, \overline{\mathbf{c}}_n = \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{Q}}_n \\ I - \overline{\mathfrak{P}}_n^T \overline{\mathfrak{Q}}_n \end{pmatrix} \overline{\mathbf{c}}_n \iff \begin{cases} \mathbf{a}_n = \overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathbf{c}}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n = (I - \overline{\mathfrak{P}}_n^T \overline{\mathfrak{Q}}_n)\, \overline{\mathbf{c}}_n \end{cases},$$

этот оператор называется оператором *декомпозиции.*

Теорема 20. *Если* $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, *то для сплайн-вэйвлетного уточнения (42) формулы декомпозиции для* $i \in J_n, j \in J_{n+1}$ *имеют вид:*

$$a_i = \begin{cases} \overline{c}_i & \text{при } \; i \leqslant k, \\ \overline{c}_{i+1} & \text{при } \; i \geqslant k+1, \end{cases} \tag{46}$$

$$\overline{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{при } \; j \neq k+1, \\ \overline{c}_{k+1} - \overline{c}_k & \text{при } \; j = k+1. \end{cases} \tag{47}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 11. □

Замечание 7. *Вэйвлетным базисом пространства* $\overline{W}_n$ *служит сплайн* $\overline{\omega}_{k+1}$, *т. е.* $\overline{W}_n = \{\overline{b}\,\overline{\omega}_{k+1} \mid \overline{b} \in \mathbb{R}^1\}$.

Пусть теперь известны коэффициенты $a_i, i \in J_n$ и $\overline{b}$ в разложениях проекций элемента $\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X}_n)$ на пространства $\mathbb{S}(X_n)$ и $\overline{W}_n$: $\overline{P}_n\,\overline{u} = \sum\limits_{i \in J_n} a_i\,\omega_i$, $\overline{Q}_n\,\overline{u} = \overline{b}\,\overline{\omega}_{k+1}$. Найдем формулы для определения коэффициентов $\overline{c}_j$ для представления элемента $\overline{u}$ в виде суммы $\overline{u} = \sum\limits_{j \in J_{n+1}} \overline{c}_j\,\overline{\omega}_j$; упомянутые формулы называются *формулами реконструкции.*

Оператор $\overline{\mathfrak{R}}_n : \overline{\mathfrak{F}}_n \mapsto \overline{\mathfrak{C}}_n$, $\quad \overline{\mathfrak{R}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{P}}_n^T & I \end{pmatrix}$, для которого

$$\overline{\mathbf{c}}_n = \overline{\mathfrak{R}}_n \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{P}}_n^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} \iff \overline{\mathbf{c}}_n = \overline{\mathfrak{P}}_n^T \mathbf{a}_n + \overline{\mathbf{b}}_n,$$

называется оператором *реконструкции.*

Теорема 21. *Операторы* $\overline{\mathfrak{D}}_n$ *и* $\overline{\mathfrak{R}}_n$ *взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств* $\overline{\mathfrak{C}}_n$ *и* $\overline{\mathfrak{F}}_n$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 12. □

Теорема 22. *Если* $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}, i \in J_{n+1}$, *то для сплайн-вэйвлетного уточнения (42) формулы реконструкции имеют вид:*

$$\overline{c}_i = \begin{cases} a_i & \text{при } \; i \leqslant k, \\ \overline{b}_{k+1} + a_k & \text{при } \; i = k+1, \\ a_{i-1} & \text{при } \; i \geqslant k+2. \end{cases}$$

Доказательство следует непосредственно из формул (46) и (47). □

Литература

1. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов / Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. М.: Мир, 2005. 671 с.

2. *Sweldens W.* The lifting scheme: A construction of second generation wavelets // SIAM J. Math. Anal. 1997. Vol. 29, n. 2. P. 511–546.

3. *Демьянович Ю.К.* Всплески & минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 200 с.

4. *Buhmann M.D.* Multiquadratic prewavelets on nonequally spaced knots in one dimension // Math. Comput. 1995. No. 64. P. 1611–1625.

5. *Daubechies I., Guskov I., Schröder P., Sweldens W.* Wavelets on irregular point sets // Phil. Trans R. Soc. A. 1999. No. 357 (1760). P. 2397–2413.

6. *Lyche T., Mørken K., Quak E.* Theory and Algorithms for non-uniform spline wavelets // Multivariate Approximation and Applications / N. Dyn, D. Leviatan, D. Levin, and A. Pinkus, (eds). Cambridge: Cambridge University Press, 2001. P. 152–187.

7. *Демьянович Ю.К.* Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 3. С. 313–316. *English transl.:* Dokl. Math. 65, 47–50 (2002).

8. *Ford J. M., Oseledets I. V., Tyrtyshnikov E. E.* Matrix approximations and solvers using tensor products and non-standard wavelet transforms related to irregular grids // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. Vol. 19, n. 2. P. 185–204.

9. *Демьянович Ю.К.* Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 4. С. 1–4. *English transl.:* Dokl. Math. 71, 220–224 (2005).

10. *Демьянович Ю.К., Макаров А.А.* Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов // Проблемы матем. анализа. 2006. Вып. 34. С. 39–54. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 142 (2007), no. 1, 1769—1787.

11. *Макаров А.А.* О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка // Проблемы матем. анализа. 2008. Вып. 38. С. 47–60. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 156 (2009), no. 4, 617—631.

12. *Макаров А.А.* Один вариант сплайн-вэйвлетного разложения пространств B-сплайнов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2009. Вып. 2. С. 59–71.

13. *Mühlbach G.* ECT-B-splines defined by generalized divided differences // J. Comput. and Appl. Math. 2006. No. 187. P. 96–122.

14. *Макаров А.А.* Нормализованные тригонометрические сплайны лагранжева типа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 3. С. 81–87. *English transl.:* Vestnik St. Petersburg University: Mathematics, Allerton Press 41 (2008), no. 3, 266–272.

15. *Демьянович Ю.К.* Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994. 356 с.

Макаров Антон Александрович — канд. физ.-мат. н.; ассистент кафедры параллельных алгоритмов математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: вычислительная математика, аппроксимация, интерполяция, сплайны, вэйвлеты, всплески, математические основы цифровой обработки сигналов, сжатие данных, параллельные алгоритмы, компьютерная геометрия. Число научных публикаций — 34. Antony.Makarov@gmail.com; СПбГУ, Университетский пр. д. 28, Петродворец, г. Санкт-Петербург, 198504, РФ.

Anton A. Makarov — PhD in Computer Science, Teaching assistant of Parallel Algorithms Department, St.-Petersburg State University. Research area: computational mathematics, approximation, interpolation, splines, wavelets, digital signal processing, data compression, parallel algorithms, computer aided geometric design. Number of publications — 34. Antony.Makarov@gmail.com; St.-Petersburg State University, Universitetsky pr., 28, Petrodvorets, St. Petersburg, 198504, Russia.

Поддержка исследований. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке КНВШ г. Санкт-Петербурга.

Рекомендовано лаб. ТиМПИ СПИИРАН, зав. лаб. А.Л. Тулупьев, д-р физ.мат. наук, доц.

Статья поступила в редакцию 10.01.2010.

РЕФЕРАТ

Макаров А.А. **Кусочно-непрерывные сплайн-вэйвлеты на неравномерной сетке**

Сплайны и вэйвлеты (всплески, вейвлеты) широко применяются при составлении эффективных алгоритмов обработки больших потоков цифровой информации. Хорошо известны вэйвлетные разложения в случае равномерной сетки на интервале $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$. В этом случае применяется мощный аппарат гармонического анализа (в пространстве функций $L^2(\mathbb{R}^1)$ и в пространстве последовательностей l^2), используется лифтинговая схема или вэйвлетная схема.

Многие практические приложения требуют рассматривать ограниченный интервал $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ и неравномерную сетку. Например, для эффективного сжатия неоднородных потоков информации (имеющих сингулярности или быстро меняющиеся характеристики) целесообразно использовать адаптивную неравномерную сетку, учитывающую особенности обрабатываемого потока. Обычно применяемое преобразование Фурье в условиях неравномерной сетки использовать затруднительно.

Сплайны, построенные в данной работе, являются неполиномиальным обобщением B-сплайнов, в зависимости от выбранной порождающей функции φ. Исходными здесь являются аппроксимационные соотношения, из которых могут быть получены, например, тригонометрические, гиперболические и экспоненциальные сплайны. Частным случаем рассматриваемых в работе сплайнов является характеристическая функция, являющаяся полиномиальным B-сплайном нулевой степени. В этом случае получается хорошо известный вэйвлет Хаара на равномерной сетке.

Цель данной работы — построить сплайны лагранжева типа нулевого порядка, доказать вложенность пространств сплайнов на последовательности укрупняющихся/измельчающихся неравномерных сеток, построить простую реализацию системы функционалов, биортогональную систему сплайнов, получить вэйвлетные разложения и алгоритмы декомпозиции и реконструкции потоков информации в случаях бесконечного потока с сеткой, заданной на открытом интервале и конечного потока с сеткой, заданной на отрезке.

SUMMARY

Makarov A.A. **Piecewise continuous spline wavelets on irregular grid.**

Splines and wavelets are widely used in information theory. Wavelet decompositions are connected with constructing effective algorithms for processing (compression) large digital information flows. If $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$ and a grid is uniform, one can apply the powerful tools of harmonic analysis (in the space of functions $L^2(\mathbb{R}^1)$ and in the space of sequences l^2), lifting scheme or wavelet scheme. For digital information flows with rapidly varying characteristics it is reasonable to use a nonuniform grid adapted to the flow under processing. This allows us to improve an approximation of functions without difficult calculations. The situation where a grid is nonuniform and (α, β) does not coincide with the real axis, has not been studied well since methods of harmonic analysis are not easily applicable in this case.

The goal of this paper is to construct piecewise continuous spline of Lagrange type, to prove embedding of spaces of spline spaces for arbitrary refinement of grids, to provide a simple realization of the system of functionals biorthogonal to the coordinate splines, to obtain a wavelet decomposition of the chain of embedded spaces of splines for an arbitrary refinement of a nonuniform grid, and to derive the corresponding decomposition and reconstruction formulas, to construct wavelet decompositions and decomposition and reconstruction algorithms in the case of an infinite flow for a grid on an open interval and a finite flow for a grid on a segment are constructed. Finite dimensionality of mentioned spaces allows one to get spline wavelet decomposition for segment $[a, b]$ with restriction discussed functions from interval (α, β) to $[a, b]$, where $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$.

Note that obtained splines are not polynomial generalizations of B-splines. The splines include as a special case trigonometric, hyperbolic, and exponential splines.