УДК 519.8 **DOI** 10.15622/ia.21.2.5

Г.И. Алгазин, Д.Г. Алгазина

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ В РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ЛИДЕРОВ

Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. **Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров.**

Аннотация. Рассматривается олигополия с произвольным числом лидеров по Штакельбергу в условиях неполной, асимметричной информированности агентов и неадекватности предсказаний ими действий конкурентов. Исследуются модели процессов принятия агентами индивидуальных решений. Теоретической основой для построения и аналитического исследования моделей процессов являются теория рефлексивных игр и теория коллективного поведения. Они дополняют друг друга тем, что рефлексивные игры позволяют использовать процедуры коллективного поведения и результаты размышлений агентов, приводящие к равновесию Нэша. Динамический процесс принятия решений рассматривается как повторяемые статические игры на диапазоне допустимых ответов агентов на ожидаемые действия окружения с учетом в каждой игре реальных экономических ограничений и конкурентоспособности. Каждый рефлексирующий агент в каждой игре рассчитывает свое текущее положение цели и изменяет свое состояние, делая шаги в направлении текущего положения цели так, чтобы получить положительную собственную прибыль или минимизировать потери. Основным результатом работы являются достаточные условия сходимости процессов в дискретном времени для случая линейных издержек агентов и линейного спроса. Получены новые аналитические выражения для диапазонов величин текущих шагов агентов, при которых гарантируется сходимость моделей коллективного поведения к статичному равновесию Нэша. Что позволяет каждому агенту максимизировать собственную прибыль, предполагая полное (совершенное) знание среди агентов. Анализируются также процессы, когда агент выбирает свой наилучший ответ. Последние могут не давать сходящиеся траектории. Подробно обсуждается случай дуополии в сравнении с современными результатами. Приведены необходимые математические леммы, утверждения и их доказательства.

Ключевые слова: рефлексивные игры, олигополия, лидер по Штакельбергу, неполная информированность, коллективное поведение, равновесие, условия сходимости.

1. Введение. Представляет повышенный интерес поведение неоднородных групп в типичных повторяющихся ситуациях, когда каждый из агентов, независимо от других в рамках собственной информированности выбирает свою стратегию, а функции выигрыша и равновесие характеризуют успех стратегий [1–7].

Конкурентный олигопольный рынок дает широкий спектр таких ситуаций. Чтобы успешно конкурировать на рынке, фирмы-агенты должны уметь прогнозировать действия своих конкурентов. Поэтому математические исследования, направленные на повышение адекватности таких прогнозов, являются актуальными для современных рынков. В соответствующих теоретико-игровых моделях используются различные предположения о взаимной информированности и лидерстве агентов в принятии решений.

Впервые аналитический подход к исследованию взаимодействия фирм (агентов) на конкурентном рынке предложен Курно [8]. Он полагал, что на рынке дуополии с целью максимизации собственной прибыли каждой фирме следует устанавливать объем выпуска, считая неизменными объемы выпуска конкурентов, т. е. другим фирмам не выгодно отклониться от равновесия для получения «мгновенной прибыли». Фирмы рациональны в том смысле, что используют полную информацию о конъюнктуре рынка и не только знают все условия окружения, но знают, что все фирмы об этом знают и используют это для максимизации собственной прибыли. Идеи, заложенные в основание подхода Курно, определили направления дальнейших исследований. Так в «классическом» определении равновесия Нэша [9] используется концепция общего (а также полного или совершенного) знания, полагающая, что вся существенная информация и принципы принятия решений агентами всем им известны, всем известно, что всем это известно и т. д. до бесконечности [3, 10]. Так, если теоретико-игровая модель формализована в виде игры в нормальной форме, то агенты всегда выберут равновесные по Нэшу стратегии. В современных терминах равновесие Курно, это – статическое равновесие при полной информации или некооперативное (некоалиционное) равновесие Курно-Нэша в статической игре.

Вместе с тем, многочисленные исследования рынков свидетельствуют, что условие о наличии общего знания, как правило, невыполнимо. В конкурентной среде агенты часто не заинтересованы раскрывать другим агентам свою информацию, которая является существенной для принятия ими адекватных решений. Так же, как показано в экспериментах [11–14], достижению равновесия, предсказанного теорией, могут препятствовать такие факторы: ограниченность когнитивных возможностей агентов, необходимость уверенности каждого агента в том, что все остальные могут вычислить равновесие Нэша и сделают это, неполная информированность, наличие нескольких равновесий.

Отказ от предположения о наличии среди агентов общего знания приводит к тому, что каждый агент в рамках своей информированности следует некоторой повторяемой процедуре принятия индивидуальных решений. Рациональность поведения агента заключается в желании максимизировать свою целевую функцию. Однако его наилучшее действие (решение) зависит в общем случае от того, какое действие выберет любой другой агент, что трудно однозначно знать априори, и поэтому он вынужден предсказывать поведение конкурентов и выбирать свои действия уже с учетом своего прогноза. При этом равновесие Нэша «превращается в более общее информационное равновесие Нэша, в рамках которого каждый агент осуществляет информационную рефлексию – при принятии решений использует не только свою информацию о существенных параметрах, но и свои представления о представлениях других агентов об этих параметрах, представления о представлениях о представлениях и т. д. [3]».

Имеется значительное число работ, в которых в дополнение к фирмам, действующим по Курно, вводится фирма, действующая по особым правилам. Особенность заключается в том, что она устанавливает свой уровень производства, максимизируя собственную прибыль при явном учете реакции остальных фирм на изменения ее объема выпуска. Остальные же фирмы, как и раньше, максимизируют свою прибыль, используя предположение Курно о неизменности производства других фирм. Эту фирму называют лидером или фирмой, действующей по Штакельбергу, так как он первым рассмотрел такую стратегию поведения [15]. Потенциально, лидер имеет возможность получить большую прибыль и поэтому на конкурентном олигопольном рынке каждый из рациональных агентов, ради увеличения собственной прибыли, стремится стать лидером. Реализуя свои лидерские амбиции, они вносят на рынок неоднородность.

В своем подавляющем большинстве проводимые исследования предполагают только одного лидера на рынке, но интерес представляют также рефлексивной игры, когда реализованы лидерские амбиции нескольких агентов [7, 16–23]. Изучается лидерство как на одном [13, 17, 18, 24, 25], так и на разных уровнях [7, 10, 20–23]. Сетевые модели рынка с неоднородным по составу и нефиксированными ролями участников при полной информации рассматриваются в монографии [26]. В этих и многих других современных исследованиях рынка растет понимание того, что в условиях асимметричной информированности агентов и неопределенности выбора конкурентов равновесие достигается не в результате однократного выбора агентами своих действий, а как исход итерационного процесса рефлексивного принятия решений.

В настоящей статье рассматривается проблема достижения равновесия на рынке олигополии на основе математического моделирования процессов принятия рациональных решений в условиях неполной, асимметричной информированности агентов и неадекватности предсказаний ими действий конкурентов. Работы в этом направлении являются актуальными ввиду значимости понимания процессов принятия решений, происходящих на реальных современных рынках, и сближения с ними теоретических моделей. Несмотря на множество различных рефлексивных моделей и определения игр на них, на сегодняшний день отсутствует более-менее завершенные исследования и пока не существует универсального аппарата аналитических решений для широких классов задач рефлексивного поведения, в комплексе учитывающих меняющиеся ситуации по экономическим ограничениям, конкуренцию, несовпадение экономических интересов и неполную, асимметричную информированность хозяйствующих субъектов при принятии решений. Пока основные успехи ограничены набором частных и достаточны простых моделей.

Особенностью исследований в статье является то, что динамический процесс принятия решений осуществляется не путем оптимальных ответов агентов на их ожидаемые действия, а как повторяемые статические игры на диапазоне допустимых ответов с учетом в каждой игре реальных экономических ограничений по их прибыли и конкурентоспособности. Традиционное для теории игр оптимизационное поведение, когда каждый агент на каждом шаге процесса принятия решений выбирает свой наилучший ответ, зачастую не позволяет получить сходящиеся к равновесию траектории. Здесь же каждый из рефлексирующих агентов рассчитывает свое текущее положение цели и изменяет свое состояние в направлении текущего положения цели, рассчитывая при выборе ответов на ожидаемые действия конкурентов на положительную собственную ожидаемую прибыль или минимизацию потерь.

Теоретической основой для построения и исследования процессов являются теория рефлексивных игр [3, 10] и теория коллективного поведения [2, 27]. Они дополняют друг друга тем, что рефлексивные игры позволяют использовать процедуры коллективного поведения и результаты размышлений агентов, приводящие к равновесию Нэша.

Основным новым результатом проведенного аналитического исследования являются достаточные условия сходимости процедур рефлексивного коллективного поведения, к равновесию для олигополии с произвольным числом лидеров по Штакельбергу в классе линейных издержек агентов и линейного спроса.

Результаты, представленного в статье исследования, могут иметь прикладное значение для понимания группового поведения агентов на современных конкурентных рынках. Что является особенно важным в условиях цифровизации экономики, нуждающейся в новых моделях взаимодействия хозяйствующих субъектов, осуществляющих совместную деятельность, позволяющие оперативное реагирование и регулирование рынков.

2. Постановка задач исследования. Рассматривается динамическая система, состоящая из n взаимосвязанных целенаправленных агентов и функционирующая в дискретном времени. Пусть состояние системы в момент времени t дается n-мерным вектором $q^t = (q_1^t, \ldots, q_i^t, \ldots, q_n^t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, и текущее положение цели i-го агента $x_i(q_{-i}^t)$ $\left(i \in N = \{1, \ldots, n\}\right)$ зависит от действий остальных агентов, где $q_{-i}^t = (q_1^t, \ldots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \ldots, q_n^t)$ – состояние окружения для i-го агента, вектор q^t без i-й компоненты. Текущее положение цели агента – такое его действие, которое максимизировало бы его целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же действия, что и в предыдущий [2, 9, 27, 28].

Пусть смена состояния системы при переходе от предыдущего момента времени t к последующему $(t+1)$-му моменту, т.е. преобразование вектора q^t в q^{t+1}, представляется в виде:

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t),\ i \in N,\ t = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ – параметры, выбираемые агентами.

Определим такое итерационное преобразование действий агентов как *процесс 1*.

Модель (1) является наиболее распространенной моделью динамики коллективного поведения. На сегодняшний день имеется немало прикладных моделей, иллюстрирующих эффекты коллективного поведения по модели (1) [2, 3, 10, 24, 25, 27, 29–32].

Модель (1) может являться основой для определения более простых частных процессов. Так при $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$ получаем преобразование:

$$q_i^{t+1} = x_i(q_{-i}^t),\ i \in N,\ t = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Определим итерационное преобразование компонент вектора q^t в компоненты вектора q^{t+1} по формуле (2) как *процесс 2*.

Такой процесс можно условно назвать «оптимизационным», так как каждый агент в каждый момент времени выбирает свой наилучший ответ на действия окружения. Однако такая динамика часто не является сходящейся [2, 3, 25, 27, 29].

Требование неотрицательности действий агентов, возникающее, например, с точки зрения экономических ограничений, может быть реализовано преобразованием вида:

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} x_i(q_{-i}^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \le 0. \end{cases} \tag{3}$$

Определим преобразование (3) действий агентов как *процесс 3*.

Исследования таких процессов можно посмотреть, например, в работах [25, 29].

Модель (1) может являться основой для определения более сложных процессов. Так в следующем процессе учтено условие неотрицательности действий агентов:

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \le 0. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь также $\gamma_i^{t+1} \in [0;1]$.

Определим итерационное преобразование действий агентов по формуле (4) как *процесс 4*.

Ряд прикладных моделей коллективного поведения, когда агенты обнуляют свои действия, если их текущее положение цели равно нулю или отрицательно, можно найти в работах [25, 29]. Другие модификации модели (1) встречаются в монографиях [2, 3, 27].

В основу итерационного процесса вычисления новых действий агентов положена следующая единая для моделей коллективного поведения процедура [2, 3, 27]:

1. Каждый агент $i\,(i \in N)$ в текущий $(t+1)$-й момент времени наблюдает действия других агентов $\{q_i^t\}_{i \in N \setminus \{i\}}$, выбранные ими в предыдущий t-й момент времени (начальные действия агентов $\{q_i^0\}_{i \in N}$ считаются заданными);

2. Каждый агент рассчитывает свое текущее положение цели $x_i(q_{-i}^t)$.

3. Каждый агент в момент времени $(t+1)$ уточняет свое предыдущее действие, делая от него «шаг» $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ к текущему положению цели.

4. Процесс повторяется с п. 1 для следующего момента времени.

В (2) и (3) агент всегда делает полный шаг, полагая $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$, тем самым, выбирает свой наилучший ответ. В (1) и (4) агент выбором параметра $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ может делать «неполный шаг» от своего предыдущего состояния к текущему положению цели. Естественно, чтобы при $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$ (1) переходило в (2), а (4) – в (3).

Характерно, что теория коллективного поведения исследует динамику поведения однородных групп в типичных повторяющихся конфликтных ситуациях, когда каждый рациональный агент принимает решения при достаточно слабых предположениях относительно его информированности.

Приведенная здесь для коллективного (группового) поведения процедура основана на идее метода градиентов для нахождения экстремума аналитической функции. Как и метод градиента, она при одних значениях диапазона величины шага движения к цели может сходиться, при других – расходиться.

Текущее положение цели $x_i\left(q_{-i}^t\right)$ и, соответственно, текущий ответ каждого агента, рассчитываемый по формулам (1)–(4), зависят от того, какие действия выберут другие агенты в тот же самый $(t+1)$-й момент времени, относительно которых трудно однозначно сказать априори. Что вынуждает агентов рефлексировать, т. е. предсказывать поведение других агентов и выбирать свои действия уже с учетом этого прогноза.

Определяющим эффектом рефлексии является достижение равновесия, под которым понимается устойчивый в том или ином (оговариваемом в каждом конкретном случае) смысле исход взаимодействия агентов – вектор их равновесных действий.

Целью настоящей статьи является применение моделей рефлексивного коллективного поведения для описания и прогнозирования группового поведения агентов на рынке олигополии и выявление условий достижения равновесия на их основе.

В нашем исследовании каждый агент может реагировать на действия конкурентов одним из двух способов, которые являются традиционными для моделей олигополистического рынка: рефлексировать как ведомый или рефлексировать как лидер.

Согласно приведенной в [3] классификации ведомый агент имеет нулевой ранг рефлексии, а лидер – первый ранг рефлексии. Агент с нулевым рангом рефлексии выбирает свои действия, считая, что действия остальных агентов будут такими же, что и в предыдущий момент времени. Агент с первым рангом рефлексии считает всех остальных агентов обладающими нулевым рангом рефлексии и что он точно предсказывает их выбор.

В условиях неопределенности выбора конкурентов рефлексивная модель олигополии с лидером имеет свою особенность по сравнению с классической иерархической игрой Штакельберга. В игре Штакельберга лидер делает первым ход, который становится известен другим агентам, В рефлексивной модели выбор реальных действий всеми агентами осуществляется синхронно (одновременно), другие агенты не знают ход лидера, синхронный своему ходу. Подобный прием упрощает реальный процесс последовательных реакций [24, 25, 33], он оправдан и адекватен в случае, когда достигнутое равновесие стабильно [33].

В рефлексивной игре ведомый агент даже не знает, что у него есть лидер, полагая, что он, как и другие агенты, оставит свой объем выпуска неизменным (например, считая остальных агентов менее «интеллектуальными», чем они сами, либо что оппоненты достигли равновесия и им не выгодно от него отклониться). Ведомый агент не знает, что другие такие агенты действуют подобным образом.

В статье рассматривается задача применения рефлексивных повторяющихся игр и моделей динамики коллективного поведения для описания и прогнозирования группового поведения агентов на рынке олигополии в классе линейных функций спроса и издержек агентов. Допускается, что может быть произвольное число ведомых агентов и лидеров. Для лидеров уровни (ранги) лидерства в статье не рассматриваются.

С вычислительной точки зрения динамики для ведомых и лидеров различаются расчетом текущего положения цели. Соответствующие формулы для изучаемой в статье прикладной модели рынка получены в следующем разделе.

Условия сходимости процессов к положению равновесия относятся к начальным приближениям $q^0 = (q_1^0, \ldots, q_n^0)$, параметрам γ_i^{t+1}, общему числу агентов на рынке и к числу агентов, действующих как ведомые и как лидеры.

Информатика и автоматизация. 2022. Том 21 № 2. ISSN 2713-3192 (печ.)
ISSN 2713-3206 (онлайн) www.ia.spcras.ru

Другая основная задача статьи для изучаемой прикладной модели олигопольного рынка – получение аналитических выражений для диапазонов величин шагов агентов, а также условий на начальные приближения q^0, при которых гарантируется сходимость моделей рефлексивного коллективного поведения к равновесию.

Будем полагать, если для динамической системы равновесие $q^* = (q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ существует, то $q_i^* > 0, \ \forall i \in N$. Последнее условие означает, что все агенты конкурентоспособны в равновесии. Для модели олигополии в случае линейных издержек агентов и линейного спроса равновесие существует и единственно. Под равновесием понимается равновесие Нэша. Полагаем также, что $q^0 > 0$.

Под сходимостью к равновесию понимается сходимость по евклидовой норме.

3. Прикладная модель для олигопольного рынка. В качестве прикладной модели рефлексивного коллективного поведения рассмотрим классическую модель олигополии, состоящей из n, конкурирующих объемами выпуска однородной продукции, агентов с целевыми функциями:

$$\Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \varphi_i(q_i) \to \max_{q_i}, \quad i \in N, \tag{5}$$

линейными функциями затрат:

$$\varphi_i(q_i) = c_i q_i + d_i, \quad i \in N, \tag{6}$$

и линейной обратной функции спроса вида:

$$p(Q) = a - bQ. \tag{7}$$

Здесь: q_i – выпуск (действие) i-го агента, $Q = \sum_{i \in N} q_i$ – суммарный объем выпуска, c_i, d_i – предельные и постоянные издержки агентов, $p(Q)$ – единая рыночная цена, a, b – параметры спроса. Полагается, что весь выпуск реализуется, ограничения мощности и коалиции отсутствуют.

Определим расчетные формулы для положения цели $x_i(q_{-i}^t)$ i-го агента в текущий момент времени $(t = 0, 1, 2, \dots)$.

Оптимальный объем активности агента можно определить из условия $\frac{\partial \Pi_i^t}{\partial q_i^t} = \frac{\partial p^t}{\partial q_i^t} \cdot q_i^t + p^t - \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i^t} = 0$. Отсюда $\frac{\partial p^t}{\partial q_i^t} = \frac{1}{q_i^t} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i^t} - p^t \right)$. Из этого равенства с учетом (7) имеем $\frac{\partial p^t}{\partial q_i^t} = -b \cdot \frac{\partial Q^t}{\partial q_i^t} = \frac{1}{q_i^t} \cdot (c_i - a + b \cdot Q^t)$ или $1 + \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = \frac{1}{q_i^t} \cdot h_i - 1 - \frac{1}{q_i^t} \cdot Q_{-i}^t$, где использованы следующие обозначения:

$$h_i = \frac{a - c_i}{b}, \tag{8}$$

$$Q_{-i}^t = \sum\nolimits_{j \neq i} q_j^t, \tag{9}$$

т.е. Q_{-i}^t – суммарный объем выпуска без i-го агента.

Получаем $q_i^t \cdot (2 + \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}) = h_i - Q_{-i}^t$, и, окончательно:

$$q_i^t = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2 + \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}} \quad (i \in N;\, t = 0, 1, 2, \dots). \tag{10}$$

Вначале рассмотрим применение формулы (10) к ведомому агенту.

Ведомый агент, поведение которого известно как поведение по Курно [8], устанавливает объем выпуска, полагая, что другие агенты оставят свои объемы выпуска неизменными. Тогда, согласно определению дифференциала, имеем $dQ_{-i}^t = \sum_{j \in N} \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_j^t} dq_j^t$, и из того чтобы $dQ_{-i}^t = 0$ следует, что для i-го агента должны быть равны нулю не только dq_j^t $(j \neq i)$, но и $\dfrac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}$, так как в противном случае при $dq_i^t \neq 0$ будет $dQ_{-i}^t \neq 0$. Итак, $\dfrac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = 0 \left(i \in N\right)$, а по (10) имеем $q_i^t = \dfrac{h_i - Q_{-i}^t}{2}$.

Обозначим через N_c – множество ведомых агентов. Получаем выражение для оптимального ответа ведомого агента или его текущего положения цели (см. также [25, 29]):

$$x_i(q_{-i}^t) = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2} \quad \left(i \in N_c; t = 0, 1, 2, \ldots\right). \tag{11}$$

Теперь рассмотрим применение формулы (10) к агенту-лидеру.

Лидер устанавливает свой объем выпуска, считая всех остальных агентов ведомыми и полагая, что точно знает их реакцию (объемы выпуска) на его действие.

Допустим, что k-й агент является лидером. Из предположения, что остальные действуют как ведомые, следует, что $dq_i^t = 0$ и $dQ_{-i}^t = 0$ при $i \in N \setminus \{k\}$. Имеем $\dfrac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = 0$, а также $q_i^t = \dfrac{h_i - Q_{-i}^t}{2}$. Из последнего равенства получаем $\dfrac{\partial q_i^t}{\partial q_k^t} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_k^t} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial Q^t}{\partial q_k^t} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial q_i^t}{\partial q_k^t} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial Q_{-k}^t}{\partial q_k^t} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial q_i^t}{\partial q_k^t}$, или $\dfrac{\partial q_i^t}{\partial q_k^t} = -1 - \dfrac{\partial Q_{-k}^t}{\partial q_k^t}$, при $i \in N \setminus \{k\}$. Суммируя левые и правые части последних равенств по $i \in N \setminus \{k\}$, получаем, что $\dfrac{\partial Q_{-k}^t}{\partial q_k^t} = -(n-1) - (n-1)\dfrac{\partial Q_{-k}^t}{\partial q_k^t}$, т.е. $\dfrac{\partial Q_{-k}^t}{\partial q_k^t} = -\dfrac{n-1}{n}$. Тогда по (10) $q_k^t = \dfrac{h_k - Q_{-k}^t}{2 - \dfrac{n-1}{n}}$, или $q_k^t = \dfrac{n\left(h_k - Q_{-k}^t\right)}{n+1}$.

Обозначим через N_s – множество агентов-лидеров. Получаем выражение для оптимального ответа лидера или его текущего положения цели [25, 29]:

$$x_i(q_{-i}^t) = \frac{n\left(h_i - Q_{-i}^t\right)}{1+n} \quad \left(i \in N_s;\, t = 0, 1, 2, \dots\right). \tag{12}$$

Преобразуем (5) с учетом (6)–(9) к виду $\Pi_i^{t+1} = b\left(h_i - Q_{-i}^{t+1} - q_i^{t+1}\right)q_i^{t+1} - d_i$.

Полагая неизменным выпуск остальных агентов, ведомый агент $i \in N_c$ при $h_i - Q_{-i}^{t+1} = h_i - Q_{-i}^t > 0,$ используя параметр $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1],$ по (1) выбирает выпуск q_i^{t+1} (по (4) выбирает положительный выпуск) в направлении текущего положения цели, которое определяется по формуле (11). Если $\gamma_i^{t+1} = 0,$ то он не ожидает изменения своей прибыли. Если $\gamma_i^{t+1} = 1,$ то агент выбирает оптимальный отклик (11) на ожидаемые действия конкурентов, максимизируя ожидаемую прибыль, так как $\dfrac{\partial \Pi_i^{t+1}}{\partial q_i^{t+1}} = b\left(h_i - Q_{-i}^t - 2q_i^{t+1}\right) = 0.$ Агент также выбором параметра $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ может делать «неполный шаг». В модели (4) при $h_i - Q_{-i}^t \le 0$ положительный выпуск дает отрицательную валовую прибыль (т.е. прибыль без учета постоянных издержек d_i) и, чтобы минимизировать ожидаемые потери, агент выбирает нулевой выпуск.

Агент-лидер $i \in N_s$ при $h_i - Q_{-i}^t > 0,$ используя параметр $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1],$ по (1) выбирает выпуск q_i^{t+1} (или по (4) выбирает положительный выпуск) в направлении текущего положения цели, которое определяется по (12). Если $\gamma_i^{t+1} = 0,$ то он не ожидает изменения своей прибыли. Если $\gamma_i^{t+1} = 1,$ то агент выбирает оптимальный отклик (12) на ожидаемые действия окружения, максимизируя ожидаемую прибыль, так как $\dfrac{\partial \Pi_i^{t+1}}{\partial q_i^{t+1}} = b\left(-\dfrac{\partial Q_{-i}^{t+1}}{\partial q_i^{t+1}} - 1\right)q_i^{t+1} + b\left(h_i - Q_{-i}^{t+1} - q_i^{t+1}\right) = b\left(\dfrac{n-1}{n} - 1\right)q_i^{t+1} +$

$+b\left(h_i - Q_{-i}^{t+1} - q_i^{t+1}\right) = b\left(h_i - Q_{-i}^{t+1} - \dfrac{1+n}{n} q_i^{t+1}\right) = 0.$ В модели (4) при $h_i - Q_{-i}^{t} \le 0$ положительный выпуск дает отрицательную валовую прибыль (т.е. прибыль без учета постоянных издержек d_i) и, чтобы минимизировать ожидаемые потери, агент выбирает нулевой выпуск.

Полагаем, что все агенты точно знают собственные затраты и целевую функцию, собственную функцию реакции, включающую параметры спроса a и b, ранее произведенный выпуск другими агентами, но не располагают достоверной априорной информацией относительно ожидаемых объёмах их выпуска, множеств допустимых действий, функций затрат и целевых функций конкурентов. Лидеры также знают общее число агентов на рынке.

Пример 1. Рассмотрим численный пример для процессов (1) – (4) на рынке с 4 агентами $N = \{1,2,3,4\}$. Пусть $\{1,2\} \in N_s$ и $\{3,4\} \in N_c$. Пусть также $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0\right) = \left(250, 250, 250, 200\right)$, $c = \left(c_1, c_2, c_3, c_4\right) = \left(20, 25, 20, 30\right)$, $a = 100$, $b = 0{,}1$. По (8) находим, что $h = \left(h_1, h_2, h_3, h_4\right) = \left(800, 750, 800, 700\right)$. Отношение $\dfrac{a}{b} = 1000$ определяет «ёмкость рынка» (считается, если суммарный объём выпуска Q превышает ёмкость рынка, то фирмы несут потери в объёме полных издержек), а h_i – объём совершенно конкурентного рынка при ценообразовании по предельным издержкам $p\left(Q\right) = c_i$, называемый «совершенно конкурентный объём фирмы i».

Величины $q_i^t, h_i, \dfrac{a}{b}, x_i\left(q_{-i}^t\right)$ имеют натуральные единицы измерения (тонны, штуки и пр.), c_i, a – стоимостные.

В таблице 1 приведены первые двадцать итераций для процесса 4 с четырьмя агентами, из которых первые два действуют по Штакельбергу, другие два агента – по Курно. Объёмы выпуска q_i^t рассчитываются по (4), текущие цели $x_i\left(q_{-i}^t\right)$ по (11) и (12). Шаги γ_i^{t+1} принимают случайным образом одно из двух значений «0,5» или «1».

Таблица 1. Начальный фрагмент численного примера для процесса 4

Итерации	Выпуски				Текущие цели				Параметры шагов			
t	q_1	q_2	q_3	q_4	x_1	x_2	x_3	x_4	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
0	250,0	250,0	250,0	200,0	80,0	40,0	50,0	-25,0				
1	80,0	145,0	150,0	0,0	404,0	416,0	287,5	162,5	1,0	0,5	0,5	1,0
2	242,0	416,0	287,5	81,3	12,2	111,4	30,4	-122,8	0,5	1,0	1,0	0,5
3	127,1	263,7	30,4	0,0	404,7	474,0	204,6	139,4	0,5	0,5	1,0	0,5
4	404,7	368,9	117,5	69,7	195,2	126,5	-21,7	-95,5	1,0	0,5	0,5	0,5
5	299,9	247,7	0,0	0,0	441,9	360,0	126,2	76,2	0,5	0,5	0,5	1,0
6	370,9	303,8	126,2	38,1	265,5	171,8	43,6	-50,5	0,5	0,5	1,0	0,5
7	265,5	237,8	84,9	0,0	381,8	319,7	148,3	55,9	1,0	0,5	0,5	0,5
8	323,7	278,8	116,6	55,9	279,0	203,1	70,8	-9,5	0,5	0,5	0,5	1,0
9	279,0	240,9	70,8	0,0	390,6	320,1	140,1	54,6	1,0	0,5	1,0	0,5
10	334,8	280,5	105,4	27,3	309,4	226,0	78,7	-10,4	0,5	0,5	0,5	0,5
11	309,4	253,3	92,1	0,0	363,7	278,9	118,7	22,7	1,0	0,5	0,5	0,5
12	363,7	278,9	105,4	22,7	314,5	206,6	67,4	-24,0	1,0	1,0	0,5	1,0
13	339,1	206,6	67,4	0,0	420,9	274,8	127,2	43,5	0,5	1,0	1,0	1,0
14	380,0	240,7	127,2	21,7	328,3	176,9	78,8	-23,9	0,5	0,5	1,0	0,5
15	354,2	208,8	78,8	0,0	409,9	253,6	118,5	29,1	0,5	0,5	1,0	0,5
16	382,0	253,6	98,7	14,6	346,5	203,8	74,9	-17,2	0,5	1,0	0,5	0,5
17	346,5	228,7	86,8	0,0	387,6	253,4	112,4	19,0	1,0	0,5	0,5	1,0
18	367,1	253,4	99,6	9,5	350,0	219,1	85,0	-10,0	0,5	1,0	0,5	0,5
19	358,5	219,1	92,3	0,0	390,9	239,3	111,2	15,0	0,5	1,0	0,5	0,5
20	374,7	229,2	101,7	7,5	369,2	212,8	94,3	-2,8	0,5	0,5	0,5	0,5

При полной информированности агентов статичное равновесие Нэша q^* может быть найдено как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} q_i + nQ = nh_i \quad (i \in N_s), \\ q_i + Q = h_i \quad (i \in N_c). \end{cases}$$

Для нашего примера такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} q_1 + 4Q = 3200, \\ q_2 + 4Q = 3000, \\ q_3 + Q = 800, \\ q_4 + Q = 700. \end{cases}$$

Отсюда находим решение: $q^* = (400, 200, 100, 0)$.

По таблице 1 видно, что для процесса 4 имеет место тенденция сходимости к статичному равновесию Нэша. Особенностью процесса является обнуление выпуска агентами, если их текущее положение цели равно нулю или отрицательно. Так, например, на первой и третьей итерациях обнуляется выпуск четвертого агента, а на пятой – выпуски третьего и четвертого агентов.

Приведем также основные выводы по данному примеру, относящиеся к сходимости других процессов при таком же начальном выпуске q^0.

Для процесса 1 при таких же шагах γ_i^{t+1}, как и для процесса 4, также прослеживается тенденция сходимости к равновесию. Последние две итерации для процесса 1 имеют вид $q^{19} = (342,3;\ 224,7;\ 87,8;\ -20,0)$, $q^{20} = (374,2;\ 248,3;\ 107,2;\ 1,3)$.

Процесс 2 расходится. Уже на четвертой и пятой итерациях имеем следующие выпуски: $q^4 = (640,0;\ 600,0;\ 400,0;\ 350,0)$, $q^5 = (-1805,0;\ -1939,4;\ -1406,6;\ -1505,0)$. Далее колебания процесса только увеличиваются.

Процесс 3 не сходится ввиду зацикливания. Начиная с шестой итерации, каждые две соседние итерации такой же вид, как на четвертой и пятой: $q^4 = (640,0;\ 600,0;\ 400,0;\ 350,0)$, $q^5 = (0;\ 0;\ 0;\ 0)$.

Напомним, что процессы 2 и 3 можно рассматривать как частный случай процесса 1 и процесса 4, соответственно, при $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$. Ниже будут получены условия, когда процессы 2 и 3 сходятся.

4. Вспомогательные леммы и их доказательства. Введем функции-индикаторы [2] $\alpha_i^t = 2\left(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t\right)$, характеризующие отклонения текущих выпусков от текущих оптимумов агентов, для агентов с реакцией по Курно $(i \in N_c)$ и $\alpha_i^t = \dfrac{1+n}{n}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t)$ для лидеров $(i \in N_s)$. Коэффициенты «2» и «$\dfrac{1+n}{n}$» введены для последующих удобств. Известно [23, 25], что $h_i = Q^* + q_i^*$ $(i \in N_c)$ и $h_i = Q^* + \dfrac{q_i^*}{n}$

$(i \in N_s)$. Эти формулы можно также получить из предельных выражений для (11) и (12) при $t \to \infty$. Тогда имеем:

$$\alpha_i^t = Q^* + q_i^* - Q^t - q_i^t, \quad i \in N_c, \tag{13}$$

$$\alpha_i^t = Q^* + \frac{1}{n} q_i^* - Q^t - \frac{1}{n} q_i^t, \quad i \in N_s. \tag{14}$$

Лемма 1. Вектор действий агентов $q^t = (q_1^t, \ldots, q_i^t, \ldots, q_n^t)$ является статичным равновесием $q^* = (q_1^*, \ldots, q_i^*, \ldots, q_n^*)$ модели олигополии (5)–(7) *тогда и только тогда, когда $\alpha_i^t = 0 \ \forall i \in N$.*

Доказательство леммы 1. Обозначим через n_c – число ведомых агентов на рынке, а через n_s – число агентов-лидеров, $n_c + n_s = n$. Используя формулы (13) и (14), суммированием α_i^t по индексу $i \in N_c$ и $n\alpha_i^t$ по индексу $i \in N_s$, получаем $\sum_{i \in N_C} \alpha_i^t + n \sum_{i \in N_S} \alpha_i^t = \left(n_c + nn_s + 1\right)(Q^* - Q^t)$. Пусть $\exists t$, что $\alpha_i^t = 0 \ \forall i \in N$. Тогда $Q^* = Q^t$ и по (13) и (14) имеем $q_i^t = q_i^* \ (i \in N)$. Решением однородной системы уравнений (13)–(14), когда $\alpha_i^t = 0$, является равновесный выпуск.

Если $q_i^t = q_i^* \ \forall i \in N$, то опять по (13) и (14) получаем, что $\alpha_i^t = 0 \ \forall i \in N$.

Лемма 1 доказана.

Лемма показывает, что функции-индикаторы α_i^t можно рассматривать в качестве оценки «удаленности» агентов от положения равновесия.

Введем более удобную для последующих преобразований замену параметров:

$$\lambda_i^{t+1} = \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}, i \in N_c; \lambda_i^{t+1} = \frac{\gamma_i^{t+1} n}{1+n}, i \in N_s. \tag{15}$$

С учетом введенных обозначений (13)–(15) перепишем (1) для процесса 1 в виде:

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \lambda_i^{t+1}\alpha_i^t, \quad i \in N_c, \quad \lambda_i^{t+1} \in \left(0; \frac{1}{2}\right]; \tag{16}$$

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \lambda_i^{t+1}\alpha_i^t, \quad i \in N_s, \quad \lambda_i^{t+1} \in \left(0; \frac{n}{1+n}\right]. \tag{17}$$

Далее потребуются следующие соотношения для процесса 1:

$$\alpha_i^{t+1} = \left(1 - \lambda_i^{t+1}\right)\alpha_i^t - \sum_{j \in N} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t, \quad i \in N_c, \tag{18}$$

$$\alpha_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\lambda_i^{t+1}}{n}\right)\alpha_i^t - \sum_{j \in N} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t, \quad i \in N_s. \tag{19}$$

Приведем вывод (19) для агентов с реакцией по Штакельбергу, для агентов с реакцией по Курно эта формула выводится аналогично. Используя формулу (14) для α_i^{t+1} и α_i^t, а также (17), имеем $\alpha_i^{t+1} - \alpha_i^t = -\frac{1}{n}\left(q_i^{t+1} - q_i^t\right) - Q^{t+1} + Q^t = -\frac{1}{n}\lambda_i^{t+1}\alpha_i^t - Q^{t+1} + Q^t = \left(1 - \frac{\lambda_i^{t+1}}{n}\right)\alpha_i^t - -Q^{t+1} + Q^t$. Суммированием (16), (17) по индексу i получаем $Q^{t+1} = Q^t + \sum_{j \in N} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t$ и, окончательно, (19).

Приведем аналогичные формулы для процесса 4.

Введем новые обозначения: $N_1^t = \left\{ i \,\middle|\, x_i^t > 0, i \in N \right\}$, $N_2^t = \left\{ i \,\middle|\, x_i^t \le 0, i \in N \right\}$. Тогда $N_1^t \bigcap N_2^t = \otimes$ и $N_1^t \bigcup N_2^t = N$.

С учетом этих и ранее введенных обозначений (13)–(15), а также (11), (12) запишем (4) как:

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^{t+1} = q_i^t + \lambda_i^{t+1}\alpha_i^t, & i \in N_c \bigcap N_1^t, \quad \lambda_i^{t+1} \in \left(0; \frac{1}{2}\right]; \\ 0, & i \in N_c \bigcap N_2^t, \end{cases} \tag{20}$$

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \lambda_i^{t+1}\alpha_i^t, & i \in N_s \cap N_1^t, \quad \lambda_i^{t+1} \in \left(0; \dfrac{n}{1+n}\right]; \\ 0, & i \in N_s \cap N_2^t. \end{cases} \tag{21}$$

Из формул (13), (14) и (20), (21) имеем:

$$Q^* + q_i^* - Q^{t+1} - q_i^{t+1} = Q^* + q_i^* - Q^t - q_i^t - \lambda_i^{t+1}\alpha_i^t - Q^{t+1} + Q^t, \quad i \in N_c \cap N_1^t;$$

$$Q^* + \frac{1}{n}q_i^* - Q^{t+1} - \frac{1}{n}q_i^{t+1} = Q^* + \frac{1}{n}q_i^* - Q^t - \frac{1}{n}q_i^t - \frac{1}{n}\lambda_i^{t+1}\alpha_i^t - Q^{t+1} + Q^t, i \in N_s \cap N_1^t.$$

Тогда для процесса 4 с учетом того, что по (20), (21) $Q^{t+1} = Q^t +$ $+\sum_{j\in N_1^t} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t - \sum_{j\in N_2^t} q_j^t$, имеем:

$$\alpha_i^{t+1} = \left(1 - \lambda_i^{t+1}\right)\alpha_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t, \; i \in N_c \cap N_1^t; \tag{22}$$

$$\alpha_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\lambda_i^{t+1}}{n}\right)\alpha_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t, \quad i \in N_s \cap N_1^t. \tag{23}$$

Также по формулам (13), (14) и (20), (21) получаем:

$$Q^* + q_i^* - Q^{t+1} - q_i^{t+1} = Q^* + q_i^* - Q^t - q_i^t + q_i^t - Q^{t+1} + Q^t, \quad i \in N_c \cap N_2^t;$$

$$Q^* + \frac{1}{n}q_i^* - Q^{t+1} - \frac{1}{n}q_i^{t+1} = Q^* + \frac{1}{n}q_i^* - Q^t - \frac{1}{n}q_i^t + \frac{1}{n}q_i^t - Q^{t+1} + Q^t, i \in N_s \cap N_2^t.$$

Тогда для процесса 4 имеем:

$$\alpha_i^{t+1} = \alpha_i^t + q_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t, \quad i \in N_c \cap N_2^t; \tag{24}$$

$$\alpha_i^{t+1} = \alpha_i^t + \frac{1}{n}q_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t, \quad i \in N_s \cap N_2^t. \tag{25}$$

Лемма 2. Если в последовательности $\left\{\alpha_i^t, i \in N\right\}$ *есть не только положительные члены, то для процессов* 1 *и* 4 *имеет место неравенство* $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1}-\alpha_j^{t+1}\right\} \le \eta^t \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t-\alpha_j^t\right\}$. *Здесь* $\eta^t \in (0;1)$.

Доказательство леммы 2 можно найти в [25, 29].

Лемма 3. Пусть для процесса 1 $\max\limits_{i\in N}\sum\limits_{j\ne i}\lambda_j^{t+1} < 1$ *и* $\forall i \in N\ \alpha_i^t \ge 0$ *или* $\forall i \in N\ \alpha_i^t \le 0$. *Тогда* $\exists \mu^t \in (0;1)$, *что* $\mu^t \max\limits_{i\in N}\left|\alpha_i^t\right| \ge \max\limits_{i\in N}\left|\alpha_i^{t+1}\right|$.

Доказательство леммы 3.

Пусть вначале $\alpha_i^t \ge 0\ (\forall i \in N)$ и не все члены равны нулю. Когда в $\left\{\alpha_i^t, i \in N\right\}$ только нулевые члены, по лемме 1 процесс находится в состоянии равновесия. Если для некоторого i-го агента $\alpha_i^{t+1} \ge 0$, то по (18), (19) имеем, что $\left(1-\lambda_i^{t+1}\right)\alpha_i^t > \alpha_i^{t+1}\ (i \in N_c)$ и $\left(1-\dfrac{\lambda_i^{t+1}}{n}\right)\alpha_i^t > \alpha_i^{t+1}$ $(i \in N_s)$. Если $\alpha_i^{t+1} \le 0$, то $\sum\limits_{j\in N, j\ne i}\lambda_j^{t+1}\cdot\max\limits_{j\in N, j\ne i}\alpha_j^t > -\alpha_i^{t+1}\ (i \in N)$.

Пусть $\alpha_i^t \le 0\ (\forall i \in N)$. Если для некоторого i-го агента $\alpha_i^{t+1} \ge 0$, то по (18), (19) $\sum\limits_{j\in N, j\ne i}\lambda_j^{t+1}\cdot\max\limits_{j\in N, j\ne i}\left(-\alpha_j^t\right) > \alpha_i^{t+1}$. Если $\alpha_i^{t+1} \le 0$, то $\left(1-\lambda_i^{t+1}\right)\left(-\alpha_i^t\right) > -\alpha_i^{t+1}\ (i \in N_c)$ и $\left(1-\dfrac{\lambda_i^{t+1}}{n}\right)\left(-\alpha_i^t\right) > -\alpha_i^{t+1}\ (i \in N_s)$.

Полученные неравенства могут быть записаны в требуемом виде $\mu^t \max\limits_{i\in N}\left|\alpha_i^t\right| \ge \max\limits_{i\in N}\left|\alpha_i^{t+1}\right|$, где $\mu^t \in (0;1)$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть для процесса 4 $\forall i \in N\ \alpha_i^t \ge 0$ *и* $\max\limits_{i\in N_1^t}\sum\limits_{j\in N_1^t, j\ne i}\lambda_j^{t+1} < 1$, *или* $\forall i \in N\ \alpha_i^t, \alpha_i^{t+1} \le 0$. *Тогда* $\exists \mu^t \in (0;1)$, *что* $\mu^t \max\limits_{i\in N}\left|\alpha_i^t\right| \ge \max\limits_{i\in N}\left|\alpha_i^{t+1}\right|$.

Доказательство леммы 4.

Пусть вначале $\alpha_i^t \geq 0 \left(\forall i \in N\right)$. Если для некоторого i-го агента $\alpha_i^t > 0,$ то $i \in N_1^t$. Если $\alpha_i^t = 0,$ то при $i \in N_1^t$ будет $q_i^t > 0,$ а при $i \in N_2^t$ будет $x_i\left(q_{-i}^t\right) = 0$ и $q_i^t = 0.$

Тогда, если для некоторого i-го агента $\alpha_i^{t+1} \geq 0,$ то по (22), (23) можем записать $\left(1 - \lambda_i^{t+1}\right)\alpha_i^t > \alpha_i^{t+1} \left(i \in N_c\right)$ и $\left(1 - \dfrac{\lambda_i^{t+1}}{n}\right)\alpha_i^t > \alpha_i^{t+1}$ $\left(i \in N_s\right)$. А по (24), (25) следует, что $\alpha_i^{t+1} < 0\left(i \in N_2^t\right)$.

Пусть $\alpha_i^t \geq 0 \left(\forall i \in N\right)$ и для некоторого i-го агента $\alpha_i^{t+1} \leq 0.$ Тогда по (22)–(25) имеем $\sum\limits_{j \in N_1^t,\, j \neq i} \lambda_j^{t+1} \cdot \max\limits_{j \in N_1^t,\, j \neq i} \alpha_j^t > -\alpha_i^{t+1}.$

Пусть теперь $\alpha_i^t \leq 0 \left(\forall i \in N\right)$ и для некоторого i-го агента $\alpha_i^{t+1} \leq 0.$ По (22), (23) получаем, что $\left(1 - \lambda_i^{t+1}\right)\left(-\alpha_i^t\right) > -\alpha_i^{t+1}$ $\left(i \in N_c \bigcap N_1^t\right)$ и $\left(1 - \dfrac{\lambda_i^{t+1}}{n}\right)\left(-\alpha_i^t\right) > -\alpha_i^{t+1} \left(i \in N_s \bigcap N_1^t\right),$ а по (24), (25) $-\alpha_i^t - q_i^t > -\alpha_i^{t+1} \left(i \in N_c \bigcap N_2^t\right),$ $-\alpha_i^t - \dfrac{q_i^t}{n} > -\alpha_i^{t+1} \left(i \in N_s \bigcap N_2^t\right).$

Во всех рассмотренных ситуациях полученные неравенства также могут быть записаны в обобщенном виде $\mu^t \max\limits_{i \in N}\left|\alpha_i^t\right| \geq \max\limits_{i \in N}\left|\alpha_i^{t+1}\right|,$ где $\mu^t \in \left(0; 1\right).$

Лемма 4 доказана.

5. Результаты и их обсуждение на рефлексивной модели олигополии. Основным результатом данной статьи являются доказанные в этом разделе утверждения для олигополии с произвольным числом лидеров по Штакельбергу.

Утверждение 1. Пусть в олигополии (5)–(7) *с произвольным числом лидеров по Штакельбергу для процесса 1 в последовательности* $\left\{\alpha_i^t\right\}$ *есть члены с разными знаками. Тогда в последовательности* $\left\{\alpha_i^{t+1}\right\}$ *также будут члены с разными знаками, если:*

$$\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n_+^t}\right] \left(i \in N_c \cap N_+^t\right), \gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n_-^t}\right] \left(i \in N_c \cap N_-^t\right), \quad (26)$$

$$\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{1+n}{1+nn_+^t}\right] \left(i \in N_s \cap N_+^t\right), \gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{1+n}{1+nn_-^t}\right] \left(i \in N_s \cap N_-^t\right). \quad (27)$$

Здесь N_c *– множество агентов с реакцией по Курно,* N_s *– множество агентов с реакцией по Штакельбергу,* $N_+^t \left(N_-^t\right)$ *– множество положительных (отрицательных) членов в последовательности* $\left\{\alpha_i^t\right\}$, $n_+^t \left(n_-^t\right)$ *– число положительных (отрицательных) членов в последовательности* $\left\{\alpha_i^t\right\}$.

Доказательство утверждения 1. Из (18) и (19) для процесса 1 имеем $\sum_{j\in N_+^t} \alpha_j^{t+1} = \sum_{j\in N_+^t \cap N_C} \left(1-\lambda_j^{t+1}\right)\alpha_j^t + \sum_{j\in N_+^t \cap N_S} \left(1-\frac{\lambda_j^{t+1}}{n}\right)\alpha_j^t - n_+^t \sum_{j\in N} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t = \sum_{j\in N_+^t \cap N_C} \left(1-\lambda_j^{t+1}\left(1+n_+^t\right)\right)\alpha_j^t + \sum_{j\in N_+^t \cap N_S} \left(1-\lambda_j^{t+1}\left(\frac{1}{n}+n_+^t\right)\right)\alpha_j^t - n_+^t \sum_{j\in N_-^t} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t$. Поэтому, если $1-\lambda_j^{t+1}\left(1+n_+^t\right) \ge 0 \left(j \in N_+^t \cap N_c\right)$, $1-\lambda_j^{t+1}\frac{1+nn_+^t}{n} \ge 0 \left(j \in N_+^t \cap N_s\right)$ и в $\left\{\alpha_i^t\right\}$ есть хотя бы один отрицательный член, то $\sum_{j\in N_+^t} \alpha_j^{t+1} > 0$ и среди $\alpha_j^{t+1} \left(j \in N_+^t\right)$ всегда будет хотя бы один положительный член, т. е. его знак сохранится. Также $\sum_{j\in N_-^t} \alpha_j^{t+1} = \sum_{j\in N_-^t \cap N_C} \left(1-\lambda_j^{t+1}\right)\alpha_j^t + \sum_{j\in N_-^t \cap N_S} \left(1-\frac{\lambda_j^{t+1}}{n}\right)\alpha_j^t - n_-^t \sum_{j\in N} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t =$

$$= \sum_{j\in N_-^t \cap N_C} \left(1-\lambda_j^{t+1}\left(1+n_-^t\right)\right)\alpha_j^t + \sum_{j\in N_-^t \cap N_S} \left(1-\lambda_j^{t+1}\left(\frac{1}{n}+n_-^t\right)\right)\alpha_j^t - n_-^t \sum_{j\in N_+^t} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t.$$

Если $1-\lambda_j^{t+1}\left(1+n_-^t\right)\geq 0\left(j\in N_-^t\bigcap N_c\right)$, $1-\lambda_j^{t+1}\dfrac{1+nn_-^t}{n}\geq 0$ $\left(j\in N_-^t\bigcap N_s\right)$ и в $\left\{\alpha_i^t\right\}$ есть хотя бы один положительный член, то $\sum\limits_{j\in N_-^t}\alpha_j^{t+1}<0$ и среди $\alpha_j^{t+1}\left(j\in N_-^t\right)$ всегда будет отрицательный член.

Используя замену переменных λ на γ по формуле (15), приходим к условиям (26) и (27) утверждения 1.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. В олигополии (5)–(7) *с произвольным числом лидеров по Штакельбергу процесс 1 сходится к равновесию при любых начальных выпусках агентов* $\left\{q_i^0, i\in N=\{1,\ldots,n\}, n\geq 2\right\}$, *если, начиная с некоторого момента времени* t_0, *при* $t>t_0$, *выполнены условия* (26) *и* (27).

Доказательство утверждения 2. Пусть в текущий t-й момент времени в $\left\{\alpha_i^t\right\}$ есть члены с разными знаками и

$$\lambda_i^{t+k}\in\left(0;\frac{1}{1+n_+^{t+k-1}}\right]\left(i\in N_c\bigcap N_+^{t+k-1}\right),\ \lambda_i^{t+k}\in\left(0;\frac{1}{1+n_-^{t+k-1}}\right]\left(i\in N_c\bigcap N_-^{t+k-1}\right),$$

$$\lambda_i^{t+k}\in\left(0;\frac{n}{1+nn_+^{t+k-1}}\right]\left(i\in N_s\bigcap N_+^{t+k-1}\right),\ \lambda_i^{t+k}\in\left(0;\frac{n}{1+nn_-^{t+k-1}}\right]\left(i\in N_s\bigcap N_-^{t+k-1}\right)$$

при $k=1,2,\ldots$. Тогда в $\left\{\alpha_i^{t+k}\right\}$ также будут члены с разными знаками. По лемме 2 будет $0\leq\ldots\leq\eta^{t+k}\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+k}-\alpha_j^{t+k}\right\}\leq$ $\leq\eta^{t+k}\eta^{t+k-1}\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+k-1}-\alpha_j^{t+k-1}\right\}\leq\ldots\leq\eta^{t+k}\eta^{t+k-1}\ldots\eta^{t+1}\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1}-\alpha_j^{t+1}\right\}\leq$ $\leq\eta^{t+k}\eta^{t+k-1}\ldots\eta^{t+1}\eta^t\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t-\alpha_j^t\right\}$. Таким образом, если $\eta^t\in(0;1)$ и η^t не стремится к нулю, то $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t-\alpha_j^t\right\}\to 0$ при $t\to\infty$. Поскольку знаки минимального и максимального членов в $\left\{\alpha_i^t\right\}$ не совпадают, то $\forall i\in N$ $\alpha_i^t\to 0$ при $t\to\infty$. По лемме 1 процесс будет сходиться к равновесному выпуску q^*.

Пусть $\alpha_i^t \geq 0 \; \forall i \in N$ или $\alpha_i^t \leq 0 \; \forall i \in N$ и есть отличные от нуля члены (по лемме 1 равенство всех членов последовательности нулю означает равновесие). Если в $\{\alpha_i^{t+1}\}$ будут члены с разными знаками, то, как выше показано, в условиях утверждения 1 такой процесс сходится. Если в $\{\alpha_i^{t+1}\}$ будут только неотрицательные или только неположительные члены, то по лемме 3 $\exists \mu^t \in (0;1)$, что $\mu^t \max\limits_{i \in N} \left|\alpha_i^t\right| \geq \max\limits_{i \in N} \left|\alpha_i^{t+1}\right|$. Если такая ситуация будет повторяться, т. е. при $k = 0, 1, 2, \ldots \; \alpha_i^{t+k} \geq 0 \; \forall i \in N$ или $\alpha_i^{t+k} \leq 0 \; \forall i \in N$, то при $\max\limits_{i \in N} \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j^{t+k+1} < 1$ получим $0 \leq \ldots \leq \mu_i^{t+k} \max\limits_{i \in N} \left|\alpha_i^{t+k}\right| \leq \mu_i^{t+k} \mu_i^{t+k-1} \max\limits_{i \in N} \left|\alpha_i^{t+k-1}\right| \leq \ldots \leq \mu_i^{t+k} \mu_i^{t+k-1} \ldots \mu_i^{t+1} \max\limits_{i \in N} \left|\alpha_i^{t+1}\right| \leq \mu_i^{t+k} \mu_i^{t+k-1} \ldots \mu_i^{t+1} \mu_i^t \max\limits_{i \in N} \left|\alpha_i^t\right|$. В условиях утверждения 1 неравенства $\max\limits_{i \in N} \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j^{t+k+1} < 1$ будут выполнены. Из полученной цепочки неравенств следует, что α_i^{t+k} сходятся к нулю, поскольку $\mu_i^{t+k} \in (0;1) \; \forall i \in N, \forall k \geq 0$ и μ_i^{t+k} не стремятся к нулю. По лемме 1 процесс будет сходиться к равновесному выпуску q^*.

В доказательстве утверждения 2 фигурировал произвольный момент времени, при $t = 0$ имеем начальные условия процесса.

Таким образом, показана сходимость процесса 1 при любых начальных выпусках агентов $\{q_i^0, i \in N\}$, если выполнены условия (26), (27).

Утверждение 2 доказано.

Пример 2. Рассмотрим процесс 1 на рынке с 4 агентами $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Пусть $\{1, 3\} \in N_c, \{2, 4\} \in N_s$, и в текущий момент времени $\alpha_1^t > 0, \; \alpha_2^t > 0, \; \alpha_3^t < 0, \; \alpha_4^t < 0$. Уравнения такого процесса:

$$\alpha_1^{t+1} = \left(1 - 2\lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t - \lambda_2^{t+1}\alpha_2^t - \lambda_3^{t+1}\alpha_3^t - \lambda_4^{t+1}\alpha_4^t,$$

$$\alpha_2^{t+1} = \left(1 - \frac{3}{2}\lambda_2^{t+1}\right)\alpha_2^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t - \lambda_3^{t+1}\alpha_3^t - \lambda_4^{t+1}\alpha_4^t,$$

$$\alpha_3^{t+1} = \left(1 - 2\lambda_3^{t+1}\right)\alpha_3^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t - \lambda_2^{t+1}\alpha_2^t - \lambda_4^{t+1}\alpha_4^t,$$

$$\alpha_4^{t+1} = \left(1 - \frac{3}{2}\lambda_4^{t+1}\right)\alpha_4^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t - \lambda_2^{t+1}\alpha_2^t - \lambda_3^{t+1}\alpha_3^t.$$

При $\lambda_1^{t+1}, \lambda_3^{t+1} \le \frac{1}{3}$ и $\lambda_2^{t+1}, \lambda_4^{t+1} \le \frac{2}{5}$ имеем:

$$\alpha_1^{t+1} + \alpha_2^{t+1} = \left(1 - 3\lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t + \left(1 - \frac{5}{2}\lambda_2^{t+1}\right)\alpha_2^t - 2\lambda_3^{t+1}\alpha_3^t - 2\lambda_4^{t+1}\alpha_4^t > 0,$$

$$\alpha_3^{t+1} + \alpha_4^{t+1} = \left(1 - 3\lambda_3^{t+1}\right)\alpha_3^t + \left(1 - \frac{5}{2}\lambda_4^{t+1}\right)\alpha_4^t - 2\lambda_1^{t+1}\alpha_1^t - 2\lambda_2^{t+1}\alpha_2^t < 0.$$

Таким образом, в последовательности $\left\{\alpha_i^{t+1}\right\}$ есть отрицательные и положительные члены.

В таблице 2 приведен фрагмент числового примера процесса 1 с четырьмя агентами, в которых два агента (второй и четвертый) являются лидерами по Штакельбергу.

В расчетах значения параметров λ полагаются равными верхним границам диапазонов сходимости процесса, которые приведены в утверждении 1. Перерасчет λ обусловлен изменением знаков членов в последовательностях $\left\{\alpha_i^t\right\}$. Так на пятой итерации знак α_3^5 изменился с «–» на «+», а на седьмой, наоборот, с «+»на «–», что вызвало перерасчет λ_i^6 и λ_i^8, соответственно. Также смена знаков некоторых функций-индикаторов произошла на девятнадцатой, двадцать первой, двадцать восьмой и двадцать девятой итерациях. О сходимости процесса указывает то, что $\max_{i,j \in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} \to 0$ при возрастании t.

Следствие 1.В дуополии (5)–(7) *процесс 1 сходится к положению равновесия при* $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; 1\right]$ $(i \in N, t = 0, 1, 2, \ldots)$ *и любых начальных условиях* $q^0 > 0$, *независимо от того, агент рефлексирует по Курно или по Штакельбергу.*

Доказательство. Если в текущий t-й момент времени у α_1^t и α_2^t разные знаки, то $n_+^t = n_-^t = 1$ и по (26)–(27) имеем, что

$\gamma_i^{t+1} \in (0;1]$. Если один член нулевой или α_1^t и α_2^t имеют одинаковые знаки, то, как было показано выше для произвольного числа агентов на рынке, сходимость процесса доказывается с применением лемм 3 и 1.

Таблица 2. Фрагмент сходящегося процесса 1 для четырех агентов

Итера-ции	Значения функций-индикаторов				Параметры шагов								$\max\{\alpha_i - \alpha_j\}$
t	α_1	α_2	α_3	α_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	
0	30,00	20,00	-18,00	-50,00									80,00
1	28,00	24,00	-4,00	-32,00	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	60,00
2	13,87	14,40	-7,47	-30,40	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	44,27
3	13,51	15,79	-0,71	-20,05	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	33,56
4	6,45	10,07	-3,03	-18,60	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	25,05
5	6,57	10,33	0,25	-12,61	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	22,94
6	8,66	12,58	3,89	-4,68	0,25	0,29	0,33	0,67	0,50	0,36	0,67	0,83	17,26
7	2,56	6,85	-1,34	-7,06	0,25	0,29	0,33	0,67	0,50	0,36	0,67	0,83	13,90
8	1,38	5,16	-1,21	-5,97	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	11,12
9	1,19	4,39	-0,54	-4,50	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	8,90
10	0,62	3,34	-0,53	-3,77	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	7,12
11	0,56	2,82	-0,21	-2,88	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	5,69
12	0,28	2,16	-0,23	-2,39	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	4,56
13	0,26	1,81	-0,08	-1,84	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	3,64
14	0,13	1,40	-0,10	-1,52	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	2,92
15	0,13	1,16	-0,03	-1,17	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	2,33
16	0,06	0,90	-0,04	-0,97	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	1,87
17	0,06	0,74	-0,01	-0,75	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	1,49
18	0,03	0,58	-0,02	-0,61	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	1,19
19	0,03	0,48	0,00	-0,48	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	0,96
20	0,20	0,58	0,18	-0,14	0,25	0,29	0,33	0,67	0,50	0,36	0,67	0,83	0,73
21	-0,03	0,32	-0,06	-0,28	0,25	0,29	0,33	0,67	0,50	0,36	0,67	0,83	0,60
22	-0,03	0,26	-0,05	-0,24	0,25	0,33	0,25	0,29	0,50	0,42	0,50	0,36	0,50
23	-0,02	0,22	-0,04	-0,21	0,25	0,33	0,25	0,29	0,50	0,42	0,50	0,36	0,43
24	-0,02	0,18	-0,03	-0,18	0,25	0,33	0,25	0,29	0,50	0,42	0,50	0,36	0,36
25	-0,01	0,15	-0,02	-0,15	0,25	0,33	0,25	0,29	0,50	0,42	0,50	0,36	0,30
26	-0,01	0,13	-0,02	-0,13	0,25	0,33	0,25	0,29	0,50	0,42	0,50	0,36	0,26
27	-0,01	0,11	-0,01	-0,11	0,25	0,33	0,25	0,29	0,50	0,42	0,50	0,36	0,22
28	0,00	0,09	-0,01	-0,09	0,25	0,33	0,25	0,29	0,50	0,42	0,50	0,36	0,18
29	0,00	0,08	0,00	-0,07	0,33	0,40	0,33	0,40	0,67	0,50	0,67	0,50	0,15
30	0,03	0,09	0,02	-0,02	0,25	0,29	0,33	0,67	0,50	0,36	0,67	0,83	0,11

Очевидно следующее следствие.

Следствие 2.В дуополии (5)–(7) *процесс* 2 *сходится к положению равновесия при любых начальных условиях* $q^0 > 0,$ *независимо от того, агент рефлексирует по Курно или по Штакельбергу.*

Для процесса 4 в дуополии докажем следующее утверждение.

Утверждение 3. В дуополии (5)–(7) *процесс* 4 *сходится к положению равновесия при* $\gamma_i^{t+1} \in (0;1]$ *и любых начальных условиях* $q^0 > 0$, *независимо от того, агент рефлексирует по Курно или по Штакельбергу, за исключением случаев а) если* $q_1^t = 0,$ *то* $\gamma_2^{t+1} = 1,$ *б) если* $q_2^t = 0,$ *то* $\gamma_1^{t+1} = 1.$

Доказательство утверждения 3. Вначале покажем, что в дуополии для агентов с разными знаками, имеет место утверждение, аналогичное утверждению 1 для процесса 1.

Поскольку каждый агент может рефлексировать по Курно или по Штакельбергу, то вначале рассмотрим случай, когда оба агента рефлексируют по Курно, и в текущий t-й момент времени α_1^t и α_2^t имеют разные знаки. Покажем, если $\alpha_i^t > 0,$ то $\alpha_i^{t+1} > 0,$ и, если $\alpha_i^t < 0,$ то $\alpha_i^{t+1} < 0.$ Пусть, для определенности, $\alpha_1^t > 0, \alpha_2^t < 0.$ Так как $\alpha_1^t > 0,$ то из формулы $\alpha_i^t = 2\left(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t\right)$ имеем $x_1(q_{-1}^t) > 0,$ и поэтому $\{1\} \in N_1^t.$ В свою очередь, для второго агента есть две возможности $\{2\} \in N_1^t$ или $\{2\} \in N_2^t.$ Если $\{2\} \in N_1^t,$ то уравнения процесса 4 совпадают с соответствующими уравнениями процесса 1, которые были рассмотрены в примере 1, и $\alpha_1^{t+1} > 0, \alpha_2^{t+1} < 0.$

Если $\{2\} \in N_2^t,$ то поскольку $x_2(q_{-2}^t) \le 0$ и $0 < \lambda_1^{t+1} \le \dfrac{1}{2},$ используя соотношение $\alpha_2^t = 2\left(x_2(q_{-2}^t) - q_2^t\right),$ по формулам (22) и (24) имеем при $q_2^t \ne 0$ или $\lambda_1^{t+1} \ne \dfrac{1}{2}$.

$$\alpha_1^{t+1} = \left(1-\lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t + q_2^t = \left(1-2\lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t + q_2^t > 0,$$
$$\alpha_2^{t+1} = \alpha_2^t + q_2^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t + q_2^t = \alpha_2^t + 2x_2(q_{-2}^t) - \alpha_2^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t = 2x_2(q_{-2}^t) -$$
$$-\lambda_1^{t+1}\alpha_1^t < 0.$$

Таким образом, в дуополии Курно для процесса 4, если α_1^t и α_2^t имеют разные знаки, то такие же знаки будут у α_1^{t+1} и α_2^{t+1}. Если $0 < \lambda_i^{t+k} \le \frac{1}{2}\,(k = 1, 2, \ldots)$ и $q_2^{t+k-1} \ne 0,$ то знаки α_1^{t+k} и α_2^{t+k} будут разными и совпадать со знаками α_1^t и $\alpha_2^t,$ соответственно. По леммам 3 и 1 процесс сходятся.

Пусть $q_2^t = 0$ и $\lambda_1^{t+1} = \frac{1}{2}.$ По предположению $\alpha_2^t = 2\left(x_2(q_{-2}^t) - q_2^t\right) = 2x_2(q_{-2}^t) < 0.$ Поэтому по (4) $q_2^{t+1} = 0.$ Но $\alpha_2^{t+1} < 0,$ следовательно, $2\left(x_2(q_{-2}^{t+1}) - q_2^{t+1}\right) = 2x_2(q_{-2}^{t+1}) < 0$ и поэтому $q_2^{t+2} = 0.$ Поскольку в данной ситуации $\alpha_1^{t+1} = 0,$ то $2\left(x_1(q_{-1}^{t+1}) - q_1^{t+1}\right) = 0.$ По предположению $x_1(q_{-1}^t) > 0,$ поэтому $q_1^{t+1} > 0$ и $x_1(q_{-1}^{t+1}) > 0.$ Тогда $\alpha_1^{t+2} = \left(1-2\lambda_1^{t+2}\right)\alpha_1^{t+1} + q_2^{t+1} = \left(1-2\lambda_1^{t+2}\right)\alpha_1^{t+1} = 0$ и $\alpha_2^{t+2} = \alpha_2^{t+1} + 2q_2^{t+1} - \lambda_1^{t+2}\alpha_1^{t+1} = 2x_2(q_{-2}^{t+1}) - \lambda_1^{t+2}\alpha_1^{t+1} = 2x_2(q_{-2}^{t+1}) < 0.$ Таким образом, имея исходные предположения $\{1\} \in N_1^t,\ \{2\} \in N_2^t,$ $\alpha_1^t > 0,\ \alpha_2^t < 0,\ q_2^t = 0$ и $\lambda_1^{t+1} = \frac{1}{2},$ далее получаем $\alpha_1^{t+1} = 0, \alpha_1^{t+2} = 0$ и $q_2^{t+1} = 0, q_2^{t+2} = 0.$ Очевидно, если процесс будет продолжаться таким образом, то сходится не может.

Рассмотрим случай разнорефлексирующих агентов. Пусть, для определенности, первый агент рефлексируют по Курно, второй – по Штакельбергу и $\alpha_1^t > 0, \alpha_2^t < 0.$ Покажем, что $\alpha_1^{t+1} > 0$ и $\alpha_2^{t+1} < 0.$

Для $\{2\} \in N_1^t$ это следует из системы равенств (18)–(19).

Для $\{2\} \in N_2^t$ при $0 < \lambda_1^{t+1} \le \frac{1}{2}$, используя соотношение $\alpha_2^t = \frac{3}{2}\left(x_2(q_{-2}^t) - q_2^t\right)$, по формулам (22) и (25) имеем при $q_2^t \ne 0$ или $\lambda_1^{t+1} \ne \frac{1}{2}$.

$$\alpha_1^{t+1} = \left(1 - \lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t + q_2^t = \left(1 - 2\lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t + q_2^t > 0,$$
$$\alpha_2^{t+1} = \alpha_2^t + \frac{1}{2}q_2^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t + q_2^t = \frac{3}{2}x_2(q_{-2}^t) - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t < 0.$$

Таким образом, в такой дуополии для процесса 4, если α_1^t и α_2^t имеют разные знаки, то такие же знаки будут у α_1^{t+1} и α_2^{t+1}. Если $0 < \lambda_1^{t+k} \le \frac{1}{2}$, $0 < \lambda_2^{t+k} \le \frac{2}{3}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ (что означает $0 < \gamma_i^{t+k} \le 1$), то знаки α_1^{t+k} и α_2^{t+k} будут разными и совпадать со знаками α_1^t и α_2^t, соответственно. По леммам 2 и 1 процессы сходятся.

Аналогично показывается, что при $q_2^t = 0$ и $\lambda_1^{t+1} = \frac{1}{2}$ процесс не сходится.

Пусть оба агента рефлексируют по Штакельбергу и $\alpha_1^t > 0, \alpha_2^t < 0$. Покажем, что $\alpha_1^{t+1} > 0$ и $\alpha_2^{t+1} < 0$.

Для $\{2\} \in N_1^t$ это следует из системы двух равенств вида (19).

Для $\{2\} \in N_2^t$ при $0 < \lambda_1^{t+1} \le \frac{2}{3}$ по формуле (25) имеем при $q_2^t \ne 0$ или $\lambda_1^{t+1} \ne \frac{2}{3}$:

$$\alpha_1^{t+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t + q_2^t = \left(1 - \frac{3}{2}\lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t + q_2^t > 0,$$
$$\alpha_2^{t+1} = \alpha_2^t + \frac{1}{2}q_2^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t + q_2^t = \frac{3}{2}x_2(q_{-2}^t) - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t < 0.$$

Поэтому для процесса 4, если α_1^t и α_2^t имеют разные знаки, то такие же знаки будут у α_1^{t+1} и α_2^{t+1}. Если $0 < \lambda_i^{t+k} \le \frac{2}{3}$, что означает $0 < \gamma_i^{t+k} \le 1\,(k = 1, 2, \ldots)$, то знаки α_1^{t+k} и α_2^{t+k} будут разными и совпадать со знаками α_1^t и α_2^t, соответственно. По леммам 2 и 1 процесс сходится.

Аналогично показывается, что при $q_2^t = 0$ и $\lambda_1^{t+1} = \frac{2}{3}$ процесс не сходится.

Итак, мы рассмотрели случаи, когда в текущий t-й момент времени у α_1^t и α_2^t разные знаки. Если в дуополии $\alpha_1^t \ge 0, \alpha_2^t \ge 0$, или $\alpha_1^t, \alpha_2^t \le 0$, $\alpha_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \le 0$, то сходимость процесса 4 показывается с применением лемм 4 и 1. Поэтому остается рассмотреть случай $\alpha_1^t, \alpha_2^t \le 0$, $\alpha_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \ge 0$.

Пусть для данного случая один агент действует по Штакельбергу (для определенности первый), другой – по Курно. Другие возможности, когда оба агента ведущие или оба ведомые рассматриваются аналогично.

Пусть $\alpha_1^t, \alpha_2^t \le 0$, $\alpha_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \ge 0$.

Допустим $\{1, 2\} \in N_1^t$. По (22), (23) имеем:

$$\alpha_1^{t+1} = \left(1 - \frac{3}{2}\lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t - \lambda_2^{t+1}\alpha_2^t,$$
$$\alpha_2^{t+1} = \left(1 - 2\lambda_2^{t+1}\right)\alpha_2^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t.$$

Отсюда следует, что $\lambda_2^{t+1}\left(-\alpha_2^t\right) \ge \alpha_1^{t+1}$ и $\lambda_1^{t+1}\left(-\alpha_1^t\right) \ge \alpha_2^{t+1}$. Поэтому $\max\left\{\lambda_1^{t+1}, \lambda_2^{t+1}\right\} \max\limits_{i \in \{1,2\}} \left|\alpha_i^t\right| \ge \max\limits_{i \in \{1,2\}} \left|\alpha_i^{t+1}\right|$.

Пусть теперь $\{1, 2\} \in N_2^t$. По (24), (25) имеем:

$$\alpha_1^{t+1} = \alpha_1^t + \frac{3}{2}q_1^t + q_2^t,$$

$$\alpha_2^{t+1} = \alpha_2^t + 2q_2^t + q_1^t.$$

Так как $\{1,2\} \in N_2^t$, то $\alpha_1^t + \frac{3}{2}q_1^t \le 0$ или $q_1^t \le -\frac{2}{3}\alpha_1^t$ и $\alpha_2^t + 2q_2^t \le 0$ или $q_2^t \le -\frac{1}{2}\alpha_2^t$. Поэтому $-\frac{1}{2}\alpha_2^t \ge \alpha_1^{t+1}, -\frac{2}{3}\alpha_1^t \ge \alpha_2^{t+1}$ и $\frac{2}{3}\max_{i\in\{1,2\}}\left|\alpha_i^t\right| \ge \max_{i\in\{1,2\}}\left|\alpha_i^{t+1}\right|$.

Пусть теперь $\{1\} \in N_1^t, \{2\} \in N_2^t$. Случай $\{1\} \in N_2^t, \{2\} \in N_1^t$ рассматривается аналогично. По (23), (24) имеем:

$$\alpha_1^{t+1} = \left(1 - \frac{3}{2}\lambda_1^{t+1}\right)\alpha_1^t + q_2^t,$$

$$\alpha_2^{t+1} = \alpha_2^t + 2q_2^t - \lambda_1^{t+1}\alpha_1^t.$$

Так как $\alpha_2^t + 2q_2^t \le 0$, то $-\frac{1}{2}\alpha_2^t \ge \alpha_1^{t+1}$ и $-\lambda_1^{t+1}\alpha_1^t \ge \alpha_2^{t+1}$. Поэтому $\max\left\{\lambda_1^{t+1}, \frac{1}{2}\right\}\max_{i\in\{1,2\}}\left|\alpha_i^t\right| \ge \max_{i\in\{1,2\}}\left|\alpha_i^{t+1}\right|$.

Итак, для случая $\alpha_1^t, \alpha_2^t \le 0$, $\alpha_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \ge 0$ в дуополии также имеет место неравенство $\mu^t \max_{i\in N}\left|\alpha_i^t\right| \ge \max_{i\in N}\left|\alpha_i^{t+1}\right|$, где $\mu^t \in (0;1)$. Что указывает на сходимость процесса 4.

Утверждение 3 доказано.

Следствие 3. В дуополии (5)–(7) *процесс 3 сходится к положению равновесия при любых начальных условиях* $q^0 > 0$, *независимо от того агент рефлексирует по Курно или по Штакельбергу.*

Результат, представленный в утверждении 1, обобщает известные аналоги. Так в работах [24, 25, 29] частными его случаями являются достаточные условия сходимости вида $\gamma_i^t \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ для всех агентов в модели Курно, такие же условия для агентов с реакцией по Курно и $\gamma^t \in \left(0; \frac{1}{n}\right)$ для лидера в модели с одним лидером по Штакельбергу, условия $\gamma_i^t \in \left(0; \frac{1}{n}\right)$ для всех агентов в модели олигополии с одними лидерами. Для олигополии с произвольным числом лидеров аналогичные модельные исследования для сравнения нам не известны.

Результаты, сформулированные для дуополии в утверждении 2 и утверждении 3, полностью согласуются с известными аналогами и модельными экспериментами [2, 25, 29, 34–38]. Что может свидетельствовать о корректности применяемых методов и для олигополии при $n > 2$. Новыми здесь являются метод доказательства этих утверждений, а также выявленные особенности, когда в дуополии процесс 4 сходиться не может.

6. Заключение. В статье рассмотрена проблема достижения равновесия Нэша на рынке олигополии при отсутствии общего знания среди агентов с применением рефлексивных повторяющихся игр и моделей динамики коллективного поведения. Агенты, основываясь на наблюдении за текущими объемами выпуска конкурентов и размышлениях о наилучшем собственном действии с учетом наилучших откликов конкурентов, при повторении игры уточняют по модели коллективного поведения свои объемы выпуска, делая шаги в направлении текущего оптимального выпуска. Развитие динамики направляется выбором агентами величины шагов.

Научная новизна результатов проведенного исследования заключается в получении новых аналитических выражений для диапазонов величин текущих шагов агентов, при которых гарантируется сходимость моделей коллективного поведения к статичному равновесию Нэша. В нашем случае условия сходимости получены для олигополии с произвольным числом лидеров по Штакельбергу в классе линейных функций спроса и издержек агентов. Агенты при выборе величины шагов принимают во внимание текущие экономические ограничения по прибыльности и конкурентоспособности, поэтому длины шагов могут меняться во времени. Такая политика выбора шага позволяет каждому агенту максимизировать собственную прибыль на основе доступной ему информации, предполагая полное (совершенное) знание среди агентов. Также показано, что динамики сходятся при любых начальных объемах выпуска. Подробно обсуждается случай дуополии в сравнении с современными результатами. Приведены необходимые математические леммы, утверждения и их доказательства.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что в условиях неполной информированности и отсутствии общего знания при определенном диапазоне значений действий агентов можно реализовать равновесные объемы выпуска при любом числе лидеров за счет введения рефлексирующих агентов. С точки зрения теории принятия решений, введение рефлексирующих агентов расширяет множество векторов действий, которые могут выбрать агенты, осуществляющие совместную деятельность, и позволяет существенным образом изменять состояние рынка. Полученные результаты могут иметь прикладное значение для понимания рефлексивного группового поведения агентов на современных конкурентных рынках.

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется ослабление условий (26), (27) на индивидуальный выбор каждого агента и выработка единого для всей совокупности агентов условия на коллективный (групповой) выбор. Также актуален и перспективен поиск аналитических решений для нелинейных моделей рынка и известных типовых рефлексивных моделей принятия коллективных решений с лидерами на разных уровнях. Представляют несомненный интерес модели, которые бы хорошо интерпретировали содержательный смысл и психологию выбора агентом того или иного шага движения к своей текущей цели.

Литература

1. Shapiro C. Theories Oligopoly Behavior / Handbook of Industrial Organization // Elsevier. 1989. vol. 1. chapter 6. pp. 329–414.
2. Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем // М.: Наука. 1998. 528 с.
3. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models // Leiden: CRC Press. 2014. 298 p.
4. Новиков Д.А. Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами: М. ИПУ РАН. 2020. вып. 85. С.206–237.
5. Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I. Existence of the Nash-Optimal Strategies in the Meta-Game // Studies in Systems, Decision and Control. 2018. vol. 100. pp. 95–100.
6. Berger U., De Silva H., Fellner-Rohling G. Cognitive Hierarchies in the Minimizer Game // Journal of Economic Behavior and Organization. 2016. vol. 130. pp. 337–348.
7. Mallozzi L., Messalli R. Multi-Leader Multi-Follower Model with Aggregative Uncertainty // Games. 2017. vol. 8(3). pp. 1–14.
8. Cournot A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth // London: Hafner.1960. (Original 1838). 235 p.
9. Nash J. Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. no. 54. pp. 286–295.
10. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // Advances in Systems Science and Applications. 2014. no. 3. pp. 254–277.
11. The Handbook of Experimental Economics / Ed. by Kagel J. and Roth A. // Princeton: Princeton University Press. 1995. 744 p.

12. Wright J., Leyton-Brown K. Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games // Proceedings of Conference on Associations for the Advancement of Artificial Intelligence (AAAI-10). 2010. pp. 461–473.
13. Askar S., Simos T. Tripoly Stackelberg Game Model: One Leader VersusTwo Followers // Applied Mathematics and Computation. 2018. vol. 328. pp. 301–311.
14. Askar S. On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information // Applied Mathematics and Computation. 2021. vol. 393(3) // https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125823.
15. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium / Transl. into English byBasin D., Urch L. & Hill. R. // New York. Springer. 2011. (Original 1934). 134 p.
16. Sherali H.D. Multiple Leader Stackelberg Model and Analysis // Operations Research. 1984. vol. 32. issue 2. pp. 390–404.
17. Julien L.A. On Noncooperative Oligopoly Equilibrium in the Multiple Leader – Follower Game // European Journal of Operational Research. 2017. vol. 256. issue 2. pp. 650–662.
18. Solis C.U., Clempner J.B., Poznyak A.S. Modeling Multileader – Follower Noncooperative Stackelberg Games // Cybernetics and Systems. 2017. vol. 47. no. 8. pp. 650–673.
19. Geras'kin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach // Automation and Remote Control. 2020. vol. 81 no. 9. pp. 1659–1678.
20. Castiglioni M., Marchesi A., Gatti N. Committing to Correlated Strategies with Multiple Leaders // Artificial Intelligence. 2021. vol. 300 // https://doi.org/10.1016/j.artint.2021.103549.
21. Zewde A.B., Kassa S.M. Multilevel Multi-Leader Multiple-Follower Games with Nonseparable Objectives and Shared Constraints // Computational Management Science. 2021. vol. 18(4). pp. 455-475.
22. Zewde A.B., Kassa S.M. Hierarchical Multilevel Optimization with Multiple-Leaders Multiple-Followers Setting and Nonseparable Objectives // RAIRO –Operations Research. 2021. vol. 55(5). pp. 2915–2939.
23. Wu R., Van Gorder R.A. Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games // Applied Mathematics and Computation. 2018. vol. 320. pp. 240–250.
24. Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // Automation and Remote Control. 2017. vol. 78. no. 9. pp. 1619–1630.
25. Algazin G.I., Algazina D.G. Reflecxive Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 7. pp. 1258–1270.
26. Алгазина Д.Г., Алгазин Г.И. Модельные исследования сетевого взаимодействия на конкурентных рынках с нефиксированными ролями участников // Барнаул: Изд-во Алтайского ун-та. 2015. 146 с.
27. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения // М.: Наука. 1977. 248 с.
28. Yoo T.-H., Ko W., Rhee C.-H., Park J.-K. The Incentive Announcement Effect of Demand Response on Market Power Mitigation in the Electricity Market // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2017. vol. 76. pp. 545–554.
29. Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 2. pp. 345–359.
30. Alcantara-Jiménez G., Clempner J.B. Repeated Stackelberg Security Games: Learning with Incomplete State Information // Reliability Engineering and System Safety. 2020. vol. 195 // https://doi.org/10.1016/j.ress.2019.106695.

31. Wei L., Wang H., Wang J., Hou J. Dynamics and Stability Analysis of a Stackelberg Mixed Duopoly Game with Price Competition in Insurance Market // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2021. vol. 2021. pp. 1–18.
32. Fedyanin D.N. Monotonicity of Equilibriums in Cournot Competition with Mixed Interactions of Agents and Epistemic Models of Uncertain Market // Procedia Computer Science. 2021. vol. 186(3). pp. 411–417.
33. Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents // Automation and Remote Control. 2017. vol. 78. no. 11. pp. 2025–2038.
34. Askar S.S., Elettrebybc M.F. The Impact of Cost Uncertainty on Cournot Oligopoly Games // Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 312. pp. 169–176.
35. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Динамика рефлексивного коллективного поведения в модели олигополии с лидерами // Известия Алтайского государственного университета. 2018. № 1(99). С. 64–68.
36. Ueda M. Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Applied Mathematics and Computation. 2019. vol. 362 // https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.049.124535
37. Long J., Huang H. A Dynamic Stackelberg-Cournot Duopoly Model with Heterogeneous Strategies through One-Way Spillovers // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2020. vol. 2. pp. 1–11.
38. Elsadany A.A. Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization // Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 294. pp. 253–263.

Алгазин Геннадий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, ФГБОУ ВО "Алтайский государственный университет" (АлтГУ). Область научных интересов: математическое моделирование социально-экономических процессов, теория игр, исследование операций, математическая концепция системного компромисса, информационное управление. Число научных публикаций — 180. algaz46@yandex.ru; Ленина, 61, 656049, Барнаул, Россия; р.т.: 7(385)229-81-51.

Алгазина Дарья Геннадьевна — канд. техн. наук, доцент, кафедра цифровых технологий и бизнес-аналитики, ФГБОУ ВО "Алтайский государственный университет" (АлтГУ). Область научных интересов: моделирование конкурентных рынков, управление в организационных системах, цифровые технологии франчайзинга. Число научных публикаций — 40. darya.algazina@mail.ru; Ленина, 61, 656049, Барнаул, Россия; р.т.: +7(385)229-65-46.

DOI 10.15622/ia.21.2.5

G. ALGAZIN, D. ALGAZINA

MODELING THE DYNAMICS OF COLLECTIVE BEHAVIOR IN A REFLEXIVE GAME WITH AN ARBITRARY NUMBER OF LEADERS

Algazin G., Algazina D. **Modeling the Dynamics of Collective Behavior in a Reflexive Game with an Arbitrary Number of Leaders.**

Abstract. An oligopoly with an arbitrary number of Stackelberg leaders under incomplete, asymmetrical agents' awareness and inadequacy of their predictions of competitors' actions is considered. Models of individual decision-making processes by agents are studied. The reflexive games theory and collective behavior theory are the theoretical basis for construction and analytical study process models. They complement each other in that reflexive games allow using the collective behavior procedures and the results of agents' reflections, leading to a Nash equilibrium. The dynamic decision-making process considered repeated static games on a range of agents' feasible responses to the expected actions of the environment, considering current economic restrictions and competitiveness in each game. Each reflexive agent in each game calculates its current goal position and changes its state, taking steps towards the current position of the goal to obtain positive profit or minimize losses. Sufficient conditions for the convergence of processes in discrete time for the case of linear costs of agents and linear demand is the main result of this work. New analytical expressions for the agents' current steps' ranges guarantee the convergence of the collective behavior models to static Nash equilibrium is obtained. That allows each agent to maximize their profit, assuming common knowledge among the agents. The processes when the agent chooses their best response are also analyzed. The latter may not give converging trajectories. The case of the duopoly in comparison with modern results is discussed in detail. Necessary mathematical lemmas, statements, and their proofs are presented.

Keywords: reflexive games, oligopoly, Stackelberg leader, incomplete awareness, collective behavior, equilibrium, convergence conditions.

Algazin Gennady — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Department of theoretical cybernetics and applied mathematics, Altai State University. Research interests: mathematical modeling of socio-economic processes, game theory, operations research, the mathematical concept of systemic compromise, informational control. The number of publications — 180. algaz46@yandex.ru; 61, Lenin St., 656049, Barnaul, Russia; office phone: 7(385)229-81-51.

Algazina Daria — Ph.D., Associate professor, Department of digital technologies and business analytics, Altai State University. Research interests: modeling of competitive markets, organization control, digital technologies of franchising. The number of publications — 40. darya.algazina@mail.ru; 61, Lenin St., 656049, Barnaul, Russia; office phone: +7(385)229-65-46.

References

1. Shapiro C. Theories Oligopoly Behavior. Handbook of Industrial Organization. Elsevier. 1989. vol. 1. chapter 6. pp. 329–414.
2. Malishevski A.V. Kachestvennyye modeli v teorii slozhnykh sistem [Qualitative Models in the Theory of Complex Systems]. Moscow: Nauka, 1998. 528 p. (In Russ.).
3. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press. 2014. 298 p.

4. Novikov D.A. [Dynamics Models of Mental and Behavioral Components of Activity in Collective Decision-Making]. Upravleniye bol'shimi sistemami: Sb. nauch. tr. [Large-Scale Systems Control: Collected papers]. Moscow: Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 2020. no. 85. pp. 206–237. (In Russ.).
5. Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I. Existence of the Nash-Optimal Strategies in the Meta-Game. Studies in Systems, Decision and Control. 2018. vol. 100. pp. 95–100.
6. Berger U., De Silva H., Fellner-Rohling G. Cognitive Hierarchies in the Minimizer Game. Journal of Economic Behavior and Organization. 2016. vol. 130. pp. 337–348.
7. Mallozzi L., Messalli R. Multi-Leader Multi-Follower Model with Aggregative Uncertainty.Games. 2017. vol. 8(3). pp. 1–14.
8. Cournot A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner. 1960. (Original 1838). 235 p.
9. Nash J. Non-Cooperative Games. Annals of Mathematics. 1951. no. 54. pp. 286–295.
10. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey. Advances in Systems Science and Applications. 2014. no. 3. pp. 254–277.
11. The Handbook of Experimental Economics. Ed. by Kagel J. and Roth A. Princeton: Princeton University Press. 1995. 744 p.
12. Wright J., Leyton-Brown K. Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games. Proccedings of Conference on Associations for the Advancement of Artificial Intelligence (AAAI-10). 2010. pp. 461–473.
13. Askar S., Simos T. Tripoly Stackelberg Game Model: One Leader Versus Two Followers. Applied Mathematics and Computation. 2018. vol. 328. pp. 301–311.
14. Askar S. On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information. Applied Mathematics and Computation. 2021. vol. 393(3). 125823.
15. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium. Transl. into English by Basin D., Urch L. & Hill. R. New York. Springer. 2011. (Original 1934). 134 p.
16. Sherali H.D. Multiple Leader Stackelberg Model and Analysis. Operations Research. 1984. vol. 32. issue 2. pp. 390–404.
17. Julien L.A. On Noncooperative Oligopoly Equilibrium in the Multiple Leader – Follower Game. European Journal of Operational Research. 2017. vol. 256. issue 2. pp. 650–662.
18. Solis C.U., Clempner J.B., Poznyak A.S. Modeling Multi Leader – Follower Noncooperative Stackelberg Games. Cybernetics and Systems. 2017. vol. 47. no. 8. pp. 650–673.
19. Geras’kin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach. Automation and Remote Control. 2020. vol. 81 no. 9. pp. 1659–1678.
20. Castiglioni M., Marchesi A., Gatti N. Committing to Correlated Strategies with Multiple Leaders. Artificial Intelligence. 2021. vol. 300. 103549.
21. Zewde A.B., Kassa S.M. Multilevel Multi-Leader Multiple-Follower Games with Nonseparable Objectives and Shared Constraints. Computational Management Science. 2021. vol. 18(4). pp. 455-475.
22. Zewde A.B., Kassa S.M. Hierarchical Multilevel Optimization with Multiple-Leaders Multiple-Followers Setting and Nonseparable Objectives. RAIRO – Operations Research. 2021. vol. 55(5). pp. 2915–2939.
23. Wu R., Van Gorder R.A. Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games. Applied Mathematics and Computation. 2018. vol. 320. pp. 240–250.

24. Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information. Automation and Remote Control. 2017. vol. 78. no. 9. pp. 1619–1630.
25. Algazin G.I., Algazina D.G. Reflecxive Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader. Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 7. pp. 1258–1270.
26. Algazina D.G., Algazin G.I. Model'nyye issledovaniya setevogo vzaimodeystviya na konkurentnykh rynkakh s nefiksirovannymi rolyami uchastnikov [Model Studies of Network Interaction in Competitive Markets with Unfixed Roles of Participants]. Barnaul: Publishing House of Altay State University, 2015. 146 p. (In Russ.).
27. Opoitsev V.I. Ravnovesiye i ustoychivost' v modelyakh kollektivnogo povedeniya [Equilibrium and Stability in Models of Collective Behavior]. Moscow: Nauka, 1977. 248 p. (In Russ.).
28. Yoo T.-H., Ko W., Rhee C.-H., Park J.-K. The Incentive Announcement Effect of Demand Response on Market Power Mitigation in the Electricity Market. Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2017. vol. 76. pp. 545–554.
29. Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty. Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 2. pp. 345–359.
30. Alcantara-Jiménez G., Clempner J.B. Repeated Stackelberg Security Games: Learning with Incomplete State Information. Reliability Engineering and System Safety. 2020. vol. 195. 106695.
31. Wei L., Wang H., Wang J., Hou J. Dynamics and Stability Analysis of a Stackelberg Mixed Duopoly Game with Price Competition in Insurance Market. Discrete Dynamics in Nature and Society. 2021. vol. 2021. pp. 1–18.
32. Fedyanin D.N. Monotonicity of Equilibriums in Cournot Competition with Mixed Interactions of Agents and Epistemic Models of Uncertain Market. Procedia Computer Science. 2021. vol. 186(3). pp. 411–417.
33. Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents. Automation and Remote Control. 2017. vol. 78. no. 11. pp. 2025–2038.
34. Askar S.S., Elettrebybc M.F. The Impact of Cost Uncertainty on Cournot Oligopoly Games. Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 312. pp. 169–176.
35. Algazin G.I., Algazina D.G. [Dynamics of Reflexive Collective Behavior in the Oligopoly Model with Leaders]. Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta – Izvestiya of Altay State University. 2018. vol. 99. no. 1. pp. 64–68. (In Russ.).
36. Ueda M. Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality. Applied Mathematics and Computation. 2019. vol. 362. 124535.
37. Long J., Huang H. A Dynamic Stackelberg-Cournot Duopoly Model with Heterogeneous Strategies through One-Way Spillovers. Discrete Dynamics in Nature and Society. 2020. vol. 2. pp. 1–11.
38. Elsadany A.A. Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization. Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 294. pp. 253–263.