УДК 004.8

А.В. Сироткин

ПРОВЕРКА И ПОДДЕРЖАНИЕ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ АЛГОРИТМОВ

Сироткин А.В. **Проверка и поддержание непротиворечивости алгебраических байесовских сетей: вычислительная сложность алгоритмов.**

Аннотация. Рассматриваются вопросы проверки и поддержания непротиворечивости алгебраических байесовских сетей. Даются формальные описания алгоритмов, доказывается их корректность и приводятся оценки вычислительной сложности.

Ключевые слова: алгоритм, алгебраическая байесовская сеть, непротиворечивость, вероятностная логика, база фрагментов знаний.

Sirotkin A.V. **Algebraic bayesian networks reconciliation: computational complexity.**

Abstract. The paper describes an algorithms lgebraic bayesian networks reconciliation. We prove correctnes of this algorithms and provide computational comlexeti estimates.

Keywords: algorithm, algebraic Bayesian network, consistency, probabilistic logic, knowledge patterns base.

---

1. Введение. Алгебраические байесовские сети — одна из парадигм представления знаний с неопределенностью. Предложенная в [1], она получила существенное развитие в [7–9,11,13,15–17,21–24]. В основе АБС лежит использование вероятностной логики [32] и моделей сложных систем основанных на графах. Но в отличие от байесовских сетей доверия [31,35,36], АБС предоставляют возможность работать не только с точечными оценками вероятностей, но и с интервальными. Более того, байесовские сети могут моделироваться алгебраическими байесовскими сетями [6,12]. Однако, большая выразительная сила алгебраических байесовских сетей приводит к тому, что произвольная заданная сеть может оказаться противоречивой. В данной статье мы опишем алгоритмы проверки непротиворечивости, а так же алгоритмы поддержания непротиворечивости АБС. Под поддержанием непротиворечивости подразумевается поиск максимальной непротиворечивой сети такой же структуры как исходная, чьи оценки вкладываются в оценки исходной. Целью данной работы является анализ сложности алгоритмов поддержания непротиворечивости в АБС. Во втором и третьем разделе мы дадим описание необходимого нам математического аппарата. Более подробно, с этими материалами можно ознакомиться в монографиях [21] и [24]. Далее, мы опишем структуры данных для представления ФЗ в программах и проведем фомализацию локального алгоритма поддержания непротиворечивости, опираясь на описанную структуру данных. Затем мы перейдем от локального уровня к глобальному, то есть, от рассмотрения отдельного ФЗ мы перейдем к рассмотрению совокупности ФЗ.

2. Базовые объекты и перенумерация. Отметим, что в статье используется и кратко излагается матрично-векторный подход к представлению объектов и описанию операций из теории алгебраических байесовских сетей [10, 15–17, 19–21, 23, 24]. Кроме того, активно используется представление АБС в виде графов смежности [14, 15, 18].

В первую очередь зафиксируем конечное множество атомарных пропозициональных формул (атомов) — алфавит $A = \{x_i\}_{i=0}^{n-1}$. Отметим, что для удобства мы будем вести нумерацию переменных с нуля. Определим над указанными атомами два набора «базовых» пропозициональных формул.

Определение 1. *Конъюнкт (цепочка конъюнкций) — это конъюнкция некоторого числа атомарных переменных вида*

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}.$$

Определение 2. *Идеал конъюнктов (идеал цепочек конъюнкций) — это множество вида*

$$\{x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_k} | 0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n-1,\ 0 \le k \le n\}.$$

Идеал конъюнктов над алфавитом A, *мы будем обозначать* C_A.

Замечание 1. *В дальнейшем, мы будем для удобства записи опускать знак конъюнкции, если это не создаёт неоднозначность. Соответственно, обобщённая форма конъюнкта из определения 1 при этом будет записываться как*

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

Каждому из конъюнктов вида $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ сопоставим число

$$2^{i_1}+2^{i_2}+\ldots+2^{i_k} -$$

индекс (*номер*) конъюнкта. Более того, если представить полученное число в двоичной записи, то переменная x_i будет входить в конъюнкт тогда и только тогда, когда i-тый бит номера будет равен единице (нумеровать биты предлагается начиная с младшего разряда, считая его нулевым битом).

Пример 1. Пример индексации конъюнктов.

Пусть задан алфавит $A = x_0, x_1, x_2, x_3$, тогда конюнктам будут сопоставляться следующие индексы:
$x_0 - 2^0 = 1 = 1_2$,
$x_3 - 2^3 = 8 = 1000_2$,
$x_3x_2x_0 - 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13 = 1101_2$ и так далее.

Замечание 2. *По сути, бинарное представление числа можно рассмотреть как вектор, состоящий из нулей и единиц. В этом случае индекс конъюнкта будет соответствовать характеристическому вектору. То есть, x_i входит в конъюнкт тогда и только тогда, когда в характеристическом векторе на i-той позиции находится единица.*

Определение 3. *Литерал (аргументное место) $\tilde{x}_i$ обозначает, что на его месте в формуле может стоять либо x_i, либо его отрицание $\bar{x}_i$.*

Определение 4. *Квант над алфавитом $A = \{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ — это конъюнкция, которая для любого атома алфавита содержит либо этот атом, либо его отрицание.*

Определение 5. *Множество квантов над алфавитом A —*

$$Q = \{\tilde{x}_0\tilde{x}_1\ldots\tilde{x}_{n-1}\}.$$

Для нумерации квантов мы воспользуемся способом, аналогичным нумерации конъюнктов. Выделим «положительную» часть кванта (множество положительно означенных переменных) и рассмотрим ее как конъюнкт. Номер этого конъюнкта и будет номером рассматриваемого кванта. Таким образом, единице в двоичной записи номера соответствует положительное вхождение переменной, а нулю — отрицательное, при этом рассматриваются все n бит (то есть с учётом лидирующих нулей).

П р и м е р 2. Пример индексации квантов.

Пусть задан алфавит $A = x_0, x_1, x_2, x_3$, тогда квантам будут сопоставляться следующие индексы:
$\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0 — 2^0 = 1 = 1_2$,
$x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 — 2^3 = 8 = 1000_2$,
$x_3x_2\bar{x}_1x_0 — 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13 = 1101_2$ и так далее.

После введения нумерации (индексации) квантов и конъюнктов можно определить векторы вероятностей квантов и конъюнктов:

$$\mathbf{P_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ p(c_1) \\ \vdots \\ p(c_{2^n-1}) \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{P_q} = \begin{pmatrix} p(q_0) \\ p(q_1) \\ \vdots \\ p(q_{2^n-1}) \end{pmatrix} \text{ соответственно,}$$

где c_i — конъюнкт номер i, а q_i — i-тый квант. Появление единицы в первом случае вполне оправдано, так как согласно определению c_0 — пустой конъюнкт, соответствующий тождественной истине. После введения перенумерации и определения базовых объектов (конъюнктов и квантов) перейдём к определению вероятности над пропозициональными формулами.

3. Оценки вероятностей над пропозициональными формулами. В основе способа введения вероятности над пропозициональными формулами, лежат работы профессора Н. Нильсона [32–34], существенно развитые Хальперном, Фейгином и Мегиддо [26–30].

Определение 6. *Пусть* $F_0(A)$ — *множество всех допустимых пропозициональных формул над заданным алфавитом* $A = \{x_i\}_{i=0}^{n-1}$. *Определим множество различающихся пропозициональных формул как фактор-множество всех формул по условию эквивалентности:*

$$F(A) = F_0(A)/\equiv .$$

Далее мы будем называть множество F *множеством пропозициональных формул.* Над n атомарными переменными подобных формул существует ровно 2^{2^n}.

Рассмотрим множество квантов Q. При любом зафиксированном означивании всех переменных x_0, x_1, ..., x_{n-1} никакие два разных кванта не могут быть одновременно истинны, а, с другой стороны, один из них заведомо истинен, следовательно можно рассмотреть множество Q как множество элементарных событий. По теореме о совершенной нормальной дизъюнктивной форме любая формула из $\mathsf{F}(A)$ может быть представлена в виде конъюнкции квантов, причём единственным, с точностью до перестановки, образом. Пусть $S(f)$ — это множество квантов, входящих в СДНФ представление формулы f, а на элементах множества элементарных событий Q задана вероятность p_0, тогда вероятность произвольной пропозициональной формулы может быть определена следующим образом:

$$p(f) = \sum_{q \in S(f)} p_0(q).$$

В частности $(\forall q \in Q) \quad p(q) = p_0(q)$, то есть если мы задали вероятность на элементах множества Q, то она автоматически распространяется на все множество F по формуле

$$p(f) = \sum_{q \in S(f)} p(q). \tag{1}$$

Определение вероятности на элементах множества Q потребует следующих ограничений:

$$(\forall q \in Q) \;\; p(q) \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\sum_{q \in Q} p(q) = 1. \tag{3}$$

Пользуясь введенными выше векторами, можно переписать эти условия следующим образом:

$$\mathbf{P_q} \geqslant \mathbf{0}; \tag{4}$$

$$(\mathbf{1}, \mathbf{P_q}) = 1. \tag{5}$$

Замечание 3. *В этих и последующих формулах полужирные символы* $\mathbf{0}$ *и* $\mathbf{1}$ *следует трактовать, как векторы подходящей размерности, состоящие из 0 и 1 соответственно. В большинстве случаев, как и в приведенном выше, размерность векторов* 2^n.

В алгебраических байесовских сетях мы, в основном, работаем не с квантами, а с конъюнктами. В монографии [21] показано, что через вероятности конъюнктов, как и через вероятности квантов можно выразить вероятность любой пропозициональной формулы. Переход между этими двумя «базисами» можно выразить следующей формулой:

$$\mathbf{P_q} = \mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c}. \tag{6}$$

При этом ограничения (2)–(3) принимают вид:

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c} \geqslant \mathbf{0}. \tag{7}$$

В формулах (6) и (7) n — число атомов, а матрица $\mathbf{I}_n$ — матрица перехода от вероятностей квантов к вероятностям конъюнктов. Заметим, что если вычислить вероятности квантов на основе вероятностей конъюнктов, удовлетворяющих условию (7), то условия (2) и (3) будут выполнены автоматически [21].

Определение 7. *Ограничения, накладываемые условием (7) на вектор* $\mathbf{P_c}$, *мы будем называть ограничениями, вытекающими из аксиоматики теории вероятностей, и обозначать* $\mathcal{E}$.

Матрица $\mathbf{I}_n$ имеет очень четкую структуру [16, 21], которую удобнее всего описать рекуррентно.

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_{n-1} = \mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_1^{[n-1]} = \mathbf{I}_1^{[n]};$$

например,

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\otimes$ означает кронекерово (тензорное) произведение матриц. Таким образом, $\mathbf{I}_n$ является кронекеровой степенью матрицы $\mathbf{I}_1$, то есть $\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_1^{[n]}$. Кроме рассмотренной матрицы $\mathbf{I}_n$, будет использоваться и обратная ей — $\mathbf{J}_n$, удовлетворяющая условию:

$$\mathbf{P_c} = \mathbf{J}_n \times \mathbf{P_q}. \tag{8}$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_n = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_{n-1} = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_1^{[n-1]} = \mathbf{J}_1^{[n]};$$

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 8. *Пусть задан фрагмент знаний со скалярными оценками $(C, \mathbf{P_c})$. Мы говорим, что он непротиворечив тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c} \geqslant \mathbf{0}.$$

Определение 9. *Пусть задан фрагмент знаний с интервальными оценками $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$. Мы говорим, что он непротиворечив тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \forall i : 1 \le i \le 2^n - 1 \ \forall \varepsilon : \mathbf{P_c^-}[i] \le \varepsilon \le \mathbf{P_c^+}[i] \quad \exists \mathbf{P_c} : \\ \left(\mathbf{P}^- \le \mathbf{P_c} \le \mathbf{P_c^+}\right) \& \left(\mathbf{P_c}[i] = \varepsilon\right) \& \left(\mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c} \geqslant \mathbf{0}\right). \end{gathered}$$

4. Формализация алгоритмов локального поддержания непротиворечивости и их сложность. Фрагмент знаний со скалярными оценками может быть представлен в виде пары $(C, \mathbf{P_c})$. Для програмной реализации вектор оценок удобно представить как массив, а в случае фрагмента знаний с интервальными оценками мы будем использовать два массива — для нижних и верхних оценок вероятности истинности соответственно. В схемах алгоритмов мы будем пользоваться обозначениями $\mathbf{P_c}$, $\mathbf{P_c^-}$ и $\mathbf{P_c^+}$ для соответствующих массивов. Выпишем формально алгоритм проверки непротиворечивости для ФЗ со скалярными оценками истинности.

Утверждение 1. *Алгоритм 1 заканчивает свою работу и сообщает, что ФЗ непротиворечив, если он непротиворечив, и сообщает, что противоречив в противном случае.*

Algorithm 1 Алгоритм проверки непротиворечивости ФЗ со скалярными оценками

Require: $\mathbf{P_c}, n$

$i = 0$
while $(i < 2^n - 1)$ **do**
  $Q[i] = (\mathbf{IP_c})[i]$
  if $(Q[i] < 0)$ **then**
    return "ФЗ противоречив"
  end if
  $i = i + 1$
end while
return "ФЗ непротиворечив"

Доказательство. Если фрагмент знаний непротиворечив, то согласно описанному в разделах 2 и 3 достаточно проверить, что $\mathbf{IP_c} \geq \mathbf{0}$. Алгоритм проверяет это неравенство построчно и при первом противоречии сообщает о нем. Таким образом, для непротиворечивого ФЗ все неравенства выполнятся и алгоритм сообщит, что ФЗ непротиворечив. А для противоречивого найдется шаг, на котором алгоритм сообщит о противоречивости. □

Утверждение 2. *Алгоритм 2 заканчивает свою работу. В результате работы алгоритма либо оценки уточняются до непротиворечивых, либо выдается сообщение о противоречивости исходного ФЗ.*

Доказательство. Алгоритм в процессе работы решит не более $2(2^n - 1)$ задач линейеного программирования, следовательно закончит свою работу. Если исходный ФЗ согласуем, то согласно [24] получаемый в результате работы алгоритма ФЗ — максимальный непротиворечивый. Если исходный ФЗ противоречив, то ограничения ЗЛП, используемые в алгоритме, задают пустое множество векторов $\mathbf{P_c}$, а следовательно ЗЛП не будут иметь решений, и алгоритм сообщит о противоречивости ФЗ. □

Для приведенных алгоритмов можно оценить вычислительную сложность. Для алгоритма 1 можно в явном виде выписать число необходимых арифметических операций. Алгоритм 2 использует

Algorithm 2 Алгоритм поддержания непротиворечивости ФЗ с интервальными оценками

Require: $\mathbf{P_c}^{0,-}, \mathbf{P_c}^{0,+}, n$

$i = 0$

$\mathcal{E} = \emptyset$

$\mathcal{D} = \emptyset$

for $i = 1$ to $2^n - 1$ **do**

  $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \{\mathbf{P_c}[i] \geq \mathbf{P_c}^{0,-}\ \mathbf{P_c}[i] \leq \mathbf{P_c}^{0,+}\}$

end for

for $i = 0$ to $2^n - 1$ **do**

  $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \{(\mathbf{I}^n \mathbf{P_c})[i] \geq 0\}$

end for

$\mathbf{P_c}^{+}[0] = 1$

$\mathbf{P_c}^{-}[0] = 1$

for $i = 1$ to $2^n - 1$ **do**

  if $\mathrm{Solve}(\max\limits_{\mathcal{E} \cup \mathcal{D}}\{\mathbf{P_c}[i]\})$ **then**

    $\mathbf{P_c}^{+}[i] = \max\limits_{\mathcal{E} \cup \mathcal{D}}\{\mathbf{P_c}[i]\}$

  else {ЗЛП неразрешима}

    return "ФЗ противоречив"

  end if

  if $\mathrm{Solve}(\min\limits_{\mathcal{E} \cup \mathcal{D}}\{\mathbf{P_c}[i]\})$ **then**

    $\mathbf{P_c}^{-}[i] = \min\limits_{\mathcal{E} \cup \mathcal{D}}\{\mathbf{P_c}[i]\}$

  else {ЗЛП неразрешима}

    return "ФЗ противоречив"

  end if

end for

return $\mathbf{P_c}^{-}, \mathbf{P_c}^{+}$

в своей работе сторонние системы решения ЗЛП, которые могут отличаться как самими алгоритмами, так и реализациями. В такой ситуации наиболее точная теоретическая оценка может быть дана в виде количества ЗЛП, которые потребуется решить и оценки сложности этих ЗЛП путем указания количества переменных и количества ограничений.

Утверждение 3. *Для выполнения алгоритма 1 потребуется сделать не более чем* $3^n - 2^n$ *сложений и вычитаний и не более чем* 2^n *сравнений с нулем.*

Доказательство. Наибольшее число операций потребуется сделать для непротиворечивого ФЗ. В этом случае, потребуется полностью вычислить произведение $\mathbf{IP_c}$. Матрица $\mathbf{I}$ содержит 3^n не нулевых элементов. При умножении строки матрицы на вектор в общем случае требуется сложений не более чем количество ненулевых элементов матрицы минус один. Так как в каждой из 2^n строк матрицы $\mathbf{I}$ есть ненулевые элементы, то общее количество сложений которое потребуется совершить $3^n - 2^n$. Ненулевые элементы матрицы $\mathbf{I}$ являются или единицами, или минус единицами, следовательно, умножения нам не потребуются, нужно будет только заменить часть сложений на вычитания, то есть совершить не более $3^n - 2^n$ сложений и вычитаний. Кроме того, каждый из 2^n элементов полученного произведения должен быть неотрицательным, следовательно потребуется 2^n сравнений с нулем. □

Утверждение 4. *Для выполнения алгоритма 2 потребуется решить не более* $2(2^n - 1)$ *ЗЛП с* $2^n - 1$ *переменной, содержащих* $2(2^n - 1)$ *ограничений на переменные из предметной области, и* 2^n *ограничений из аксиоматики теории вероятностей.*

Доказательство. Рассмотрим алгоритм 2. Количество ЗЛП которые потребуется решить, не превосходит $2(2^n - 1)$. Это соответствует шагам 12–23 для значений i, пробегающих диапазон от 1 до $2^n - 1$, включая границы. В случае противоречивого ФЗ, первая же ЗЛП не будет иметь решения, и в этом случае потребуется решить всего одну ЗЛП. Количество переменных и количество ограничений из предметной области явно указаны в алгоритме 2, а количество ограничений, следующих из аксиоматики теории вероятностей, соответствует количеству строк матрицы $\mathbf{I}$. □

5. Алгебраические байесовские сети и вторичная структура.

Определение 10. *Определим* алгебраическую байесовскую сеть $\mathcal{N}$ *как набор* $\mathcal{N}^\circ$ *фрагментов знаний:*

$$\mathcal{N}^\circ = \{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{i=n} = \left\{(C_i, \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{i,-}, \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{i,+})\right\}_{i=1}^{i=n},$$

или, в скалярном случае, —

$$\mathcal{N}^\circ = \{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{i=n} = \left\{(C_i, \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{i})\right\}_{i=1}^{i=n}.$$

Определение 11. Носителем $\mathsf{N} = \operatorname{supp}(\mathcal{N})$ *алгебраической байесовской сети* $\mathcal{N}$ *будет объединение идеалов конъюнктов, лежащих в основе фрагментов знаний, вошедших в сеть:* $\mathsf{N} = \bigcup\limits_{i=1}^{i=n} C_i$.

Над конъюнктами из $\mathsf{N} = \operatorname{supp}(\mathcal{N})$ заданы совокупности оценок вероятностей; это совокупности образуются при совместном рассмотрении оценок вероятностей во всех фрагментах знаний, которые формируют алгебраическую байесовскую сеть $\mathcal{N}$. В случае скалярных оценок мы имеем набор $\{p_i\}_{i=1}^{i=n}$, а в случае интервальных оценок — $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{i=n}$. Когда оценки на всех одинаковых конъюнктах, которые входят в два фрагмента знаний или более, *совпадают*, тогда можно говорить о том, что оценки определены как функция на носителе N. В скалярном случае эта функция будет иметь вид $p : \mathsf{N} \longrightarrow [0;1]$, а в интервальном —

$$\mathbf{p} : \mathsf{N} \longrightarrow \left\{[p^-;p^+] : p^- \leq p^+;\ p^-, p^+ \in [0;1]\right\}.$$

Замечание 4. *Определение 10 является наиболее общим из возможных. Однако при работе различных алгоритмов требуется некоторое упорядочивание ФЗ. Например, выделение пересекающихся между собой ФЗ. Подобные вещи достигаются за счет задания вторичной струкуры. Мы будем считать, что для АБС, с которыми мы работаем, вторичная структура уже задана. Вопросы построения вторичной структуры, по списку ФЗ, составляющих АБС, рассматриваются в работах [3, 4, 25].*

Дадим несколько вспомогательных определений и опишем вторичную структуру на АБС.

Определение 12. *Графом смежности называется ненаправленный граф, в котором:*

1. *Между каждой парой узлов, веса которых содержат общие элементы, существует путь, такой, что в веса каждого из узлов этого пути входят все элементы, общие для начального и конечного узлов;*

2. *Вес одного узла не входит полностью в вес никакого другого узла.*

Определение 13. *Назовем неориентированный граф* $G = \langle V, E \rangle$ *графом смежности, если он удовлетворяет следующему условию:*

> $\forall u, v \in V$ *таких, что* $W_u \cap W_v \neq \emptyset$, *существует некоторый путь* P *в графе* G *такой, что для каждой вершины* $s \in P$ *справедливо утверждение* $W_u \cap W_v \subseteq W_s$.

Определение 14. *Дерево смежности — это граф смежности, в котором каждая пара узлов соединена путем, и такой путь единственный.*

Определение 15. *Алгебраическая байесовская сеть со вторичной структурой — это граф смежности с фрагментами знаний в узлах.*

6. Степени непротиворечивости АБС. Вопросы, связанные с определением и поддержанием различных степеней непротиворечивости АБС, равно как и подходы к определению непротиворечивости фрагмента знаний со скалярными и интервальными оценками истинности, ставились и изучались в ряде публикаций (в частности, в [1, 2, 11, 13, 21]); в настоящей работе мы в основном рассматриваем вопросы, касающиеся АБС со структурой дерева смежности.

Выделяются четыре степени непротиворечивости:

1. Глобальная непротиворечивость.

2. Интернальная непротиворечивость.

3. Экстернальная непротиворечивость.

4. Локальная непротиворечивость.

Мы расположили данные степени непротиворечивости в порядке их «значимости». Но, к сожалению, более значимая степень непротиворечивости, оказывается более вычислительно сложной. Чем выше степень непротиворечивости в нашем списке, тем сложнее ее проверить. Перейдем к формальным определениям [21].

Определение 16. *АБС* $\mathcal{N} = (\mathsf{N}, \mathbf{p}^{\mathcal{N}})$ *считается глобально непротиворечивой, если ее с имеющимися оценками можно погрузить в непротиворечивый объемлющий фрагмент знаний и при этом оценки на формулах из АБС не изменятся.*

$$\exists \mathcal{C} = (\mathsf{C}, \mathbf{p}) : (\mathsf{N} \subset \mathsf{C})\&(\text{Consistent}\,[\mathcal{C}])\&(\forall c \in \mathsf{N}\mathbf{p}^{\mathcal{N}}(c) = \mathbf{p}(c))$$

Определение 17. *АБС* $\mathcal{N} = \{(\mathsf{C}_i, \mathbf{p}_i)\}_{i=1}^{i=n}$ *считается интернально непротиворечивой, если для каждого конъюнкта из АБС для любого скалярного значения из интервала оценки ее истинности можно выбрать согласованные (т.е. совпадающие на одинаковых формулах) скалярные значения во всех фрагментах знаний, так, что все получившиеся ФЗ со скалярными оценками будут непротиворечивы.*

$$\forall i \forall c \in \mathsf{C}_i \forall \varepsilon \in \mathbf{p}_i(c) \exists p_{i,c,\varepsilon} : \text{supp}\,(\mathcal{N}) \to [0;1] :$$

$$\forall j (\forall d \in \mathsf{C}_j p(d) \in \mathbf{p}_j(d))\&(\text{Consistent}\left[(\mathsf{C}_j, p|_{\mathsf{C}_j})\right])$$

Определение 18. *АБС* $\mathcal{N} = \{(\mathsf{C}_i, \mathbf{p}_i)\}_{i=1}^{i=n}$ *считается экстернально непротиворечивой, если каждый фрагмент знаний в сети непротиворечив, а также оценки истинности каждой формулы, входящей одновременно в два фрагмента знаний или более, совпадают.*

$$\forall i \forall j (c \in \mathsf{C}_i, c \in \mathsf{C}_j \Rightarrow \mathbf{p}_i(c) = \mathbf{p}_j(c))$$

Определение 19. *АБС* $\mathcal{N} = \{(\mathsf{C}_i, \mathbf{p}_i)\}_{i=1}^{i=n}$ *считается локально непротиворечивой, если каждый фрагмент знаний в сети непротиворечив.*

$$\forall i\ \text{Consistent}\,[(\mathsf{C}_i, \mathbf{p}_i)]$$

Замечание 5. *Локальная непротиворечивость не предъявляет требований к согласованности оценок на элементах, общих для двух или нескольких фрагментов знаний, но по сложившийся традиции мы все таки считаем ее одной из степеней непротиворечивости сети.*

Определения 16–19 даны в порядке убывания силы непротиворечивости. В монографии [21] доказано, что из более сильной непротиворечивости всегда следует более слабая. В обратную же сторону утверждение не верно. В общем случае для любой пары существует пример алгебраической байесовской сети, на котором более слабая степень непротиворечивости есть, а более сильной нет.

Теорема 1. *Контрпример, разделяющий экстернальную и интернальную степени непротиворечивости. Экстернальная и интернальная степени непротиворечивости не совпадают.*

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно построить алгебраическую байесовскую сеть, являющуюся экстернально непротиворечивой, но интернально противоречивой. Впервые примеры подобных сетей появляются в работах [5,9]. Рассмотрим следующую АБС, состоящую из пяти ФЗ с носителями $C_{\{q,r,s\}}$, $C_{\{r,s,t\}}$, $C_{\{t,u,v,w\}}$, $C_{\{w,x,y\}}$ и $C_{\{x,y,z\}}$, со следующими оценками:

$p(q) = 0.52,$
$0.84 \le p(r) \le 1.0,$
$p(qr) = 0.52,$
$p(s) = 0.68,$
$p(qs) = 0.2,$
$0.52 \le p(rs) \le 0.68,$
$p(qrs) = 0.2,$
$0.6 \le p(t) \le 0.74,$
$p(rt) = 0.6,$
$p(st) = 0.52,$
$p(rst) = 0.52,$

$0.6 \le p(t) \le 0.74,$
$0.7 \le p(u) \le 0.9,$
$0.5 \le p(tu) \le 0.64,$
$0.7 \le p(v) \le 0.9,$
$0.5 \le p(tv) \le 0.64,$
$p(uv) = 0.6,$
$0.5 \le p(tuv) \le 0.6,$
$0.7 \le p(w) \le 0.82,$
$p(tw) = p(uw) = 0.6,$
$p(tuw) = 0.5; p(vw) = 0.6,$
$p(tvw) = p(uvw) = 0.5,$
$0.4 \le p(tuvw) \le 0.5.$

$0.7 \le p(w) \le 0.82,$
$0.7 \le p(u) \le 0.92,$
$p(wx) = 0.7,$
$p(y) = 0.76,$
$p(wy) = 0.64,$
$0.64 \le p(xy) \le 0.74,$
$p(wxy) = 0.64,$
$p(z) = 0.64,$
$p(xz) = 0.64,$
$p(yz) = 0.4,$
$p(xyz) = 0.4,$

Представленная сеть является экстернально непротиворечивой, но не является интернально непротиворечивой. Рассмотрим ФЗ заданные над $C_{\{q,r,s\}}$ и $C_{\{r,s,t\}}$ с сответствующими оценками. Каждый из приведенных ФЗ непротиворечив и оценки одинаковых конъюнктов из разных ФЗ совпадают, следовательно сеть из этих двух ФЗ экстернально непротиворечива.

Рассмотрим их одновременно. На основе ФЗ $C_{\{q,r,s\}}$ выпишем одно из ограничений, накладываемое аксиоматикой теории вероятностей:

$$p(r) - p(qr) - p(rs) + p(qrs) \ge 0.$$

Отсюда следует, что $p(r) - p(rs) \geq p(qr) - p(qrs)$. Подставим $p(qr)$, $p(qrs)$ известные из оценок ФЗ.

$$p(r) - p(rs) \geq 0.32. \tag{9}$$

Теперь перейдем к ФЗ $C_{\{r,s,t\}}$ и выпишем одно из ограничений:

$$1 - p(r) - p(s) + p(rs) - p(t) + p(rt) + p(st) - p(rst) \geq 0.$$

Выразим $p(t)$ и подставим оценки заданные точно:

$$p(t) \leq 0.92 - p(r) + p(rs).$$

Теперь подставим данные из (9) и получим

$$p(t) \leq 0.6. \tag{10}$$

Таким образом, одновременное применение ограничений из ФЗ $C_{\{q,r,s\}}$ и $C_{\{r,s,t\}}$ приводит к тому, что оценка для $p(t)$ сужается с

$$0.6 \leq p(t) \leq 0.74$$

до $p(t) = 0.6$.

Аналогично, в паре ФЗ $C_{\{w,x,y\}}$ и $C_{\{x,y,z\}}$ оценка

$$0.7 \leq p(w) \leq 0.82$$

уточнится до $p(w) = 0.7$.

Оставшийся ФЗ $C_{\{t,u,v,w\}}$ построен таким образом, что не существует вероятностного распределения удовлетворяющего заданным оценкам и условиям $p(t) = 0.6$ и $p(w) = 0.7$ одновременно.

$\square$

Замечание 6. *Пример сети, приведенной в теореме 1, экстернально согласуем (может быть сужен до экстернально непротиворечивой АБС), а интернально не согласуем. А это — более жесткое разделение двух классов непротиворечивости. В качестве примера, разделяющего именно понятия непротиворечивости, достаточно рассмотреть часть сети, содержащую только два ФЗ с носителями* $C_{\{q,r,s\}}$, $C_{\{r,s,t\}}$, *соответственно. Следует заметить, что пример является ациклической АБС. Таким образом, хотя отсутствие циклов в АБС гарантирует эквивалентность глобальной и интернальной непротиворечивостей, оно не обеспечивает эквивалентности интернальной и экстернальной непротиворечивостей.*

7. Алгоритмы поддержания непротиворечивости и их сложность. Начнем с самой сильной непротиворечивости — глобальной. Как следует из ее определения, нам следует погрузить всю сеть в один фрагмент знаний и проверить его непротиворечивость. Этому случаю соответствует алгоритм 2 с небольшими поправками. А именно ЗЛП требуется решать, только для конъюнктов присутствующих в АБС и не требуется задавать ограничения из предметной области для не входящих в АБС конъюнктов.

Утверждение 5. *Для поддержания глобальной непротиворечивости тербуется решить* $2k$ *задач линейного программирования с* $2^n - 1$ *переменной,* $2k$ *ограничениями из предметной области и* 2^n *ограничениями из аксиоматики теории вероятностей, где* n *— число атомарных пропозиций, а* k *— число различающихся конъюнктов входящих в АБС.*

Доказательство. Это следует из утверждения 4 и поправок к алгоритму, указанных выше. □

Замечание 7. *Заметим, что это самый общий и самый сложный случай. Если известно, что АБС — ациклическая, то процесс поддержания интернальной непротиворечивости, даст тот же результат что и процесс поддержания глобальной непротиворечивости [21]. Если же в сети присутствуют циклы, то глобально противоречивая сеть, обязательно будет интернально противоречива, обратное в общем случае не верно [21].*

Опишем алгоритм процесса поддержания интернальной непротиворечивости.

Для поддержания интернальной непротиворечивости необходимо решить серию задач линейного программирования, но, в отличие от предыдущего случая, точные оценки вычислительной сложности будут зависеть от конкретной конфигурации сети.

- общее число атомарных пропозиций — n;
- над ними задано m фрагментов знаний;
- i-тый ФЗ задан над n_i переменными;
- общее число различных конъюнктов в сети —k.

Algorithm 3 Алгоритм поддержания интернальной непротиворечивости

Require: $\mathcal{N}$
Ensure: $\mathcal{N} = (\mathsf{N}, p^-, p^+); \mathcal{N} = \{(C_i, P_i^+, P_i^-)\}_{i=0}^m$

$\mathcal{E} = \emptyset$
$\mathcal{D} = \emptyset$
for all $(C_i, P_i^+, P_i^-) \in \mathcal{N}$ **do**
  for all $c \in C_i$ **do**
    $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \{p(c) \geq P_i^-; p(c) \leq P_i^+\}$
  end for
  $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}(C_i)$
end for
for all $c \in \operatorname{supp}(()\mathcal{N})$ **do**
  if $\mathrm{Solve}(\max\limits_{\mathcal{E}\cup\mathcal{D}}\{p(c)\})$ **then**
    $p^+(c) = \max\limits_{\mathcal{E}\cup\mathcal{D}}\{p(c)\}$
  else {ЗЛП неразрешима}
    return "АБС противоречива"
  end if
  if $\mathrm{Solve}(\max\limits_{\mathcal{E}\cup\mathcal{D}}\{p(c)\})$ **then**
    $p^-(c) = \min\limits_{\mathcal{E}\cup\mathcal{D}}\{p(c)\}$
  else {ЗЛП неразрешима}
    return "АБС противоречива"
  end if
end for
return (N, p^-, p^+)

Утверждение 6. *Пусть дана АБС, заданная над* n *атомарными пропозициями, состоящая из* m *фрагментов знаний. Предположим, что каждый ФЗ задан над* n_i *атомами, а всего различных конъюнктов в сети —* k*. Тогда для поддержания интернальной непротиворечивости потребуется решить* $2k$ *задач линейного программирования, каждая из которых будет содержать* k *переменных,* $2k$ *оценок из предметной области и не более* $m \cdot 2^{n_{\max}}$ *ограничений из аксиоматики теории вероятностей, где* $n_{\max} = \max(n_i)$*.*

Доказательство. Оценка на количество ЗЛП, количество переменных и количество оценок из предметной области следует непосредственно из описания алгоритма 3. Точное число ограничений аксиоматики теории вероятностей

$$\sum_{i=1}^{i=m} 2^{n_i} \leq m \cdot 2^{n_{\max}}.$$

□

Замечание 8. *Обычно при рассмотрении декомпозируемости знаний указывается, что мы будем работать с ФЗ, размеры которых ограничены сверху. Следовательно, оценка* $m \cdot 2^{n_{\max}}$ *оказывается не экспоненциальной, а линейной. Число переменных, можно оценить следующим образом* $m \leq k \leq m \cdot 2^{n_{\max}}$*. Таким образом, приведенная выше точная оценка может быть описана как: требуется решить линейное число ЗЛП с линейным числом ограничений и переменных относительно количества ФЗ.*

Перейдем теперь к экстернальной степени непротиворечивости. К сожалению, как доказано в теореме 1, наличие экстернальной непротиворечивости не гарантирует нам наличия интернальной непротиворечивости. Но отсутствие экстернальной непротиворечивости ведет к гарантированному отсутствию интернальной и, тем более, глобальной непротиворечивости. Таким образом, мы сможем заметно «дешевле» выявить противоречивость сети. В случае если сеть окажется экстернально непротиворечивой, придется все таки проверять и интернальную непротиворечивость.

Легко видеть, что процесс проверки экстернальной непротиворечивости элементарен, достаточно проверить, что каждый ФЗ непротиворечив (это мы умеем), и убедиться, что границы оценок общих элементов совпадают для всех ФЗ.

К сожалению, на данный момент не удалось предложить алгоритм поддержания экстернальной непротиворечивости, корректность которого может быть доказана для общего случая АБС. Следующий пример демонстрирует одну из проблем.

Пример 3. Пример сложной для экстернальной непротиворечивости сети.

Рассмотрим АБС состоящую из двух фрагментов знаний, заданных над алфавитами $\{t, x, y\}$ и $\{x, y, z\}$ ($\mathcal{C}_{\{t,x,y\}}$ и $\mathcal{C}_{\{x,y,z\}}$ соответственно), со следующими оценками:

$$\begin{array}{ccc} p(t) = 0.4 & & 0.5 \le p(z) \le 0.7 \\ p(tx) = 0.4 & 0.8 \le p(x) \le 1.0 & p(xz) = 0.5 \\ p(ty) = 0.0 & p(y) = 0.6 & p(yz) = 0.4 \\ p(txy) = 0.0 & 0.4 \le p(xy) \le 0.6 & p(xyz) = 0.4 \end{array}$$

Каждый из ФЗ непротиворечив. Несложно заметить, что оценки вероятности истинности общих элементов у них совпадают, следовательно укзанная АБС экстернально непротиворечива. Если же мы поддержим интернальную непротиворечивость, то оценка

$$0.5 \le p(z) \le 0.7$$

уточнится до

$$p(z) = 0.5.$$

Теперь заменим оценку

$$0.5 \le p(z) \le 0.7$$

на оценку

$$0.5 + \alpha \le p(z) \le 0.7,$$

где $\alpha > 0$. Очевидно, что полученная АБС станет интернально противоречивой. Более того, сейчас мы покажем, что она станет экстернально противречивой.

Попробуем поддержать непротиворечивость в $\mathcal{C}_{\{x,y,z\}}$. Новая оценка для z приведет к уточнению оценок для x и xy, до

$$0.8 \le p(x) \le 1.0 - \alpha,$$

$$0.4 + \alpha \leq p(xy) \leq 0.6.$$

Так как эти конюънкты входят в $\mathcal{C}_{\{t,x,y\}}$, то новые оценки могут привести к тому, что $\mathcal{C}_{\{t,x,y\}}$ перестанет быть непротиворечивым. Поддержим непротиворечивость $\mathcal{C}_{\{t,x,y\}}$ с новыми оценками для x и xy. Подобное поддержание непротиворечивости снова приведет к уточнению оценок для x и xy. На этот раз до:

$$0.8 + \alpha \leq p(x) \leq 1.0 - \alpha,$$

$$0.4 + \alpha \leq p(xy) \leq 0.6 - \alpha.$$

Теперь непротиворечивым перестаёт быть $\mathcal{C}_{\{x,y,z\}}$. Очередное поддержание непротиворечивости в

$$\mathcal{C}_{\{x,y,z\}}$$

приведёт к оценкам

$$0.8 + \alpha \leq p(x) \leq 1.0 - 2\alpha,$$

$$0.4 + 2\alpha \leq p(xy) \leq 0.6 - \alpha,$$

$$0.5 + \alpha \leq p(z) \leq 0.7 - 2\alpha$$

и т. д. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока на очередном шаге мы не получим противоречивый ФЗ. Если шагом считать последовательное поддержание непротиворечивости в двух ФЗ, то за один шаг диапазон допустимой оценки для $p(x)$ сузится на 2α. Изначально этот диапазон равен 0.2. Таким образом, если мы сделаем меньше чем $0.1/\alpha$ шагов, то у нас по-прежнему не будет непротиворечивого ФЗ. Так как α выбрано произвольно, то можно сделать так, что за любое заданное число шагов такие «качели» не остановятся.

Опишем один алгоритм. Он заведомо решает задачу процесса поддержания экстернальной непротиворечивости в случае, если АБС представлена деревом смежности и любые два ФЗ пересекаются не больше чем по одному элементу.

Все ребра дерева смежности ненаправленные, поэтому нет строгого понятия отношения родитель–сын, но если выбрать одну из вершин и зафиксировать ее как корень дерева, то в силу того, что родитель для каждой вершины в дереве единственный, а корень — родитель для всех своих соседей, то отношение родитель–сын распространится на все дерево единственным образом. Предположим, что корень зафиксирован, и опишем алгоритм поддержания экстернальной непротиворечивости.

Algorithm 4 Алгоритм поддержания экстернальной непротиворечивости

Require: $\mathcal{N}$
Ensure: $\mathcal{N} = \{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^m$, $\mathcal{N}$ — дерево, $\mathcal{C}_1$ — корень

$\mathrm{MARK} = \emptyset$
while $\mathrm{MARK} \neq \mathcal{N}$ **do**
    get $\mathcal{C}_i$**:** $\mathcal{C}_i \notin \mathrm{MARK}$ **and** $\mathrm{ch}(\mathcal{C}_i) \subset \mathrm{MARK}$
    if not($\mathcal{C}_i \to \mathrm{Consistent}\,[\mathcal{C}_i]$**) then**
        return "АБС экстернально противоречива"
    end if
    $\mathrm{MARK} = \mathrm{MARK} \cup \{\mathcal{C}_i\}$
end while
$\mathrm{MARK} = \{\mathcal{C}_1\}$
while $\mathrm{MARK} \neq \mathcal{N}$ **do**
    get $\mathcal{C}_i$**:** $\mathcal{C}_i \notin \mathrm{MARK}$ **and** $\mathsf{pa}(\mathcal{C}_i) \in \mathrm{MARK}$
    if not $\mathcal{C}_i \to \mathrm{Consistent}\,[\mathcal{C}_i]$ **then**
        return "АБС экстернально противоречива"
    else
        if Оценки $\mathsf{pa}(\mathcal{C}_i)$ **уточнились then**
            return "Особый случай"
        end if
    end if
    $\mathrm{MARK} = \mathrm{MARK} \cup \{\mathcal{C}_i\}$
end while
return $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^m$ "Оценки уточнены до непротиворечивых"

Поясним, что делает наш формальный алгоритм.

1. Выберем произвольный непомеченный узел дерева смежности, у которого нет непомеченных детей. Если таких нет, то переходим к шагу 5.

2. Для каждого конъюнкта выбранного ФЗ, уточним оценки, с

учетом оценок соответствующего конъюнкта во фрагментах знаний, соответствующих узлам-детям.

3. Поддержим непротиворечивость ФЗ соответствующего выбранному узлу.
4. Если процесс поддержания непротиворечивости успешен, то заменяем исходный ФЗ, на ФЗ с оценками, полученными в процессе поддержания непротиворечивости, пометим данный узел и перейдем к шагу 1. В противном случае сообщаем, что сеть экстернально противоречива и выходим.
5. Снимаем все пометки и помечаем корень дерева.
6. Выберем произвольный непомеченный узел дерева смежности, у которого помечен родитель. Если таких нет, то переходим к шагу 10.
7. Поддержим непротиворечивость в ФЗ, соответствующем выбранному узлу, с учетом оценок узла-родителя.
8. Если процесс поддержания непротиворечивости неуспешен, сообщаем, что сеть экстернально противоречива и выходим.
9. Если в процессе поддержания непротиворечивости оценка хотя бы одного конъюнкта, входящего в родительский ФЗ, уточнилась, то сообщаем об особом случае и выходим. В противном случае пометим данный узел и перейдем к шагу 6.
10. Сообщаем, что сеть уточнена до экстернально непротиворечивой и выходим.

Утверждение 7. *Если алгоритм сообщил, что сеть уточнена до экстернально непротиворечивой, то сеть с уточненными оценками экстернально непротиворечива.*

Доказательство. Алгоритм состоит из двух этапов. Первый этап, назовем его «сбор информации», — это строки 1–8 (шаги 1–4 в пояснении). По окончании первого этапа, мы получаем, что все ФЗ непротиворечивы, но возможно не все согласованны. Начнём «распространение информации» — «спуск» от корня к листьям. Рассмотрим текущий ФЗ и уточнение, пришедшее от его родителей.

Заметим, что оценки, пришедшие от родителей, не могут быть шире, чем оценки в текущем ФЗ, это связано с тем, что на первом этапе «родителям» передавались оценки нашего ФЗ в качестве одного из ограничений и, следовательно, как минимум такие ограничения выполнены. Таким образом, оценки, пришедшие от родителя, могут быть только уже. После поддержания непротиворечивости оценки родителя не изменились, так как иначе алгоритм сообщил бы об особом случае. Следовательно, текущий ФЗ непротиворечив, и его оценки совпадают с оценками родителя. Рассмотрев в качестве «текущего» каждый ФЗ, получаем, что все ФЗ непротиворечивы и согласованны со своим родителем, а следовательно любой общий элемент для двух ФЗ будет иметь одинаковые оценки в этих ФЗ. □

Утверждение 8. *Если в ациклической АБС все ФЗ пересекаются не более чем по одному элементу, то алгоритм не сообщит об особом случае.*

Доказательство. После этапа «сбора информации» все ФЗ являются непротиворечивыми. Если ФЗ непротиворечив, то при сужении оценки одного элемента можно будет уточнить все остальные оценки до непротиворечивых. Оценка, которую мы изначально сужаем, не изменится. Так как любая оценка из уточнённого интервала имела реализацию, то весь уточнённый интервал будет входить в непротиворечивый ФЗ. Таким образом, ситуация, когда на втором этапе алгоритма уточнится оценка в родительском ФЗ, невозможна. □

Оценим сложность данного алгоритма. Нам потребуется провести процесс поддержания непротиворечивости ФЗ $2m-1$ раз. Будем считать, что количество атомов в i-том ФЗ — n_i, а ФЗ, соответствующий узлу, являющемуся корнем дерева, имеет номер один, тогда надо решить:

- Для корня: $2(2^{n_1}-1)$ ЗЛП с $2^{n_1}-1$ переменными, $2(2^{n_1}-1)$ граничными условиями и 2^{n_1} ограничениями;
- Для остальных вершин: $4(2^{n_i}-1)$ ЗЛП с $2^{n_i}-1$ переменными, $2(2^{n_i}-1)$ граничными условиями и 2^{n_i} ограничениями.

Как мы уже отмечали раньше, n_i сильно ограничены (на практике не больше пяти), таким образом, мы получаем задачи линейного программирования, вычислительная сложность которых может быть оценена константой. По сравнению с процессом поддержания экстернальной непротиворечивости, потребуется решить примерно в два раза больше задач линейного программирования, но каждая из задач интернальной непротиворечивости — линейного размера, а каждая из задач экстернальной непротиворечивости — константного размера. А следовательно поддержание экстернальной непротиворечивости будет вычислительно проще. Таким образом, вычислительная сложность поддержания экстернальной непротиворечивости меньше, чем сложность поддержания интернальной непротиворечивости.

Для полноты картины осталось рассмотреть только локальную степень непротиворечивости. Для ее вычисления необходимо поддержать непротиворечивость каждого ФЗ. То есть решить $4(2^{n_i}-1)$ ЗЛП с $2^{n_i}-1$ переменными, $2(2^{n_i}-1)$ граничными условиями и 2^{n_i} ограничениями.

Замечание 9. *Важно то, что если сеть противоречива, то для случая интернальной и глобальной непротиворечивости это выявится при решении первой же ЗЛП, и, в таком случае, все остальные ЗЛП решать уже не потребуется.*

Литература

1. *Городецкий В.И.* Алгебраические байесовские сети — новая парадигма экспертных систем // Юбилейный сборник трудов институтов Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН. Т. 2. М.: РАН, 1993. С. 120–141.

2. *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 1997. Т. 5. С. 33–42.

3. *Опарин В.В., Тулупьев А.Л.* Синтез графа смежности с минимальным числом ребер: формализация алгоритма и анализ его корректности // Труды СПИИРАН. СПб.: Наука, 2009. С. 142–157.

4. *Опарин В.В., Фильченков А.А., Сироткин А.В., Тулупьев А.Л.* Матроидное представление семейства графов смежности над набором фрагментов знаний // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2010. N. 4(68). P. 73—-76.

5. *Сироткин А.В.* Интернальная и экстернальная степени непротиворечивости алгебраических байесовских сетей // X Санкт-Петербургская межд. конф. «Региональная информатика 2006 (РИ-2006)», Санкт-Петербург, 24–26 октября 2006 г.: Материалы конференции. СПб.: СПОИСУ, 2006. С. 57.

6. *Сироткин А.В.* Алгебраические байесовские сети как вероятностно-семантический образ байесовских сетей доверия // X Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (SCM'2007), Санкт-Петербург, 25–27 июня 2007 г.: Сборник докладов. Т. 1. СПб.:СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2007. С. 208–211.

7. *Сироткин А.В.* Вычислительная сложность локального апостериорного вывода // Интегрированные модели, мягкие вычисления, вероятностные системы и комплексы программ в искусственном интеллекте. Научно-практическая конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов (Коломна, 26–27 мая 2009 г.). Научные доклады. В 2-х т. Т. 1. М.: Физматлит, 2009. С. 234—-242.

8. *Сироткин А.В.* Модели, алгоритмы и вычислительная сложность синтеза согласованных оценок истинности в алгебраических байесовских сетях // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2009. N. 11. P. 32—-37.

9. *Сироткин А.В., Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: согласованность и согласуемость вероятностных оценок истинности // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сб. трудов IV межд. научно-практической конф. (Коломна, 28–30 мая 2007 г.). В 2-х т. Т. 1. М.: Физматлит, 2007. С. 296–302.

10. *Сироткин А.В., Тулупьев А.Л.* Матричные уравнения локального логико-вероятностного вывода в алгебраических байесовских сетях // Труды СПИИРАН. СПб.: Наука, 2008. С. 134–143.

11. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: теоретические основы и непротиворечивость. СПб.: СПИИРАН, 1995. 76 с.

12. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети доверия и алгебраические байесовские сети: сравнительный анализ выразительной мощности // Интеллектуальные методы и информационные технологии. Вып. 2. СПб.: СПИИРАН, 1997. С. 121–147.

13. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный подход к моделированию баз знаний с неопределенностью. СПб.: СПИИРАН, 2000. 282 с.

14. *Тулупьев А.Л.* Ациклические алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный вывод // Нечеткие системы и мягкие вычисления: Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений. 2006. Т. 1, № 1. С. 57–93.

15. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: Учеб. пособие. Элементы мягких вычислений. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 40 с.

16. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: локальный логико-вероятностный вывод: Учеб. пособие. Элементы мягких вычислений. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 80 с.

17. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. 140 с.

18. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в алгебраических байесовских сетях // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Р. 144–151.

19. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в идеалах конъюнктов и дизъюнктов // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Р. 121–131.

20. *Тулупьев А.Л.* Апостериорные оценки вероятностей в идеале конъюнктов // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2010. Р. 95–104.

21. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 608 с.

22. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Алгебраические байесовские сети: принцип декомпозиции и логико-вероятностный вывод в условиях неопределенности // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2008. Vol. 6, N. 10. P. 85—-87.

23. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Локальный апостериорный вывод в алгебраических байесовских сетях как система матрично-векторных операций // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. V-я Международная научно-практическая конференция. Сборник научных трудов. В 2-х т. Т. 1. СПб.: Наука, 2009. С. 425–434.

24. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2009. 400 с.

25. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л.* Структурный анализ систем минимальных графов смежности // Труды СПИИРАН. СПб.: Наука, 2009. С. 104–129.

26. *Fagin R., Halpern J.Y.* Uncertainty, Belief, and Probability // Computational Intelligence. 1991. Vol. 6. P. 160–173.

27. *Fagin R., Halpern J.Y.* Uncertainty, Belief, and Probability-2 // Proc. of the IEEE Symposium on Logic and Computer Science. 1991. Vol. 7. P. 160–173.

28. *Fagin R., Halpern J.Y.* Reasoning about Knowledge and Probability // Journal of the Association for Computing Machinery. 1994. Vol. 41, N. 2. P. 340–367.

29. *Fagin R., Halpern J.Y., Megiddo N.* A Logic for Reasoning about Probabilities: Tech. Rep. RJ 6190 (60900): 1988.

30. *Fagin R., Halpern J.Y., Megiddo N.* A Logic for Reasoning about Probabilities // Information and Computation. 1990. Vol. 87, N. 1/2. P. 78–128.

31. *Jensen F.V.* Bayesian Networks and Decision Graphs. New York: Springer-Verlag, 2002. 268 p.

32. *Nilsson N.J.* Probabilistic Logic // Artificial Intelligence. 1986. Vol. 28. P. 71–87.

33. *Nilsson N.J.* Logic and Artificial Intelligence // Artificial Intelligence. 1991. Vol. 47. P. 31–56.

34. *Nilsson N.J.* Probabilistic Logic Revisited // Artificial Intelligence. 1993. Vol. 59. P. 39–42.

35. *Pearl J.* Fusion, Propagation, and Structuring in Belief Networks // Artificial Intelligence. 1986. Vol. 29. P. 241–288.

36. *Pearl J.* Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. NY etc.: Morgan Kaufmann, 1994.

Сироткин Александр Владимирович — младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики Учреждения Российской академии наук С.-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН). Область научных интересов: алгебраические байесовские сети: вычислительные аспекты логико-вероятностного вывода в условиях неопределенности. Число научных публикаций - 40. avs@iias.spb.su; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450. Научный руководитель — Тулупьев А.Л.

Sirotkin Alexander Vladimirovich — junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: algebraic Bayesian networks, algorithms of probabilistic-logic inference under uncertainty. The number of publications - 40. avs@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Тулупьев Александр Львович — д.ф.-м.н., доцент; заведующего лабораторией теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН, доцент кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: представление и обработка данных и знаний с неопределенностью, применение методов математики и информатики в социокультурных исследованиях, применение методов биостатистики и математического моделирования в эпидемиологии, технология разработки программных комплексов с СУБД. Число научных публикаций - 210. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

Tulupyev Alexander Lvovich - PhD in Computer Science, Dr. of Sc.. Associate Professor; Head of Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS, Associate Professor of Computer Science Department, SPbSU. Research area: uncertain data and knowledge representation and processing, mathematics and computer science applications in socio-cultural studies, biostatistics, simulation, and mathematical modeling applications in epidemiology, data intensive software systems development technology. Number of publications - 210. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09-01-00861-а.

Рекомендовано ЛПИ СПИИРАН, зав. лаб. Юсупов Р.М., член-корреспондент РАН.

Статья поступила в редакцию 12.12.2010.

РЕФЕРАТ

Сироткин А.В. **Проверка и поддержание непротиворечивости алгебраических байесовских сетей: вычислительная сложность алгоритмов.**

Целью данной работы является анализ сложности алгоритмов поддержания непротиворечивости в АБС. Для достижения этой цели мы приводим формальные описания алгоритмов с использованием псевдокода, а затем доказываем корректность описываемых алгоритмов и предлагаем оценки вычислительной сложности.

Базируясь на подходе Н. Нильссона, мы описываем способ задания оценок вероятности истинности пропозициональных формул. Это позволяет нам описать структуру фрагмента знаний алгебраической байесовской сети. Фрагмент знаний представляет собой идеал конъюнктов, для которых, как для пропозициональных формул, заданы оценки вероятности истинности. Указанные оценки могут быть как скалярные (точечные), так и интервальные. Для скалярных и интервальных оценок истинности предлагаются алгоритмы поддержания непротиворечивости и доказываются оценки сложности.

Определив понятие фрагментов знаний мы переходим к понятию алгебраической байесовской сети. Алгебраическая байесовская сеть — это набор фрагментов знаний. Мы предполагаем, что кроме набора фрагментов знаний для алгебраической байесовской сети задана ее вторичная структура — граф смежности.

Для алгебраической байесовской сети мы рассматриваем четыре степени непротиворечивости: глобальную, интернальную, экстернальную и локальную. Глобальная и локальная непосредственно сводятся к понятию непротиворечивости для фрагмента знаний, поэтому мы не рассматриваем их подробно.

Для интернальной и экстернальной степеней непротиворечивости мы доказываем, что это разные понятия. Для интернальной степени непротиворечивости мы приводим алгоритм, доказываем его корректность и предлагаем оценки сложности. Для экстернальной непротиворечивости мы приводим пример сложной сети с одним параметром, для которой существующий алгоритм будет сходиться сколь-угодно долго. Мы приводим алгоритм экстернальной непротиворечивости, и доказываем его корректность для определенного класса сетей.

SUMMARY

Sirotkin A.V. **Algebraic bayesian networks reconciliation: computational complexity.**

The paper's aim is to analyze the complexity of the algebraic Bayesian network consistency reconcile algorithms. To achieve this goal, we give formal descriptions of algorithms using pseudocode. Prove the correctness of the described algorithms and provide evaluation of computational complexity.

Based on the approach of N. Nilsson, we describe how to set estimates for the truth probability of propositional formulae. This allows us to describe the structure of a algebraic Bayesian network knowledge pattern. Knowledge paterrn is an ideal of conjuncts, for which, as for propositional formulas, given estimates of truth probability. These estimates can be either scalar (point-valued) and the interval. For scalar and interval estimates of truth proposed algorithms to maintain consistency and prove bounds on the complexity.

After definition of the knowledge pattern we briefly describe the concept of algebraic Bayesian network. Algebraic Bayesian network is a set of knowledge patterns. We assume that in addition to a set of knowledge patternss in algebraic Bayesian network there is a secondary structure called join graph.

For an algebraic Bayesian network, we consider four levels of consistency: a global, internal, external, and local. Global and local directly reduced to the notion of consistency for a knowledge pattern, so we do not consider them in detail. For internal and external degrees of consistency, we prove that a different concept.

For internal degree of consistency, we present an algorithm, prove its correctness and provide complexity estimates of the proposed assessment. For external consistency degree, we present an example of a complex network with one parameter and demonstrate that existing algorithms will work beyond the limit of time. We describe external degree reconciliation algorithm and prove its correctnes for a certain algebraic Bayesian networks class.