

Е.Ю. ШМАЛЬКО

**МАШИННО СИНТЕЗИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
НЕЛИНЕЙНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ НА ОСНОВЕ  
ОПТИМАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ**

*Шмалько Е.Ю. Машинно синтезированное управление нелинейным динамическим объектом на основе оптимального расположения точек равновесия.*

**Аннотация.** При решении задачи оптимального управления как прямыми так и непрямыми подходами основной прием состоит в переводе задачи оптимального управления из класса бесконечномерной оптимизации в конечномерную. Однако, при всех этих подходах в результате получается разомкнутое программное управление, чувствительное к неопределенностям, и для реализации которого в реальном объекте необходимо построить систему стабилизации. Введение системы стабилизации изменяет динамику объекта, а значит оптимальное управление и оптимальная траектория должны рассчитываться для объекта уже с учетом системы стабилизации. В итоге получается, что изначальная задача оптимального управления является сложной, и часто возможность ее решения крайне зависима от типа объекта и функционала, а в случае усложнения объекта за счет введения системы стабилизации сложность задачи значительно увеличивается и применение классических подходов решения задачи оптимального управления оказывается трудоемким или невозможным. В настоящей работе предложен метод синтезированного оптимального управления, который реализует обозначенную логику разработки систем оптимального управления, преодолевая вычислительную сложность поставленной задачи за счет применения современных методов машинного обучения на основе символьной регрессии и эволюционных алгоритмов оптимизации. Согласно подходу сначала строится система стабилизации объекта относительно некоторой точки, а далее положение этой точки равновесия становится параметром управления. Таким образом, удается перевести задачу бесконечномерной оптимизации в задачу конечномерной оптимизации, а именно оптимального расположения точек равновесия. Эффективность подхода продемонстрирована на решении задачи оптимального управления мобильным роботом.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, точка равновесия, нелинейный объект, машинное обучение, стабилизация.

**1. Введение.** Классическая теория оптимального управления с ее обширным набором методов и инструментариев разрабатывалась под влиянием двух основных факторов. Во-первых, развитие сильных аналитических методов являлось по сути единственной альтернативой в виду недостаточных вычислительных мощностей. А во-вторых, основными прикладными областями использования данных методов являлись оборонная и ракетно-космическая отрасли, где предъявляются высочайшие требования к точности и надежности разрабатываемых систем в виду как высокой стоимости данных объектов управления, так и вопросов, связанных с безопасностью, политической значимостью и охраной государства.

Сегодня с обширным внедрением и массовой разработкой разнофункциональных робототехнических устройств, требования к разрабатываемым системам управления несколько изменились. На первые планы выходят быстрота разработки систем управления и универсальность подходов. К новым вызовам при разработке систем управления можно добавить требование ускорения процессов создания систем автоматического управления, необходимость иметь дело со все более сложными и разнообразными системами, а также необходимость разработки с меньшими предварительными знаниями об объекте и его окружении, включая управления в условиях неопределенности. Эти потребности привели к переоценке традиционных методов управления и сделали совершенно очевидной потребность в новых методах теории управления.

Для достижения обозначенных целей и всесторонней автоматизации и универсализации подходов в управлении необходимо, все-таки, сначала поставить требуемые задачи в универсальных математических формулировках, а затем найти общие методы их решения.

В теории управления такой наиболее общей задачей является задача оптимального управления, в исходной постановке представленная Л.С. Понтрягиным [1]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f, \\ J = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \rightarrow \min, \\ \mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^m, m \leq n, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор, описывающий состояние объекта управления,  $\mathbf{u}$  – управление,  $U$  – компактное множество,  $t_f$  – терминальное время, может быть не задано, но ограничено  $t_f \leq t^+$ ,  $t^+$  – заданная величина границы по времени.

В этой задаче (1) необходимо найти функцию управления:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(t) \in U, \quad (2)$$

такую, что если ее подставить в уравнения модели, то получится следующая система:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(t)), \quad (3)$$

и частное решение  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$  этой системы (3) из заданного начального состояния  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$  попадет в терминальное состояние  $\mathbf{x}(t_f, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^f$ ,  $t_f \leq t^+$  с оптимальным значением показателя критерия качества:

$$J = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0), \mathbf{v}(t)) dt = \min_{\mathbf{u} \in \bar{U}}. \quad (4)$$

В дальнейшем постановка задачи (1) видоизменялась. В нее были введены различные типы фазовых ограничений [2–4], такие как терминальные ограничение типа равенства [5], фазовые ограничения в виде неравенств [6], динамические фазовые ограничения в задачах управления для групп объектов [7], оптимальное управление системами при неопределенных воздействиях [8]. В любом случае задача оптимального управления всегда должна и может быть поставлена, когда необходимо найти управление для динамического объекта, который должен выполнять некоторые действия с заданным критерием качества. Различные задачи для роботов, как и любых других объектов управления, можно сформулировать как задачи оптимального управления, например, для нахождения оптимального пути в текущих реальных условиях, задачи предотвращения столкновений со статическими и динамическими препятствиями, задачи взаимодействия с другими объектами управления, задачи точного достижения заданных граничных условий и т.д.

Решению задачи машинно синтезированного управления с учетом практической ее реализации на объекте управления посвящена настоящая работа. На основании обзора существующих подходов к решению задачи оптимального управления и выявленных недостатков, в работе вводится свойство, которым должна обладать система оптимального управления, чтобы она могла быть реализуемой на объекте. В качестве практического метода решения задачи оптимального управления, обладающего введенным свойством, предложен метод синтезированного оптимального управления, который можно отнести к классу непрямых методов оптимального управления. Согласно методу, сначала в объект управления вводится система стабилизации, обеспечивающая объекту свойство устойчивости относительно некоторой точки равновесия. Далее оптимальное управление объектом реализуется через изменение положения точки равновесия. В работе представлена

математическая постановка описанного подхода и предложены алгоритмы реализации его этапов с помощью современных вычислительных методов машинного обучения. Использование машинных подходов для обучения систем управления [9] позволяет найти хорошее близкое к оптимальному решение за ограниченное время. Но в связи с новизной этих методов возникает необходимость обосновать результаты, полученные машинным обучением. В этой связи в статье введены несколько определений некоторых машинных свойств системы. В экспериментальной части работы приведен пример реализации метода синтезированного оптимального управления на задаче оптимального управления мобильным роботом.

**2. Обзор существующих подходов.** Среди общих подходов к решению задачи оптимального управления (1) выделяют два направления: прямой и непрямой методы. Непрямой подход, основанный на принципе максимума Понтрягина [10, 11], решает задачу оптимального управления, формулируя ее в виде краевой задачи, в которой необходимо найти начальные условия для системы дифференциальных уравнений для сопряженных переменных. Найденное оптимальное решение обладает высокой точностью, однако технология вычислительно сложна, особенно в части интегрирования системы сопряженных уравнений в виду отсутствия начальных условий для них, и обеспечения максимума Гамильтониана, что, очень трудно рассчитать, например, для задач со сложными фазовыми ограничениями. Прямой подход сводит задачу оптимального управления к задаче нелинейного программирования [12–14]. В итоге оба метода обеспечивают переход от задачи оптимизации в бесконечномерном пространстве к задаче оптимизации в конечномерном пространстве. Для таких задач на сегодняшний день уже разработаны различные оптимизационные алгоритмы, в том числе глобальной оптимизации [15–17], включая современные эволюционные и популяционные алгоритмы [18].

Однако в этих классических подходах к решению задачи оптимального управления обычно основное внимание уделяется характеристикам номинальной траектории без учета возможных неопределенностей. На практике же в правых частях моделей и в начальных условиях объективно присутствуют неопределённости различной природы. Как правило, они не учитываются, но наличие таких неопределенностей может привести как к потере оптимальности получаемого управления, так и к попаданию в целевое терминальное положение.

Существуют также подходы, когда влияние неопределенностей учитывается заранее при расчете опорной траектории [19]. Например, десенсibiliзованное оптимальное управление [20, 21] изменяет номинальную оптимальную траекторию таким образом, что она становится менее чувствительной к неопределенным параметрам путем добавления соответствующей стоимости за чувствительность. Но при реализации такие решения не гарантируют устойчивости и все равно требуют построения системы стабилизации в обратной связи.

При практическом проектировании систем управления существующие неопределенности, которые впоследствии вызывают расхождение между реальной траекторией объекта и полученной оптимальной, компенсируются синтезом системы стабилизации движения относительно оптимальной траектории [22, 23]. То есть введение управления с обратной связью в систему дифференциальных уравнений придает системе некоторое свойство, позволяющее достичь цели с оптимальным значением качества, то есть быть реализуемым.

Понятно, что не все системы управления реализуемы. Например, оптимальные, но разомкнутые системы управления не обладают свойством реализуемости. И наоборот, устойчивые по Ляпунову системы реализуемы. Однако, есть примеры, когда решение не является устойчивым по Ляпунову, но в то же время реализуемо. Например, при движении по точкам само движение к точке устойчиво по Ляпунову, а движение по траектории, состоящей из точек, не устойчиво по Ляпунову, но именно такой способ управления сейчас реализуется чаще всего. Таким образом, возникает необходимость сформулировать свойство, позволяющее определить реализуемость системы.

Согласно качественному анализу решений систем дифференциальных уравнений [24], реализуемость означает, что небольшие изменения в модели не приводят к потере качества. Другими словами, необходимо, чтобы решение обладало бы свойством сжимаемости.

**Определение 1.** *Частное решение  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$  дифференциального уравнения  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, t))$  обладает свойством сжимаемости, если для любого другого частного решения  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^*)$  выполняются следующие условия:*

*если:*

$$\|\mathbf{x}(t', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t', \mathbf{x}^*)\| \leq \sigma, \quad (5)$$

где  $t' > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,

тогда  $\alpha > 0$  такое, что для любого  $\varepsilon^+ > 0$ :

$$\|\mathbf{x}(t' + \alpha, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t' + \alpha, \mathbf{x}^*)\| \leq \varepsilon^+. \quad (6)$$

С математической точки зрения, вводя стабилизирующее управление по состоянию  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  в обратной связи, мы изменяем дифференциальные уравнения самой системы объекта так, что вокруг некоторого частного решения системы (вокруг оптимальной траектории) появляется некоторая область, такая, что другие траектории, попадающие в эту область, не покидали бы ее.

**Гипотеза.** Для того, чтобы найденная функция оптимального управления  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  обладала свойством реализуемости в реальном объекте управления, оптимальная траектория  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$  должна обладать свойством сжимаемости (5), (6).

Таким образом, для получения реализуемого решения задачи оптимального управления (1) необходимо построить такую функцию управления  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ , которая заставляет объект достигать заданной цели с оптимальным значением критерия качества и удовлетворяет требуемым свойствам (5), (6).

Технически выполнение свойств (5), (6) можно обеспечить за счет введения в обратную связь системы стабилизации. Например, система стабилизации вводится после построения оптимальной программной траектории, в [25] точки расставляются на траектории и объект стабилизируется в этих точках. Это наиболее популярный практический подход к проектированию оптимальной системы управления с обратной связью. Однако по критерию оптимальности такой подход не совсем корректен, так как получается, что оптимальная траектория рассчитывалась для одного объекта управления, а введенная система стабилизации меняет объект, так что расчетный путь может быть не оптимальным для измененного объекта. Кроме того, при приближении к заданной точке пути система замедляется, поэтому необходимо проводить дополнительные оценки в каждой конкретной задаче, по оптимальным моментам переключения точек.

Вполне корректно сначала ввести в обратную связь систему стабилизации и уже потом производить расчет оптимального управления для объекта с системой стабилизации. Именно такой принцип лежит в основе метода синтезированного оптимального управления на основе положения точки равновесия, представленного в работе. Приведем далее математическую формулировку подхода.

### 3. Метод синтезированного оптимального управления.

Основная идея подхода состоит в том, что ищется функция управления, при которой система дифференциальных уравнений, описывающих объект, всегда будет иметь устойчивую точку равновесия в пространстве состояний. При этом функция управления содержит параметры, влияющие на положение точки равновесия. Следовательно, управление объектом осуществляется за счет изменения положения точки равновесия, а именно оптимального их расположения на заданных интервалах.

Формально согласно методу реализуются последовательно решение двух задач [26]: задачи синтеза системы стабилизации и задачи оптимального расположения точек устойчивости, т.е. задачи параметрической оптимизации. Приведем их математические постановки.

Задана математическая модель объекта управления:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (7)$$

Задано множество начальных условий:

$$X_0 = \{\mathbf{x}^{0,1}, \dots, \mathbf{x}^{0,K}\}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{x}^{0,j} \in X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{x}^{0,i} - \mathbf{x}^{0,j}\| \leq \delta$ ,  $i, j \in \{1, \dots, K\}$ ,  $\delta$  – заданная величина, определяющая размер области  $X_0$  начальных условий.

Задано одно терминальное состояние:

$$\mathbf{x}^* = [x_1^* \dots x_n^*]^T. \quad (9)$$

Задан критерий качества:

$$J_1 = \sum_{i=1}^K (p_1 \|\mathbf{x}(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i}) - \mathbf{x}^*\| + t_{f,i}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}, \quad (10)$$

где  $p_1$  – весовой коэффициент,  $t_{f,i}$  – время достижения терминального состояния (9):

$$t_{f,i} = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+ \text{ и } \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,i}) - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon \\ t^+ & \text{иначе} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, K, \quad (11)$$

$\varepsilon$  и  $t^+$  – заданные положительные величины.

Для решения задачи синтеза системы стабилизации необходимо найти функцию управления в форме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \in U, \quad (12)$$

доставляющую минимум функционалу  $J_1$ .

В полученную функцию управления введем вектор параметров  $\mathbf{q}^*$ , влияющий на положение точки равновесия. Функция управления (12) обеспечивает системе:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}^*)), \quad (13)$$

существование точки равновесия:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{q}^*)) = 0, \quad (14)$$

где  $\mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*)$  – вектор координат точки равновесия, зависящий от вектора параметров  $\mathbf{q}^*$ . Система (13) удовлетворяет условиям (5), (6) в точке  $\mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*)$ .

На втором этапе решаем задачу оптимального управления как задачу конечномерной оптимизации вектора параметров  $\mathbf{q}^*$ . Математическая постановка задачи имеет следующее описание.

Задана модель объекта управления:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}^*)). \quad (15)$$

Возможные неопределенности, согласно теории устойчивости Ляпунова [27], можно рассматривать как неопределенности в начальных условиях. Поэтому задачу оптимального управления будем рассматривать не из одного начального состояния, как в классической постановке (1), а из области начальных значений.

Пусть задано следующее множество начальных значений:

$$\tilde{X}_0 = \{\mathbf{x}^{0,1}, \dots, \mathbf{x}^{0,j}, \dots, \mathbf{x}^{0,M}\}, \quad (16)$$

где  $M$  – заданное количество точек начальных значений.

Терминальное условие и критерий качества определены в исходной постановке задачи оптимального управления (1). С учетом найденной функции стабилизации (12), множества начальных значений (16) и с включением точности попадания в терминальное состояние в критерий качества, функционал для задачи оптимального управления положениями

точек равновесия имеет следующий вид:

$$J_2 = \sum_{i=1}^M \left( \| \mathbf{x}(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i}) - \mathbf{x}^f \| + \int_0^{t_{f,i}} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}^*)) dt \right) \rightarrow \min_{\mathbf{q}^* \in Q}, \quad (17)$$

где  $Q$  – компакт в пространстве параметров,  $t_{f,i}$  определяется из соотношения (11) с заменой  $\mathbf{x}^*$  на  $\mathbf{x}^f$ .

В общем случае вектором параметров  $\mathbf{q}^*$  может быть некоторая функция  $\mathbf{q}^*(t)$ . Свойства этой функции и методы ее нахождения требуют дополнительных исследований. В частном случае, управление  $\mathbf{q}^*$  можно рассматривать в форме кусочно-постоянной функции времени. Разбиваем временной отрезок  $[0; t^+]$  на равные интервалы  $\Delta t$ . Таким образом, в задаче оптимального управления необходимо найти значения координат точки устойчивости для каждого интервала через определение оптимального значения вектора параметров, доставляющее минимум функционалу качества  $J_2$ :

$$\mathbf{q}^*(t) = \mathbf{q}^{*,j}, \text{ если } t \in [(j-1)\Delta t; j\Delta t), \quad j = 1, \dots, N, \quad (18)$$

где  $N$  – количество интервалов,

$$N = \lfloor t^+ / \Delta t \rfloor + 1. \quad (19)$$

Таким образом, благодаря такому синтезированному подходу к решению задачи оптимального управления, мы, с одной стороны, обеспечиваем свойство реализуемости найденному управлению, и, с другой стороны, переводим задачу из класса задач бесконечномерной оптимизации к конечномерной, обеспечивая тем самым возможность применения для ее решения широкого набора численных методов оптимизации.

**4. Особенности применения машинных алгоритмов обучения систем управления.** В соответствии с представленной формальной постановкой метода синтезированного оптимального управления для его реализации потребуется применение методов синтеза систем управления и методов оптимизации.

В теории управления задача синтеза управления является одной из наиболее сложных. В подавляющем большинстве случаев задача синтеза управления решается аналитически или технически с учетом специфики математической модели. Сегодня для решения задачи синтеза для нелинейных динамических объектов различной сложности могут быть

применены современные численные методы машинного обучения [28]. Задача машинного обучения состоит в поиске неизвестной функции. В нашем случае неизвестной функцией является функция управления.

Новая парадигма машинного обучения систем управления [29] позволяет найти хорошее близкое к оптимальному решение за предельное время. Но в этой связи возникает необходимость обосновать результаты, полученные машинным обучением. Обобщая различные определения машинного обучения [30–32], можно сделать вывод, что машинное обучение – это неточное численное решение некоторой математической задачи оптимизации, то есть решение, полученное машинным обучением, отличается от точного на некоторую величину, но удовлетворяет исследователя, и его можно улучшить, продолжив обучение. Во всех случаях для машинного обучения используются различные алгоритмы оптимизации, но для этих алгоритмов достаточно найти близкое к оптимальному решение.

**Определение 2.** *Машинное обучение – это процесс поиска решения задачи оптимизации в  $\Delta$ -окрестности оптимального решения.*

Особенность машинного обучения в том, что обучение не требует достижения точного минимума показателя критерия:

$$J \leq \min J + \Delta, \quad (20)$$

где  $\Delta$  – некоторое положительное значение отклонения, определяющее значение функционала, достижимое при обучении.

Если в результате машинного обучения найденная функция управления должна приобрести некоторые свойства, то доказательство наличия этих свойств подтверждается моделированием и статистическим обобщением результатов моделирования:

$$\tilde{J} = \sum_{i=0}^K \vartheta(\phi(\alpha(\mathbf{x}^i, \mathbf{q}))), \quad (21)$$

где  $\vartheta(z)$  – функция Хевисайда:

$$\vartheta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (22)$$

$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{q})$  – условие, которое определяет, обладает ли функция этим свойством:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad (23)$$

$K$  – количество последовательных экспериментов, выполненных с удовлетворением (23), установленных для доказательства наличия свойства.

**Определение 3.** Если проводятся  $D$  экспериментов, и в каждом  $i$  эксперименте  $K_i$  частных решений дифференциального уравнения выполняют требуемое свойство из любых  $M_i \geq K_i$  случайно выбранных начальных условий из начальной области, и:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^D \frac{K_i}{M_i} \rightarrow 1, \quad (24)$$

существование этого свойства для дифференциального уравнения в этой области считаем машинно доказанным.

Введенные машинные интерпретации свойств объектов позволяют в дальнейшем решать сложные технические задачи машинными методами и проверять достижение требуемых свойств также на машинах.

**5. Машинное обучение систем управления на основе символьной регрессии.** Применение методов машинного обучения открывает широкие перспективы с точки зрения решения тех задач, которые раньше считались очень сложными или вообще трудно разрешимыми. Сегодня эти методы завоевывают все большую популярность у разработчиков. Например, мы наблюдаем широкое применение нейросетевых технологий, особенно в задачах распознавания [34, 35] или классификации [36, 37]. Здесь хорошую эффективность показали технологии, основанные на машинном обучении с учителем, когда есть достаточный набор обучающих данных и критерием обучения является уменьшение ошибки.

Однако при разработке систем управления у инженера обычно нет необходимого набора обучающих данных, разве что получать их при ручном управлении и аппроксимировать режимы управления, произведенные оператором. Но такой подход не сильно популярен, поскольку, во-первых, скорее всего не является оптимальным, а, во-вторых, для обучения все-таки требуется значительное количество обучающих примеров управления. В итоге при обучении оптимальной системы управления разработчик может опираться только на значение функционала качества. К методам машинного обучения без учителя,

которые показали свою эффективность для задач синтеза систем управления [33, 38], относятся методы символьной регрессии. Выгодная особенность этих методов состоит в том, что они позволяют искать не только оптимальные параметры функции управления, но и оптимальную структуру. Поиск структуры функции управления осуществляется на базе заданного алфавита элементарных функций. Методы символьной регрессии используют алгоритмы эволюционной оптимизации для структурно-параметрического поиска функции управления непосредственно на основе значения функционала качества.

**6. Пример решения задачи оптимального управления синтезированным методом для мобильного робота.** В качестве демонстрационного примера применения синтезированного оптимального управления рассмотрим задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями для мобильного робота с дифференциальным приводом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0.5(u_1 + u_2) \cos(x_3) \\ \dot{x}_2 &= 0.5(u_1 + u_2) \sin(x_3) \ , \\ \dot{x}_3 &= 0.5(u_1 - u_2) \end{aligned} \quad (25)$$

$$-10 = u_i^- \leq u_i \leq u_i^+ = 10, \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad (27)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f = [10 \ 10 \ 0]^T, \quad (28)$$

где:

$$t_f = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+, \text{ и } \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^f\| \leq \varepsilon = 0.01 \\ t^+ = 2.8, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (29)$$

Задан критерий качества по быстродействию, который включает также точность достижения терминального состояния и штраф за нарушение фазовых ограничений:

$$J_3 = t_f + p_1 \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}^f\| + p_2 \sum_{i=1}^L \int_0^{t_f} \vartheta(\phi_i(\mathbf{x})) dt \rightarrow \min_{\mathbf{u}} \quad (30)$$

где  $p_1 = 1, p_2 = 3$ ,

$$\vartheta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (31)$$

$$\phi_i(\mathbf{x}) = r_i - \sqrt{(x_1 - x_{1,i})^2 + (x_2 - x_{2,i})^2}, \quad i = 1, 2, \quad (32)$$

$r_1 = r_2 = 2, x_{1,1} = 4, x_{1,2} = 8, x_{2,1} = x_{2,2} = 5$ .

Для наглядности сравнения результатов, сначала решим задачу оптимального управления (25)–(32) прямым методом, аппроксимируя функцию управления кусочно-линейной функцией времени. Разобьем временной процесс управления  $[0; t^+] = [0; 2.8)$  на интервалы длиной  $\Delta t = 0.4$ , всего  $M = 7$  интервалов, и будем искать значение управления на границах интервалов. С учетом ограничений функция управления имеет следующий вид:

$$u_i = \begin{cases} u_i^- = -10, & \text{если } \tilde{u}_i \leq u_i^- \\ u_i^+ = -10, & \text{если } \tilde{u}_i \geq u_i^+ \\ \tilde{u}_i, & \text{иначе} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (33)$$

где

$$\tilde{u}_i = (q_{j+1+(i-1)2} - q_{j+(i-1)2}) \frac{t - j\Delta t}{\Delta t} + q_{j+(i-1)2}, \quad j = 1, \dots, 8. \quad (34)$$

Для поиска оптимальных значений параметров  $\tilde{\mathbf{q}} = [\tilde{q}_1 \dots \tilde{q}_{16}]^T$  был выбран эволюционный гибридный алгоритм [39], так как за счет фазовых ограничений функционал имеет невыпуклую форму, а значит градиентные методы могут не найти глобальный минимум. Эволюционные алгоритмы не требуют дифференцируемости функции, а также способны широко исследовать пространство поиска и находить глобальный минимум с большой вероятностью [18, 40].

В результате было получено следующее решение:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 11.67230 & 15.97750 & 15.04710 & 15.21120 \\ -0.96060 & -19.20990 & -6.49860 & 14.60860 \\ -3.24170 & 18.05050 & 9.92270 & 15.93800 \\ 4.21270 & 12.68960 & 0.19430 & -0.27080 \end{bmatrix}^T. \quad (35)$$

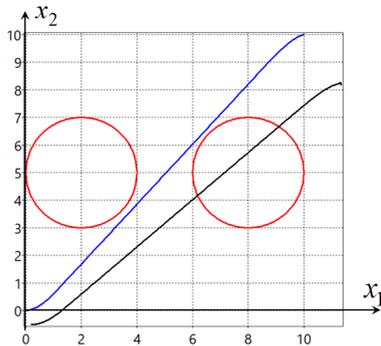


Рис. 1. Оптимальная и возмущенная траектории на плоскости для прямого метода решения задачи оптимального управления

Значение функционала для найденного решения (35) составило  $\tilde{J}_3 = 1.6749$ . Найденная оптимальная траектория представлена на рисунке 1 синим цветом.

Далее начальные условия (27) подвергались случайным возмущениям из диапазонов:

$$x_1(0) = x_1^0 \pm 0.8, \quad x_2(0) = x_2^0 \pm 0.8, \quad x_3(0) = x_3^0 \pm \pi/18. \quad (36)$$

При моделировании было установлено, что найденное оптимальное управление в результате возмущений существенно менялось, траектории нарушали фазовые ограничения, терминальное состояние не достигалось, в итоге значение функционала существенно возрастало. На рисунке 1 приведены синим цветом оптимальная и черным типичная возмущенная траектории на плоскости  $\{x_1; x_2\}$ , полученная для начальных значений:

$$\tilde{x} = [0.2 \quad -0.5 \quad -0.12]^T. \quad (37)$$

Красными окружностями обозначены фазовые ограничения. Значение функционала для возмущенного решения составило  $\tilde{J}_3 = 8.6665$ , т.е. возросло по сравнению с оптимальным более, чем в пять раз.

Решим эту же задачу методом синтезированного оптимального управления. Первоначально решим задачу синтеза управления для обеспечения устойчивости относительно точки в пространстве состояний. Для решения задачи используем машинное обучение методом сетевого оператора [41]. Базисная матрица сетевого оператора имела размерность



Полученное управление, в закодированной в виде матрицы сетевого оператора форме, может быть непосредственно в таком виде реализовано на борту объекта, для чего был разработан ROS-узел контроллера на языке C++ [42], который принимает на вход наземные координаты робота и цели, а на выходе формирует управляющие сигналы. На втором этапе находим оптимальные положения точек равновесия с учетом вариаций начальных условий (16). На каждом интервале ищем по три координаты точки устойчивости  $\mathbf{q}^{*,j} = [q_1^{*,j} \ q_2^{*,j} \ q_3^{*,j}]^T$ ,  $j = 1, \dots, 7$ . Всего необходимо найти 21 параметр. Для поиска используем тот же гибридный эволюционный алгоритм [39], что и для прямого решения задачи оптимального управления.

В результате вычислений гибридный эволюционный алгоритм нашел следующее решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{*,1} &= [2.48120 \ 0.74430 \ 0.10550]^T, \\ \mathbf{q}^{*,2} &= [3.79378 \ 0.34142 \ 0.82870]^T, \\ \mathbf{q}^{*,3} &= [6.26951 \ 3.18267 \ 0.74528]^T, \\ \mathbf{q}^{*,4} &= [5.92748 \ 3.09719 \ 1.66135]^T, \\ \mathbf{q}^{*,5} &= [7.23992 \ 6.03574 \ 1.04254]^T, \\ \mathbf{q}^{*,6} &= [8.22390 \ 7.03889 \ 1.40074]^T, \\ \mathbf{q}^{*,7} &= [10.02005 \ 8.83120 \ 0.50842]^T. \end{aligned} \quad (40)$$

Алгоритм запускался 10 раз. В результате вычислений наилучшее найденное решение имело значение функционала  $J_3^* = 2.8444$ , среднее значение всех прогонов равно  $J_3^* = 2.865471$ , а среднеквадратичное отклонение составило 0,009193.

Далее для найденного решения начальные состояния подвергались тем же возмущениям (36), что и в вычислительном эксперименте для прямого решения. Оптимальная траектория движения практически не изменялась и значение функционала также изменялось незначительно.

На рисунке 2 приведены найденные методом синтезированного оптимального управления оптимальная (синим цветом) и возмущенная (черным цветом) траектории движения робота на плоскости. Возмущенная траектория получена при тех же начальных значениях (37), что и возмущенная траектория прямого решения, приведенная на рисунке 1.

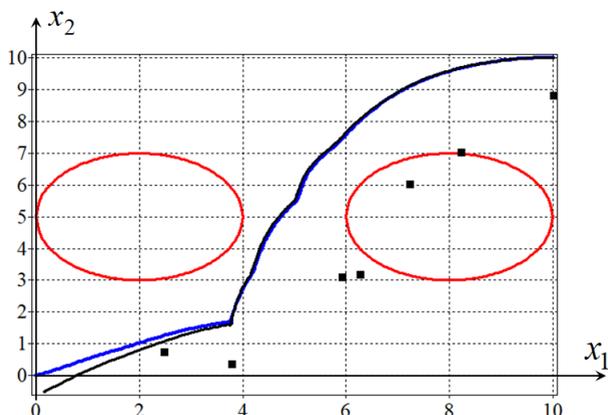


Рис. 2. Оптимальная и возмущенная траектории на плоскости при синтезированном оптимальном управлении

На рисунке малыми черными квадратами показаны проекции найденных оптимальных точек равновесия. Как видно из графиков, приведенных на рисунке 2, возмущенная и оптимальная траектории практически полностью совпадают. Значение функционала для возмущенного решения составило величину  $J_3^* = 2.8246$ .

**7. Заключение.** В представленном подходе машинно синтезированного управления на основе оптимального расположения точек равновесия возможные неопределенности компенсируются устойчивостью системы относительно точки равновесия в пространстве состояний. Вблизи точки равновесия все решения сжимаются, а значит выполняются введенные в работе дополнительные условия реализуемости оптимального управления. Этап синтеза системы стабилизации является ключевой идеей подхода, он обеспечивает достижение лучших результатов в задачах с неопределенностями, которые неизбежно существуют в реальных системах. Применение алгоритмов машинного обучения делают представленный подход универсальным и позволяют применять его к различным нелинейным моделям объектов и функционалам любой сложности.

### Литература

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York: Division of John Wiley and Sons Inc. 1962. 360 p.
2. Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints // SIAM Review. 1995. vol. 37. no. 2. pp. Informatics and Automation. 2023. Vol. 22 No. 1. ISSN 2713-3192 (print) 103  
ISSN 2713-3206 (online) www.ia.spcras.ru

- 181–218.
3. Dmitruk A.V. Maximum principle for the general optimal control problem with phase and regular mixed constraints // *Computational Mathematics and Modeling*. 1993. vol. 4. no. 4. pp. 364–377.
  4. Karamzin D., Antunes de Oliveira V., Lobo Pereira F.M., Nunes Silva G. Minimax optimal control problem with state constraints // *Eur. J. Control*. 2016. vol. 32. pp. 24–31.
  5. Schwarzkopf A.B. Optimal controls with equality state constraints // *J. Optim. Theory Appl.* 1976. vol. 19. pp. 455–468.
  6. Gao X., Zhang X., Wang Ya. A Simple Exact Penalty Function Method for Optimal Control Problem with Continuous Inequality Constraints // *Abstract and Applied Analysis*. 2014. vol. 2014. p. 12.
  7. Diveev A., Shmalko E. Optimal control design for a group of mobile robots with uncertainties // *Proceedings of the 15th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*. 2020. vol. 15. pp. 308–313.
  8. Sullivan T.J. *Introduction to Uncertainty Quantification*. Texts in Applied Mathematics. Springer, Cham. 2015. vol. 63. 356 p.
  9. Moe S., Rustad A.M., Hanssen K.G. *Machine Learning in Control Systems: An Overview of the State of the Art* // 38th SGAI International Conference on Artificial Intelligence (Eds.: Brauer M., Petridis M.). Springer, Cham. 2018.
  10. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Lobo Pereira F. Regular path-constrained time-optimal control problems in three-dimensional flow fields // *Eur. J. Control*. 2020. vol. 56. pp. 98–106.
  11. Arutyunov A., Karamzin D.A. Survey on Regularity Conditions for State-Constrained Optimal Control Problems and the Non-degenerate Maximum Principle // *J. Optim. Theory Appl.* 2020. vol. 184. 697–723.
  12. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. *Practical Optimization*. Academic Press: Cambridge. 1981. 402 p.
  13. Евтушенко Ю.Г. Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. М.: Научное издание ВЦ РАН. 2013.
  14. Betts J.T. Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization // *J. Guid. Control. Dyn.* 1998. vol. 21. pp. 193–207.
  15. Газизов Т.Т. *Методы глобальной оптимизации: учебное пособие*. Томск: В-Спектр. 2017.
  16. Amirkhanova G., Gorchakov A., Duysenbaeva A., Posypkin M. Multistart method with deterministic restart mechanism // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2020. vol. 16 (2). pp. 100–111.
  17. Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А. Варианты метода неравномерных покрытий для глобальной оптимизации частично-целочисленных нелинейных задач // *Докл. Академии наук*. 2011. Т. 437(2). С. 168–172.
  18. Карпенко А.П. *Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой: учебное пособие*. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014.
  19. Saunders B.R. *Optimal Trajectory Optimization under Uncertainty*. Massachusetts Institute of Technology. 2012.
  20. Seywald H., Kumar R. Desensitized Optimal Trajectories // *AIAA/AAS Spaceflight Mechanics Meeting*. 1996. vol. 96 (107). pp. 103–115. doi:10.2514/6.2019-0651.
  21. Makkapati V.R., Dor M., Tsiotras P. Trajectory desensitization in optimal control problems // *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. 2018. pp. 2478–2483.
- 104 Информатика и автоматизация. 2023. Том 22 № 1. ISSN 2713-3192 (печ.)  
ISSN 2713-3206 (онлайн) [www.ia.spcras.ru](http://www.ia.spcras.ru)

22. Zhou B., Shi Y. Prescribed-Time Stabilization of a Class of Nonlinear Systems by Linear Time-Varying Feedback // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2021. vol. 66. no. 12. pp. 6123-6130.
23. Chen C.C., Qian C., Sun Z.Y., Liang Y.W. Global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems with unknown measurement sensitivity // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2018. vol. 63. no. 7. pp. 2212-2217.
24. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука.1976.
25. Walsh G., Tilbury D., Sastry S., Murray R., Laumond J.P. Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1994. vol. 39. no. 1. pp. 216-222. doi: 10.1109/9.273373.
26. Diveev A.I., Shmalko E.Yu., Serebrenny V.V., Zentay P. Fundamentals of Synthesized Optimal Control // *Mathematics*. 2021. vol. 9(21). pp. 1-18.
27. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Изд. 4. URSS. 2017.
28. Diveev A., Shmalko E. *Machine Learning Control by Symbolic Regression*. Springer, Cham. 2021.
29. Duriez T., Brunton S.L., Noack B.R. *Machine Learning Control—Taming Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Springer: Switzerland. 2017.
30. Deisenroth M.P., Faisal A.A., Ong C.S. *Mathematics for Machine Learning*. Cambridge: Cambridge University Press. 2020.
31. Burkov A. *The Hundred-Page Machine Learning Book*. 2019. 160 p.
32. Geron A. *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems*. Sebastopol: O'Reilly Media Inc. 2019. 856 p.
33. Diveev A.I., Shmalko E.Y. Machine-Made Synthesis of Stabilization System by Modified Cartesian Genetic Programming // *IEEE Transactions on Cybernetics*. 2022. vol. 52. no. 7. pp. 6627-6637.
34. Savchenko A.V. Probabilistic Neural Network With Complex Exponential Activation Functions in Image Recognition // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2020. vol. 31. no. 2. pp. 651-660.
35. Zhang W., Wang J., Lan F. Dynamic hand gesture recognition based on short-term sampling neural networks // *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*. 2021. vol. 8. no. 1. pp. 110-120.
36. Xiao J., Jia Y., Jiang X., Wang S. Circular Complex-Valued GMDH-Type Neural Network for Real-Valued Classification Problems // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2020. vol. 31. no. 12. pp. 5285-5299.
37. Pelchat N., Gelowitz C.M. Neural Network Music Genre Classification // *Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering*. 2020. vol. 43. no. 3. pp. 170-173.
38. Shmalko E., Diveev A. Control Synthesis as Machine Learning Control by Symbolic Regression Methods // *Applied Sciences*. 2021. vol. 11. p. 5468. doi: 10.3390/app11125468.
39. Дивеев А.И. Гибридный эволюционный алгоритм для решения задачи оптимального управления // *Вопросы теории безопасности и устойчивости систем*. 2021. Т. 23. С. 3-12.
40. Дивеев А.И., Константинов С.В. Исследование практической сходимости эволюционных алгоритмов оптимального программного управления колесным роботом // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2018. Т. 57(4). С. 80-106.
41. Дивеев А.И. *Метод сетевого оператора*. М.: Изд-во ВЦ РАН. 2010.

42. Программный пакет расчета значений управляющих сигналов по матрице сетевого оператора [https://github.com/urock/network\\_operator](https://github.com/urock/network_operator).

**Шмалько Елизавета Юрьевна** — канд. техн. наук, старший научный сотрудник, отдел управления робототехническими устройствами, Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН); доцент, кафедра робототехнических систем и мехатроники, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Область научных интересов: современные вычислительные методы в управлении техническими устройствами, машинное обучение, методы символьной регрессии и эволюционные вычисления с приложениями для идентификации, оптимизации и синтеза систем управления. Число научных публикаций — 120. e.shmalko@gmail.com; улица Вавилова, 44/2, 119333, Москва, Россия; р.т.: +7(964)636-6669.

E.Yu. SHMALKO

**MACHINE-SYNTHESIZED CONTROL OF NONLINEAR DYNAMIC OBJECT BASED ON OPTIMAL POSITIONING OF EQUILIBRIUM POINTS**

*Shmalko E.Yu. Machine-Synthesized Control of Nonlinear Dynamic Object Based on Optimal Positioning of Equilibrium Points.*

**Abstract.** When solving an optimal control problem with both direct and indirect approaches, the main technique is to transfer the optimal control problem from the class of infinite-dimensional optimization to a finite-dimensional one. However, with all these approaches, the result is an open-loop program control that is sensitive to uncertainties, and for the implementation of which in a real object it is necessary to build a stabilization system. The introduction of the stabilization system changes the dynamics of the object, which means that the optimal control and the optimal trajectory should be calculated for the object already taking into account the stabilization system. As a result, it turns out that the initial optimal control problem is complex, and often the possibility of solving it is extremely dependent on the type of object and functionality, and if the object becomes more complex due to the introduction of a stabilization system, the complexity of the problem increases significantly and the application of classical approaches to solving the optimal control problem turns out to be time-consuming or impossible. In this paper, a synthesized optimal control method is proposed that implements the designated logic for developing optimal control systems, overcoming the computational complexity of the problem posed through the use of modern machine learning methods based on symbolic regression and evolutionary optimization algorithms. According to the approach, the object stabilization system is first built relative to some point, and then the position of this equilibrium point becomes a control parameter. Thus, it is possible to translate the infinite-dimensional optimization problem into a finite-dimensional optimization problem, namely, the optimal location of equilibrium points. The effectiveness of the approach is demonstrated by solving the problem of optimal control of a mobile robot.

**Keywords:** optimal control, equilibrium point, nonlinear object, machine learning, stabilization.

**References**

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York: Division of John Wiley and Sons Inc. 1962. 360 p.
2. Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. SIAM Review. 1995. vol. 37. no. 2. pp. 181–218.
3. Dmitruk A.V. Maximum principle for the general optimal control problem with phase and regular mixed constraints. Computational Mathematics and Modeling. 1993. vol. 4. no. 4. pp. 364–377.
4. Karamzin D., Antunes de Oliveira V., Lobo Pereira F.M., Nunes Silva G. Minimax optimal control problem with state constraints. Eur. J. Control. 2016. vol. 32. pp. 24–31.
5. Schwarzkopf A.B. Optimal controls with equality state constraints. J. Optim. Theory Appl. 1976. vol. 19. pp. 455–468.
6. Gao X., Zhang X., Wang Ya. A Simple Exact Penalty Function Method for Optimal Control Problem with Continuous Inequality Constraints. Abstract and Applied Analysis. 2014. vol. 2014. p. 12.

7. Diveev A., Shmalko E. Optimal control design for a group of mobile robots with uncertainties. Proceedings of the 15th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. 2020. vol. 15. pp. 308-313.
8. Sullivan T.J. Introduction to Uncertainty Quantification. Texts in Applied Mathematics. Springer, Cham. 2015. vol. 63. 356 p.
9. Moe S., Rustad A.M., Hanssen K.G. Machine Learning in Control Systems: An Overview of the State of the Art. 38th SGAI International Conference on Artificial Intelligence (Eds.: Bramer M., Petridis M.). Springer, Cham. 2018.
10. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Lobo Pereira F. Regular path-constrained time-optimal control problems in three-dimensional flow fields. Eur. J. Control. 2020. vol. 56. pp. 98–106.
11. Arutyunov A., Karamzin D.A. Survey on Regularity Conditions for State-Constrained Optimal Control Problems and the Non-degenerate Maximum Principle. J. Optim. Theory Appl. 2020. vol. 184. 697–723.
12. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. Practical Optimization. Academic Press: Cambridge. 1981. 402 p.
13. Evtushenko Y.G. Optimizatsiya i bystroe avtomaticheskoe differencirovanie [Optimization and fast automatic differentiation]. M.: Nauchnoe izdanie VC RAN, 2013. (In Russ.).
14. Betts J.T. Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization. J. Guid. Control. Dyn. 1998. vol. 21. pp. 193–207.
15. Gazizov T.T. Metody global'noy optimizatsii: uchebnoye posobiye [Methods of global optimization: tutorial]. Tomsk: V-Spektr, 2017. (In Russ.).
16. Amirkhanova G., Gorchakov A., Duysenbaeva A., Posypkin M. Multistart method with deterministic restart mechanism. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2020. vol. 16 (2). pp. 100-111.
17. Yevtushenko Yu.G., Posypkin M.A. [Variants of the method of non-uniform coverings for global optimization of partial-integer nonlinear problems] Dokl. Akademii nauk – Reports of the Academy of Sciences. 2011. vol. 437. no. 2. pp. 168–172. (In Russ.).
18. Karpenko A.P. Sovremennyye algoritmy poiskovoy optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennyye prirodoy: uchebnoye posobiye [Modern search engine optimization algorithms. Algorithms inspired by nature: textbook]. M.: Izdatel'stvo MGTU im. N.E. Baumana. 2014. (In Russ.).
19. Saunders B.R. Optimal Trajectory Optimization under Uncertainty. Massachusetts Institute of Technology. 2012.
20. Seywald H., Kumar R. Desensitized Optimal Trajectories // AIAA/AAS Spaceflight Mechanics Meeting. 1996. vol. 96 (107). pp. 103-115. doi:10.2514/6.2019-0651.
21. Makkapati V.R., Dor M., Tsiotras P. Trajectory desensitization in optimal control problems. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 2018. pp. 2478–2483.
22. Zhou B., Shi Y. Prescribed-Time Stabilization of a Class of Nonlinear Systems by Linear Time-Varying Feedback. IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. vol. 66. no. 12. pp. 6123-6130.
23. Chen C.C., Qian C., Sun Z.Y., Liang Y.W. Global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems with unknown measurement sensitivity. IEEE Trans. Autom. Control. 2018. vol. 63. no. 7. pp. 2212-2217.
24. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. M.: Nauka, 1976.
25. Walsh G., Tilbury D., Sastry S., Murray R., Laumond J.P. Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints. IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. vol. 39. no. 1. pp. 216-222. doi:10.1109/9.273373.
26. Diveev A.I., Shmalko E.Yu., Serebrenny V.V., Zentay P. Fundamentals of Synthesized Optimal Control. Mathematics. 2021. vol. 9(21). pp. 1-18.

27. Malkin I.G. Teoriya ustoychivosti dvizheniya [Theory of motion stability.] Izd. 4. URSS. 2017. (In Russ.).
28. Diveev A., Shmalko E. Machine Learning Control by Symbolic Regression. Springer, Cham. 2021.
29. Duriez T., Brunton S.L., Noack B.R. Machine Learning Control – Taming Nonlinear Dynamics and Turbulence. Springer: Switzerland. 2017.
30. Deisenroth M.P., Faisal A.A., Ong C.S. Mathematics for Machine Learning. Cambridge: Cambridge University Press. 2020.
31. Burkov A. The Hundred-Page Machine Learning Book. 2019. 160 p.
32. Geron A. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems. Sebastopol: O'Reilly Media Inc., 2019. 856 p.
33. Diveev A.I., Shmalko E.Y. Machine-Made Synthesis of Stabilization System by Modified Cartesian Genetic Programming. IEEE Transactions on Cybernetics. 2022. vol. 52. no. 7. pp. 6627-6637.
34. Savchenko A.V. Probabilistic Neural Network With Complex Exponential Activation Functions in Image Recognition. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2020. vol. 31. no. 2. pp. 651-660.
35. Zhang W., Wang J., Lan F. Dynamic hand gesture recognition based on short-term sampling neural networks . IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica. 2021. vol. 8. no. 1. pp. 110-120.
36. Xiao J., Jia Y., Jiang X., Wang S. Circular Complex-Valued GMDH-Type Neural Network for Real-Valued Classification Problems. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2020. vol. 31. no. 12. pp. 5285-5299.
37. Pelchat N., Gelowitz C.M. Neural Network Music Genre Classification. Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering. 2020. vol. 43. no. 3. pp. 170-173.
38. Shmalko E., Diveev A. Control Synthesis as Machine Learning Control by Symbolic Regression Methods. Applied Sciences. 2021. vol. 11. p. 5468. doi: 10.3390/app11125468.
39. Diveev A.I. Hybrid evolutionary algorithm for solving the problem of optimal control. Voprosy teorii bezopasnosti i ustoychivosti sistem [Questions of the theory of safety and stability of systems]. 2021. vol. 23. p. 3-12. (In Russ.).
40. Diveev A.I., Konstantinov S.V. Study of the Practical Convergence of Evolutionary Algorithms for the Optimal Program Control of a Wheeled Robot. Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija – Journal of Computer and Systems Sciences International. 2018. vol. 57. no. 4. pp. 80-106.
41. Diveev A.I. Metod setevogo operatora [Network operator method]. M.: Izd-vo VTS RAN, 2010. (In Russ.).
42. Programmnyj paket rascheta znachenij upravljajushhih signalov po matrice setevogo operatora [Software package for calculating the values of control signals by the network operator matrix]. Available at: [https://github.com/urock/network\\_operator](https://github.com/urock/network_operator). (accessed 26.11.2022). (In Russ.).

**Shmalko Elizabeth** — Ph.D., Senior researcher, Department of robotic control, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS); Associate professor, department of robotic systems and mechatronics, Bauman Moscow State Technical University (BMSTU). Research interests: modern computational methods in control of technical systems, symbolic regression methods and evolutionary computation with applications for identification, optimization and synthesis of control systems. The number of publications — 120. e.shmalko@gmail.com; 44/2, Vavilova St., 119333, Moscow, Russia; office phone: +7(964)636-6669.