УДК 004.8

А.В. Сироткин, А.Л. Тулупьев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗНАНИЙ И РАССУЖДЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ: МАТРИЧНО-ВЕКТОРНАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЛОКАЛЬНОГО СИНТЕЗА СОГЛАСОВАННЫХ ОЦЕНОК ИСТИННОСТИ

Сироткин А.В., Тулупьев А.Л. **Моделирование знаний и рассуждений в условиях неопределенности: матрично-векторная формализация локального синтеза согласованных оценок истинности.**
Аннотация. В теории алгебраических байесовских сетей к локальному синтезу согласованных оценок истинности относятся четыре операции: проверка непротиворечивости фрагмента знаний, поддержание непротиворечивости фрагмента знаний, формирование фрагмента знаний с накрывающими непротиворечивыми оценками, а также априорный вывод во фрагменте знаний. В статье предложена формализация модели фрагмента знаний, представляющего собой идеал конъюнктов со скалярными или интервальными оценками истинности на матрично-векторном языке; кроме того, использование этого языка позволило свести операции локального синтеза к вычислению матрично-векторных выражений или к решению задач линейного программирования, ограничения и целевая функция которых записаны в виде матрично-векторных уравнений, неравенств или выражений.
Ключевые слова: знания с неопределенностью, рассуждения в условиях неопределенности, моделирование рассуждений, алгебраические байесовские сети, идеал конъюнктов, вероятностная логика.

Sirotkin A.V., Tulupyev A.L. **Knowledge and reasoning with uncertainty modeling: matrix-and-vector calculus for local reconciliation of truth estimates.**
Abstract. In the theory of algebraic Bayesian networks, there are four operations classified as a kind of local synthesis of consistent truth estimates: knowledge pattern consistency verification, knowledge pattern reconciliation, *á posteriori* inference, and knowledge pattern enclosing reconciliation. The paper presents a knowledge pattern model formalization based on the matrix-vector terms. The model itself is a conjuncts ideal with scalar or interval truth probabilistic estimates. A specification of all four operations of the local synthesis has been introduced in the matrix-vector terms.
Keywords: knowledge with uncertainty, reasoning with uncertainty, reasoning modeling, algebraic Bayesian network, conjunct ideal, probabilistic logic.

1. Введение. Одной из классических ключевых проблем искусственного интеллекта является представление знаний с неопределенностью, а также воспроизведение (в каком-то смысле) рассуждений с использованием таких знаний. Для каждого подхода к формализации знаний с неопределенностью указанная проблема получает свою интерпретацию, причем уже в рамках такой интерпретации ведется поиск требующихся решений. Это справедливо и для исследований в области вероятностных графических моделей [1,6–12,16,18,31–33,37–40], одним из видов которых являются алгебраические байесовские сети (АБС).

В теории алгебраических байесовских сетей предполагается, что система знаний о предметной области допускает декомпозицию, то есть, может быть представлена как совокупность фрагментов знаний (ФЗ) [9–11, 16, 18]. При этом математической моделью фрагмента знаний выступает идеал конъюнктов со скалярными или интервальными оценками истинности. Более точно указанную модель можно охарактеризовать как логико-вероятностную. На основе набора моделей фрагментов знаний строится алгебраическая байесовская сеть, которая, в свою очередь, является логико-вероятностной графической моделью исходной системы знаний с неопределенностью.

При таком подходе моделирование рассуждений во фрагменте знаний (иначе говоря, моделирование локальных рассуждений) сводится к синтезу согласованных оценок истинности во фрагменте знаний (соответственно к локальному синтезу согласованных оценок истинности). В рамках локального синтеза согласованных оценок истинности можно выделить четыре тесно связанные операции: проверка непротиворечивости фрагмента знаний, поддержание непротиворечивости фрагмента знаний, априорный вывод во фрагменте знаний, формирование фрагмента знаний с «минимальными» непротиворечивыми накрывающими оценками (по отношению к некоторому набору исходных оценок истинности) — поддержание накрывающей непротиворечивости. Все эти операции также называются локальными [13, 16, 18].

Отметим, что поступление и последующую обработку дополнительных сведений — свидетельств, которые в теории алгебраических байесовских сетей могут быть детерминированными, стохастическим и неточными — можно рассмотреть как моделирование специфического класса рассуждений, отражающих влияние свидетельства на степень уверенности (вероятность истинности) утверждений из фрагмента знаний. В данном случае моделирование влияния свидетельства осуществляется за счет локального апостериорного вывода. Отметим, что хотя он не относится непосредственно к тематике настоящей работы, рассматриваемый в ней подход к формализации (на матрично-векторном языке) моделей и операций с ними успешно развивается и для локального апостериорного вывода [2,4,5,12,13,15,17,18].

В статье модель фрагмента знаний (далее — фрагмент знаний) представляется с помощью матрично-векторной нотации, а *целью* является формализация на основе указанной нотации моделирования рассуждений во фрагменте знаний (то есть, операций локального синтеза согласованных оценок истинности), что представляет собой уточнение и обобщение результатов серии предшествующих работ [1,3–5,11–14,16,18].

2. Базовые объекты и индексация. Пусть задан алфавит — конечное множество атомарных пропозициональных формул (атомов) — $A = \{x_i\}_{i=0}^{n-1}$. Нумерация ведется с нуля. Определим над алфавитом два ключевых для дальнейшего изложения набора пропозициональных формул.

Определение 1. *Конъюнкт (цепочка конъюнкций) — это конъюнкция некоторого числа атомарных переменных вида*

$$x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}.$$

Определение 2. *Идеал конъюнктов (идеал цепочек конъюнкций) — это множество вида*

$$\{x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_k} | 0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n-1,\ 0 \leq k \leq n\}.$$

Идеал конъюнктов над алфавитом A обозначим C_A.

Замечание 1. *Будем опускать знак конъюнкции, тогда обобщённая форма конъюнкта из определения 1 запишется как*

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

Каждому из конъюнктов вида $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ сопоставим число

$$2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_k} -$$

индекс (*номер*) конъюнкта. В двоичной записи полученного числа переменная x_i будет входить в конъюнкт тогда и только тогда, когда i-тый бит номера будет равен единице (биты нумеруются начиная с младшего разряда, который индексируется как нулевой).

Пример 1. *Пример индексации конъюнктов. Пусть задан алфавит* $A = x_0, x_1, x_2, x_3$*, тогда конъюнктам будут сопоставляться следующие индексы:* $x_0 - 2^0 = 1 = 1_2$*,* $x_3 - 2^3 = 8 = 1000_2$*,* $x_3x_2x_0 - 2^3 + 2^2 + 2^0 + = 13 = 1101_2$*.*

Замечание 2. *Двоичную запись числа можно рассмотреть как вектор, состоящий из нулей и единиц; тогда индекс конъюнкта — это его характеристический вектор:* x_i *входит в конъюнкт тогда и только тогда, когда в характеристическом векторе на* i*-той позиции находится единица.*

Определение 3. *Литерал (аргументное место)* $\tilde{x}_i$ *обозначает, что на его месте в формуле может стоять либо* x_i*, либо его отрицание* $\bar{x}_i$*.*

Определение 4. *Квант над алфавитом* $A = \{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ *— это конъюнкция, которая для любого атома алфавита содержит либо этот атом, либо его отрицание.*

Определение 5. *Множество квантов над алфавитом* $A = \{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ *—*

$$Q = \{\tilde{x}_0\tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_{n-1}\}.$$

Для нумерации квантов мы воспользуемся способом, аналогичным нумерации конъюнктов. Выделим «положительную» часть кванта (множество положительно означенных переменных) и рассмотрим ее как конъюнкт. Номер этого конъюнкта и будет номером рассматриваемого кванта. Таким образом, единице в двоичной записи номера соответствует положительное вхождение переменной, а нулю — отрицательное, при этом рассматриваются все n бит (с учётом лидирующих нулей).

Пример 2. *Пример индексации квантов. Пусть задан алфавит* $A = x_0, x_1, x_2, x_3$*, тогда квантам будут сопоставляться следующие индексы:* $\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0 - 2^0 = 1 = 1_2$*,* $x_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 - 2^3 = 8 = 1000_2$*,* $x_3x_2\bar{x}_1x_0 - 2^3 + 2^2 + 2^0 + = 13 = 1101_2$ *и так далее.*

После введения нумерации (индексации) квантов и конъюнктов можно сформировать векторы вероятностей квантов и конъюнктов следующим образом:

$$\mathbf{P_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ p(c_1) \\ \vdots \\ p(c_{2^n-1}) \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{P_q} = \begin{pmatrix} p(q_0) \\ p(q_1) \\ \vdots \\ p(q_{2^n-1}) \end{pmatrix} \text{ соответственно,}$$

где c_i — i-тый конъюнкт, а q_i — i-тый квант. Появление единицы в первом случае вполне оправдано, так как согласно определению c_0 — пустой конъюнкт, соответствующий тождественной истине.

3. Оценки вероятностей над пропозициями. В основе способа введения вероятности над пропозициональными формулами, используемого в работе, лежат работы профессора Н. Нильссона [34–36], существенно развитые Хальперном, Фейгином и Мегиддо [26–30]. Обратим внимание на то, что в своё время Дж. Буль не только успешно занимался алгебраизацией логики, но также и рассматривал возможность обработки вероятности истинности пропозициональных формул [19]. В развитие вероятностной логики и в дискуссии о ней многие учёные внесли свой вклад [20–25, 41, 42].

Будем использовать обозначения и определения, сложившиеся в [3–6, 11–18]

Заметим, что множество квантов выступает как множество элементарных событий. Определение вероятности на элементах множества Q потребует следующих ограничений:

$$\mathbf{P_q} \geqslant \mathbf{0}; \tag{1}$$

$$(\mathbf{1}, \mathbf{P_q}) = 1. \tag{2}$$

Замечание 3. *В этих и последующих формулах полужирные символы* $\mathbf{0}$ *и* $\mathbf{1}$ *следует трактовать как векторы подходящей размерности, состоящие из 0 и 1 соответственно. В большинстве случаев, как и в приведённом выше, размерность векторов* 2^n.

В монографии [16] показано, что через вероятности конъюнктов, как и через вероятности квантов, можно выразить вероятность любой пропозициональной формулы. Переход между этими двумя «базисами» можно выразить следующей формулой:

$$\mathbf{P_q} = \mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c}. \tag{3}$$

При этом ограничения (1)–(2) принимают вид:

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c} \geqslant \mathbf{0}. \tag{4}$$

В формулах 3 и 4 n — число атомов, а матрица $\mathbf{I}_n$ — матрица перехода от вероятностей квантов к вероятностям конъюнктов. Заметим, что если вычислить вероятности квантов на основе вероятностей конъюнктов, удовлетворяющих условию (4), то условия (1)–(2) будут выполнены автоматически [16].

Определение 6. *Ограничения, накладываемые условием (4) на вектор $\mathbf{P_c}$, мы будем называть ограничениями, вытекающими из аксиоматики теории вероятностей, и обозначать $\mathcal{E}$.*

Матрица $\mathbf{I}_n$ имеет ярко выраженную регулярную структуру [11, 16], которую удобнее всего описать рекуррентно.

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_{n-1} = \mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_1^{[n-1]} = \mathbf{I}_1^{[n]};$$

например,

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\otimes$ означает кронекерово (тензорное) произведение матриц [11, 18]. Таким образом, $\mathbf{I}_n$ является кронекеровой степенью матрицы $\mathbf{I}_1$, то есть $\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_1^{[n]}$. Кроме рассмотренной матрицы $\mathbf{I}_n$, будет использоваться и обратная ей — $\mathbf{J}_n$, удовлетворяющая условию [11, 18]:

$$\mathbf{P_c} = \mathbf{J}_n \times \mathbf{P_q}. \tag{5}$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_n = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_{n-1} = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_1^{[n-1]} = \mathbf{J}_1^{[n]};$$

$$J_2 = J_1 \otimes J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Фрагмент знаний АБС. Определим математическую модель фрагмента знаний, которая используется в теории АБС.

Определение 7. Фрагмент знаний (ФЗ) со скалярными оценками — *это пара вида* (C, p), *где* C — *это идеал конъюнктов, а* p — *функция из* C *в интервал* $[0;1]$. *Вслед за [16] фрагмент знания мы будем обозначать* $\mathcal{C}$.

Функция p претендует на то, чтобы быть вероятностью истинности пропозиций. Таким образом, ФЗ со скалярными оценками истинности — это идеал конъюнктов со скалярными оценками вероятностей истинности каждого элемента этого идеала.

Определение 8. Фрагмент знаний с интервальными оценками — *это структура вида* $(C, \mathbf{p})$, *где* C — *идеал конъюнктов, а* $\mathbf{p}$ — *функция из* C *в множество интервалов вида*

$$\{[a;b] : a, b \in [0;1], a \leq b\}.$$

Покажем, как соотносятся определения 7 и 8. Предположим, что в соответствии с определением 7 задана функция $p : C \longrightarrow [0;1]$. Тогда можно определить интервальнозначную функцию $\mathbf{p}$ следующим равенством:

$$\forall c \in C \ \mathbf{p}(c) = [p(c); p(c)].$$

Таким образом, ФЗ со скалярными оценками (C, p) можно отождествить с ФЗ с интервальными оценками $(C, \mathbf{p})$.

Объясним смысл этой интервальнозначной функции. Фрагмент знаний задаёт семейство распределений вероятности истинности над входящими в него конъюнктами, где данные интервалы рассматриваются как допустимые множества значений для соответствующих распределений.

Идеал, над которым введена структура фрагмента знаний, мы будем называть *носителем* этого фрагмента знаний.

Определение 9. *Пусть* $\mathbf{P}$ *— произвольный вектор, а* i *— целое, тогда запись* $\mathbf{P}[i]$ *обозначает* i*-тую компоненту вектора* $\mathbf{P}$*. При этом нумерация (индексация) элементов вектора ведётся сверху с нуля. То есть*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}[0] \\ \mathbf{P}[1] \\ \mathbf{P}[2] \\ \vdots \\ \mathbf{P}[2^n - 1] \end{pmatrix}.$$

Замечание 4. *Поскольку на элементах идеала конъюнктов* C *с помощью индексации определён порядок, зададим функцию* p *с помощью вектора* $\mathbf{P_c}$*:* $\mathbf{P_c}[i] = p(c_i)$*, где* c_i *— конъюнкт из* C *с индексом* i*. Тогда ФЗ со скалярными оценками может быть задан как* $(C, \mathbf{P_c})$.

Замечание 5. *Аналогичным образом можно определить векторы* $\mathbf{P_c^-}$ *и* $\mathbf{P_c^+}$ *такие, что*

$$p(c_i) = [\mathbf{P_c^-}[i], \mathbf{P_c^+}[i]].$$

В таком случае фрагмент знаний с интервальными оценками может быть задан как $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$.

5. Непротиворечивость фрагмента знаний. Введенные обозначения позволяют подойти к формированию критерия непротиворечивости фрагмента знаний на матрично-векторном языке.

Определение 10. *Пусть задан фрагмент знаний со скалярными оценками* (C, p)*. Мы говорим, что он непротиворечив, и обозначаем это как* $\mathrm{Consistent}\,[(C, p)]$ *тогда и только тогда, когда существует вероятность* p_F*, заданная над множеством пропозициональных формул* $F(A)$*, такая что*

$$\forall c \in C \quad p_F(c) = p(c).$$

Определение 11. *Пусть задан фрагмент знаний с интервальными оценками* $(C, \mathbf{p})$*. Мы говорим, что он непротиворечив (согласован), и обозначаем это как* Consistent $[(C, \mathbf{p})]$ *тогда и только тогда, когда для любого конъюнкта* $c \in C$ *и любого* $\varepsilon \in \mathbf{p}(c)$ *найдётся функция* $p_{c,\varepsilon} : C \to [0;1]$ *такая, что* $p_{c,\varepsilon}(c) = \varepsilon$ *и* $(C, p_{c,\varepsilon})$ *— непротиворечивый в смысле определения 10. То есть:*

$$\begin{aligned}\text{Consistent}\,[(C, \mathbf{p})] \quad \Leftrightarrow \quad & \forall c \in C \forall \varepsilon \in \mathbf{p}(c) \exists p_{c,\varepsilon} : C \to [0;1] : \\ & (p_{c,\varepsilon}(c) = \varepsilon) \& (\text{Consistent}\,[(C, p_{c,\varepsilon})])\end{aligned}$$

Определение 12. *Пусть задан фрагмент знаний с интервальными оценками* $(C, \mathbf{p})$*. Мы говорим, что он* согласуем *тогда и только тогда, когда существует непротиворечивый (согласованный) фрагмент знаний с интервальными оценками* $(C, \mathbf{p}')$*, такой, что*

$$\forall c \in C \quad \mathbf{p}'(c) \subseteq \mathbf{p}(c).$$

Теорема 1. *Пусть задан ФЗ со скалярными оценками* $(C, \mathbf{P_c})$*, тогда для проверки его непротиворечивости достаточно проверить, что вектор оценок* $\mathbf{P_c}$ *удовлетворяет ограничениям (4).*

Доказательство. Рассмотрим задаваемый фрагментом знаний вектор $\mathbf{P_c}$, удовлетворяющий условиям (4). Рассмотрим вектор $\mathbf{P_q}$, вычисленный по формуле (3). Как показано выше, вектор $\mathbf{P_q}$, будет удовлетворять ограничениям (1) и (2). На множестве квантов Q определим функцию p_0 следующим образом:

$$\forall i : \quad 0 \leq i \leq 2^n - 1 \quad p_0(q_i) = \mathbf{P_q}[i].$$

Эта функция будет удовлетворять условиям (1) и (2), а следовательно, ее можно достроить до функции p_F — распределения вероятностей на пространстве пропозициональных формул F [18]. Сужение этой функции на множество конъюнктов, по построению, совпадает с оценками, заданными на фрагменте знаний. Следовательно, исходный фрагмент знаний непротиворечив согласно определению 10. Проведя все выкладки в обратном порядке, мы получаем, что если ФЗ непротиворечив согласно определению 10, то вектор $\mathbf{P_c}$ будет удовлетворять условиям (4) [16]. □

После того как мы доказали теорему 1, можно сформулировать три предыдущие определения на матрично-векторном языке.

Определение 13. *Пусть задан фрагмент знаний со скалярными оценками* $(C, \mathbf{P_c})$. *Мы говорим что он непротиворечив тогда и только тогда когда*

$$\mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c} \geqslant \mathbf{0}.$$

Определение 14. *Пусть задан фрагмент знаний с интервальными оценками* $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$. *Мы говорим, что он непротиворечив тогда и только тогда, когда*

$$\forall i : 1 \leq i \leq 2^n - 1\ \forall \varepsilon : \mathbf{P_c^-}[i] \leq \varepsilon \leq \mathbf{P_c^+}[i] \quad \exists \mathbf{P_c} : \\ \left(\mathbf{P}^- \leq \mathbf{P_c} \leq \mathbf{P_c^+}\right) \& \left(\mathbf{P_c}[i] = \varepsilon\right) \& \left(\mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c} \geqslant \mathbf{0}\right).$$

Определение 15. *Пусть задан фрагмент знаний с интервальными оценками* $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$. *Мы говорим, что он согласуем тогда и только тогда, когда существует непротиворечивый фрагмент знаний с интервальными оценками* $(C, \mathbf{P}^-, \mathbf{P}^+)$, *такой, что* $\mathbf{P_c^-} \leq \mathbf{P}^-$ *и* $\mathbf{P}^+ \leq \mathbf{P_c^+}$.

Если задан фрагмент знаний со скалярными оценками, то для проверки его непротиворечивости достаточно воспользоваться определением 13 и проверить, выполняется ли векторное неравенство. Перейдём теперь к рассмотрению ФЗ с интервальными оценками. Возникает вопрос — непротиворечив (согласован) ли ФЗ согласно определению 14, а если он не непротиворечив (не согласован), то согласуем ли он по определению 15.

Пусть задан ФЗ с интервальными оценками $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$. Рассмотрим вектор скалярных оценок истинности — $\mathbf{P_c}$. Для вектора $\mathbf{P_c}$ мы уже определили ограничения $\mathcal{E}$, вытекающие из аксиоматики теории вероятностей (см. определение 6). Определим ещё один вид ограничений.

Определение 16. *Пусть задан ФЗ с интервальными оценками истинности* $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$, *тогда ограничения, накладываемые формулой*

$$\mathbf{P_c^-} \leq \mathbf{P_c} \leq \mathbf{P_c^+} \tag{6}$$

на вектор $\mathbf{P_c}$, *мы будем называть ограничениями, вытекающими из предметной области, и обозначать* $\mathcal{D}$.

Лемма 1. *Пусть задан непротиворечивый фрагмент знаний со скалярными оценками* $(C, \mathbf{P_c})$, *тогда фрагмент знаний с интервальными оценками, заданный как* $(C, \mathbf{P_c}, \mathbf{P_c})$, *тоже непротиворечив.*

Доказательство. По определению 11 достаточно проверить, что каждая скалярная оценка каждого конъюнкта может быть реализована. Но вектор $\mathbf{P_c}$ реализует все допустимые скалярные оценки конъюнктов одновременно. При этом по предложению 1 $\mathbf{P_c}$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{I_n} \times \mathbf{P_c} \geqslant \mathbf{0},$$

а, следовательно, $(C, \mathbf{P_c}, \mathbf{P_c})$ — непротиворечив. □

Предложение 1. *Пусть задан ФЗ с интервальными оценками* $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$. *Он согласуемый, если существует вектор* $\mathbf{P_c}$, *удовлетворяющий условиям* $\mathcal{D}$ *и* $\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть существует вектор $\mathbf{P_c}$, удовлетворяющий условиям $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$. Рассмотрим фрагмент знаний со скалярными оценками $(C, \mathbf{P_c})$. Он непротиворечив, так как вектор $\mathbf{P_c}$ удовлетворяет условиям $\mathcal{E}$. По лемме 1 $(C, \mathbf{P_c}, \mathbf{P_c})$ — непротиворечив. Но из условия $\mathcal{D}$ следует, что ФЗ $(C, \mathbf{P_c}, \mathbf{P_c})$ содержится в $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$, а, следовательно, $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$ — согласуемый. □

Теорема 2. *Пусть* $(C, \mathbf{P_c^-}, \mathbf{P_c^+})$ *— согласуемый ФЗ. Тогда ФЗ* $(C, \mathbf{P^-}, \mathbf{P^+})$, *построенный по следующей формуле:*

$$\mathbf{P}^-[i] = \min_{\mathcal{D}\cup\mathcal{E}}\{\mathbf{P_c}[i]\}, \quad \mathbf{P}^+[i] = \max_{\mathcal{D}\cup\mathcal{E}}\{\mathbf{P_c}[i]\}, \quad 1 \le i \le 2^n - 1 \qquad (7)$$

будет непротиворечив.

Доказательство. Рассмотрим и зафиксируем произвольный индекс i:

$$1 \le i \le 2^n - 1$$

и покажем, что для любого ε:

$$\mathbf{P}^-[i] \le \varepsilon \le \mathbf{P}^-[i]$$

существует вектор $\mathbf{P_c}$ такой, что $\mathbf{P_c}[i] = \varepsilon$, и

$$\mathbf{P}^- \leq \mathbf{P_c} \leq \mathbf{P}^+.$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{P}^{\min}$, на котором реализуется $\min\limits_{\mathcal{D}\cup\mathcal{E}}\{\mathbf{P_c}[i]\}$. В качестве такого вектора, можно рассмотреть любой вектор, для которого выполняются условия: $\mathbf{P_c}^- \leq \mathbf{P}^{\min} \leq \mathbf{P_c}^+$ и $\mathbf{P}^{\min}[i] = \mathbf{P}^-[i]$. Такой вектор заведомо существует, иначе задача линейного программирования $\min\limits_{\mathcal{D}\cup\mathcal{E}}\{\mathbf{P_c}[i]\}$ не имела бы решения. Более того, для вектора $\mathbf{P}^{\min}$ верно, что $\mathbf{P}^- \leq \mathbf{P}^{\min} \leq \mathbf{P}^+$, так как векторы $\mathbf{P}^-$ и $\mathbf{P}^+$ содержат минимальные и максимальные значения соответственно для компонент вектора, удовлетворяющего ограничениям $\mathcal{D} \cup \mathcal{E}$, а вектор $\mathbf{P}^{\min}$ удовлетворяет этим ограничениям по построению. Аналогично построим вектор $\mathbf{P}^{\min}$ такой, что $\mathbf{P_c}^- \leq \mathbf{P}^{\max} \leq \mathbf{P_c}^+$ и $\mathbf{P}^{\max}[i] = \mathbf{P}^-[i]$. Для него так же будет выполнятся условие $\mathbf{P}^- \leq \mathbf{P}^{\max} \leq \mathbf{P}^+$. Теперь рассмотрим

$$\alpha \in [0;1]: \quad \varepsilon = \alpha\mathbf{P}^-[i] + (1-\alpha)\mathbf{P}^+.$$

Тогда вектор $\mathbf{P_c} = \alpha\mathbf{P}^{\min} + (1-\alpha)\mathbf{P}^{\max}$ и будет искомым вектором, реализующим выбранную оценку. Так как мы произвольно выбрали i и ε, то будет верно утверждение из определения непротиворечивости. Значит построенный ФЗ непротиворечив. $\square$

Определение 17. *На множестве всех ФЗ с интервальными оценками определим частичный порядок $\preceq$ следующим образом:*

$$\left((C, \mathbf{P_c}^-, \mathbf{P_c}^+) \preceq (C, \mathbf{P}^-, \mathbf{P}^+)\right) \Leftrightarrow \left((\mathbf{P_c}^- \leq \mathbf{P}^-)\&(\mathbf{P}^+ \leq \mathbf{P_c}^+)\right). \quad (8)$$

Теорема 3. *Пусть $(C, \mathbf{P_c}^-, \mathbf{P_c}^+)$ — согласуемый ФЗ, а $(C, \mathbf{P}^-, \mathbf{P}^+)$ — ФЗ, построенный в предыдущей теореме (формула 7). Тогда для любого непротиворечивого ФЗ $(C, \mathbf{P'}^-, \mathbf{P'}^+)$ из условия*

$$(C, \mathbf{P'}^-, \mathbf{P'}^+) \preceq (C, \mathbf{P_c}^-, \mathbf{P_c}^+)$$

следует

$$(C, \mathbf{P'}^-, \mathbf{P'}^+) \preceq (C, \mathbf{P}^-, \mathbf{P}^+).$$

Доказательство. Пусть $(C, \mathbf{P'}^-, \mathbf{P'}^+)$ произвольный непротиворечивый ФЗ. Выберем произвольный индекс i. Так как фрагмент знаний непротиворечив, то существует вектор оценок $\mathbf{P'}$, такой, что $\mathbf{P'}^- \leq \mathbf{P'} \leq \mathbf{P'}^+$, $\mathbf{P'}[i] = \mathbf{P'}^-$, $\mathbf{I_n} \times \mathbf{P'} \geq 0$. Из $(C, \mathbf{P'}^-, \mathbf{P'}^+) \preceq (C, \mathbf{P_c}^-, \mathbf{P_c}^+)$ следует, что $\mathbf{P_c}^- \leq \mathbf{P'}^-$ и $\mathbf{P'}^+ \leq \mathbf{P_c}^+$, а значит $\mathbf{P_c}^- \leq \mathbf{P'} \leq \mathbf{P_c}^+$. Мы построили вектор оценок $\mathbf{P'}$, удовлетворяющий условиям $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$, следовательно для полученного по формуле 7 вектора $\mathbf{P}^-$ верно, что $\mathbf{P}^- \leq \mathbf{P'}$ и в частности:

$$\mathbf{P}^-[i] \leq \mathbf{P'}[i] = \mathbf{P'}^-[i].$$

Так как индекс i был выбран произвольным образом, то получаем:

$$\mathbf{P}^- \leq \mathbf{P'}^-.$$

Аналогичным образом получаем:

$$\mathbf{P'}^+ \leq \mathbf{P}^+.$$

И следовательно:

$$(C, \mathbf{P'}^-, \mathbf{P'}^+) \preceq (C, \mathbf{P}^-, \mathbf{P}^+).$$

□

Замечание 6. *Сочетание ограничений $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ может дать пустое множество удовлетворяющих им векторов $\mathbf{P_c}$, в таком случае мы будем говорить, что исходный фрагмент знаний несогласуем (противоречив).*

Из вышесказанного следует, что для проверки непротиворечивости необходимо решить серию задач линейного программирования (ЗЛП) [16], соответствующих формулам 7. Если все ЗЛП будут разрешимы, и соответствующие максимумы и минимумы совпадают с исходными границами, то ФЗ — непротиворечив. Если хотя бы одна из ЗЛП дала результат, отличный от исходных границ, то соответствующие максимумы и минимумы дадут наибольший по включению набор интервальных оценок, задающий непротиворечивый ФЗ и лежащий в указанных границах. А если хоть одна из ЗЛП оказалась неразрешима, то значит такого сужения не существует, и ФЗ — противоречив.

6. Локальный априорный вывод. Сформировав непротиворечивый ФЗ, перейдём к вопросу об оценке вероятности истинности произвольной пропозициональной формулы, заданной над теми же атомами, что и фрагмент знаний. Суть априорного вывода — построение оценок вероятности истинности для некоторой пропозициональной формулы на основе оценок вероятностей истинности другого набора пропозициональных формул. В контексте АБС наиболее естественно в качестве набора пропозициональных формул, уже имеющих оценки, рассматривать элементы ФЗ.

Определение 18. *Задача локального априорного вывода заключается в том, чтобы на основе непротиворечивого фрагмента знаний построить оценки истинности пропозициональной формулы, заданной над тем же алфавитом, что и ФЗ.*

Рассмотрим непротиворечивый ФЗ со скалярными оценками $(C, \mathbf{P_c})$. Вероятность произвольной пропозициональной формулы можно выразить через вероятности квантов, входящих в ее СДНФ.

Определение 19. *Пусть* f *— произвольная пропозициональная формула, тогда характеристическим вектором формулы* f *мы будем называть вектор* χ_f*, состоящий из* 2^n *элементов, такой, что*

$$\chi_f[i] = \begin{cases} 0, & \text{если } q_i \notin S_f; \\ 1, & \text{если } q_i \in S_f. \end{cases}$$

Напомним, что q_i *обозначает* i*-й квант, а* S_f *— множество квантов, содержащихся в СДНФ формулы* f.

Рассмотрим пропозициональную формулу f, вероятность истинности которой требуется оценить. На основе определения ее вероятности, определения 19 и определения вектора $\mathbf{P_q}$ можно сделать вывод, что

$$p(f) = (\chi_f, \mathbf{P_q}). \tag{9}$$

Для того чтобы не проводить дополнительные вычисления вероятностей $\mathbf{P_q}$, можно, согласно формуле 3, заменить вектор $\mathbf{P_q}$ на произведение $\mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c}$, получаем

$$p(f) = (\chi_f, \mathbf{I}_n \times \mathbf{P_c}) = (\mathbf{I}_n^T \times \chi_f, \mathbf{P_c}).$$

Введём обозначение $\mathbf{L}_f = \mathbf{I}_n^{\mathsf{T}} \times \chi_f$, тогда

$$p(f) = (\mathbf{L}_f, \mathbf{P_c}). \tag{10}$$

Замечание 7. *Как вектор χ_f, так и вектор $\mathbf{L}_f$ однозначно соответствуют конкретной пропозициональной формуле. Поэтому достаточно вычислить их один раз и сопоставить используемым пропозициональным формулам.*

Мы описали решение задачи априорного вывода для случая ФЗ со скалярными оценками, перейдём теперь к ФЗ с интервальными оценками. В отличие от случая скалярных оценок однозначно определить вероятность истинности произвольной формулы невозможно, но можно найти максимальную и минимальную оценки. Вычислить их можно по следующей формуле:

$$p^-(f) = \min_{\mathcal{D}\cup\mathcal{E}}(\mathbf{L}_f, \mathbf{P_c}), \quad p^+(f) = \max_{\mathcal{D}\cup\mathcal{E}}(\mathbf{L}_f, \mathbf{P_c}). \tag{11}$$

Решив две задачи линейного программирования, соответствующие формулам 11, мы получим решение задачи локального априорного вывода.

Замечание 8. *Если исходный фрагмент знаний противоречив, то рассматриваемые задачи линейного программирования не будут иметь решения. А в случае согласуемого ФЗ мы получим решение задачи априорного вывода для наибольшего непротиворечивого фрагмента знаний (задаваемого формулой 7), не превосходящего исходный.*

Замечание 9. *Кроме такого подхода к априорному выводу можно рассмотреть еще построение (или уточнение) оценок ФЗ на основе оценок произвольного набора формул, которое происходит аналогично процессу поддержания непротиворечивости, только к набору ограничений $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ в формулах 7 добавляются ограничения вида $p_f^- \leq (\mathbf{L}_f, \mathbf{P_c}) \leq p_f^+$, где p_f^- и p_f^+ — нижняя и верхняя оценки вероятности формулы f. В общем случае, к оценкам фрагмента знаний могут быть добавлены произвольные линейные оценки на вероятности некоторого набора формул над теми же атомами. В этой ситуации мы говорим о расширенном фрагменте знаний. Подход к анализу и обработке расширенных фрагментов знаний представлен в [8, 16, 18].*

7. Объемлющая непротиворечивость. В данном разделе мы предлагаем рассмотреть несколько иной, по сравнению с классической ситуацией, подход к интерпретации и, как следствие, моделированию высказываний экспертов. Если традиционно высказывания экспертов понимаются с модальностью «непременно так», то в данном разделе мы будем интерпретировать их как «бывает и так, что». Например, пусть исходное утверждение эксперта звучало как «$p(x) \in [0.3, 0.4]$». Классическая его интерпретация — «для всякого распределения вероятностей, отвечающего моделируемой ситуации, вероятность пропозициональной переменной x заключена в интервале $[0.3, 0.4]$». Интерпретация, принятая в этом разделе: «для каждого значения $p \in [0.3, 0.4]$ существует отвечающее моделируемой ситуации распределение вероятностей, в котором вероятность x равна p». Такой подход позволит нам придать смысл противоречивым высказываниям экспертов, накрыв их объемлющим множеством оценок, в котором реализуется каждая из предложенных экспертами оценок, но, возможно, не все сразу. Далее мы подробно рассматриваем описанную выше интерпретацию и даём алгоритм поиска минимального объемлющего распределения вероятностей.

Пусть задан фрагмент знаний с интервальными оценками

$$\mathcal{C}_0 = \langle C, p_0^-, p_0^+ \rangle.$$

Задача — построить непротиворечивый фрагмент знаний

$$\mathcal{C} = \langle C, p^-, p^+ \rangle,$$

такой, что все оценки нового ФЗ будуть содержать, как подынтервалы (возможно несобственные), соответствующие оценки исходного ФЗ. При этом из всех возможных ФЗ мы будем выбирать тот, для которого набор интервальных оценок обладает минимальной суммой длин интервалов.

Иными словами будем требовать:

$$\forall x \in C : (p^-(x) \leq p_0^-(x)) \wedge (p_0^+(x) \leq p^-(x)); \quad (12)$$

$$\text{Consistent}\,[\mathcal{C}]; \quad (13)$$

$$\sum\nolimits_{x \in C} (p^+(x) - p^-(x)) \to \min \quad (14)$$

Для решения поставленной проблемы мы построим задачу линейного программирования, решение которой даёт минимальную накрывающую оценку. Эта задача состоит из ограничений семи типов.

Первые четыре типа ограничений соответствуют условию (12), но дополнительно учитывают случаи, когда исходные оценки $p_0^-(x)$, $p_0^+(x)$ заданы не полностью (условия (17)–(18)):.

$$\forall(x \in C) : p^-(x) \leq p_0^-(x), p_0^+(x) \leq p^+(x). \tag{15}$$

$$\forall(x \in C) : 0 \leq p^-(x), p^+(x) \leq 1. \tag{16}$$

$$\forall(x \in C) : p^-(x) \leq p^+(x). \tag{17}$$

$$\forall(x \in C) : p^-(x) \leq p_0^+(x), p_0^-(x) \leq p^+(x). \tag{18}$$

Ограничения (15)–(18) утверждают, что мы строим именно оценку и именно охватывающую. Теперь учтем непротиворечивость этой оценки. Здесь очень важна разница между непротиворечивым ФЗ и согласуемым ФЗ, напомним, что в первом случае именно заданные оценки непротиворечивы, а во втором — заданные оценки можно сузить до непротиворечивых. Для того чтобы показать, что указанные оценки не будут сужаться, нам необходимо показать, что каждая граничная оценка будет иметь свою реализацию. То есть, для каждого граничного значения $p(x)$ есть скалярное распределение в указанных границах.

Введём для каждого конъюнкта $x \in C$ новые переменные $p_x^+(y)$ и $p_x^-(y)$, $y \in C$, которые и будут отвечать этим скалярным распределениям.

$$\forall x \in C \forall y \in C p_x^-(y), p_x^+(y) \in [p^-(y), p^+(y)] \tag{19}$$

$$\mathbf{I}_n \mathcal{P}_x \geq 0 \tag{20}$$

$$\forall(x \in C)(q_x^+(x) = p^+(x)) \wedge (q_x^-(x) = p^-(x)) \tag{21}$$

Условия (19)–(21) означают, что для любой границы существует распределение, ее содержащее, а, следовательно, данная система оценок непротиворечива. Теперь решение задачи линейного программирования:

$$\sum\nolimits_{x \in C} (p^+(x) - p^-(x)) \to \min$$

при условиях (15)–(21) даст нам решение нашей задачи.

Теорема 4. *Задача линейного программирования по минимизации* $\sum_{x \in C} (p^+(x) - p^-(x))$ *при условиях (15)–(21) всегда имеет* *решение. И в случае непротиворечивого исходного фрагмента знаний совпадает с ним.*

Доказательство. Так как все переменные, фигурирующее в построенной ЗЛП, лежат в интервале $[0;1]$, то существует конечный предел. Следовательно, он может быть достигнут. Если исходный ФЗ непотиворечив, то, по определению, для каждой границы оценки любого конъюнкта x существует реализующее его распределение. Рассмотрим эти распределения как значения p_x^- и p_x^+, а в качестве p^- и p^+ рассмотрим исходные ограничения. Мы построили план, удовлетворяющий ограничениям (15)–(21). Из ограничений (15)–(18) следует, что

$$\sum\nolimits_{x \in C} (p^+(x) - p^-(x)) \geq \sum\nolimits_{x \in C} (p_0^+(x) - p_0^-(x)).$$

А предложенный план реализует равенство, а, следовательно, соответствует минимуму. Такое решение, в силу ограничений (15)–(18), единственное. Следовательно, результатом решения ЗЛП будет именно построенный план, оценки которого совпадают с оценками исходного ФЗ. $\square$

Замечание 10. *У построенной нами задачи линейного программирования решение может быть не единственным. Следующий пример демонстрирует эту неединственность.*

Пример 3. *ФЗ имеющий более одного накрывающего. Рассмотрим фрагмент знаний на двух переменных $\{x_1, x_2\}$. Начальные условия*

$$p_0(x_1) \in [0.8, 0.8],$$

$$p_0(x_2) \in [0.8, 0.8],$$

$$p_0(x_1 x_2) \in [0.4, 0.6]$$

продолжаются для любого $0 \leq t \leq 0.2$ до условий

$$p_0(x_1) \in [0.6 + t, 0.8],$$

$$p_0(x_2) \in [0.8 - t, 0.8],$$

$$p_0(x_1 x_2) \in [0.4, 0.6].$$

Предложенная в данном разделе модель непротиворечивости фрагмента знаний позволяет, в ряде случаев, согласовывать оценки различных экспертов, несогласуемые в традиционном смысле. Это в свою очередь даёт возможность провести логико-вероятностный вывод над объемлющими данными и, ориентируясь на его результаты, либо принять решение, либо указать, какой из экспертов «хуже вписывается в модель».

8. Объемлющая непротиворечивость в случае непротиворечивых исходных данных. Заметим, что в случае комбинирования непротиворечивых исходных данных среди возможных результатов операции накрывающей непротиворечивости можно выбрать единственный минимальный.

Определение 20. *Пусть задан упорядоченный набор из* n *фрагментов знаний одинаковой структуры (то есть, построенных над одинаковым идеалом конъюнктов* C*) с интервальными оценками*

$$(\mathcal{C}_i = \langle C, \mathbf{p}_i \rangle)_{i=0}^{i=n-1}.$$

Тогда семейство $\mathbf{C}$ *построенных над тем же идеалом конъюнктов непротиворечивых фрагментов знаний вида* $\mathbf{C} = \langle C, \mathbf{p} \rangle$ *с интервальными оценками является результатом операции «накрывающей» непротиворечивости фрагментов знаний из исходного набора*

$$\mathcal{C} = \mathsf{ConsistentEnclosure}\left[(\mathcal{C}_i)_{i=0}^{i=n-1}\right],$$

если

$$(\forall f \in C)\ (\forall i = 0(1)(n-1))\ \mathbf{p}_i(f) \subseteq \mathbf{p}(f).$$

Замечание 11. *Еще раз подчеркнем, что результатом такой операции является семейство непротиворечивых фрагментов знаний. Оно непустое, так как ФЗ с оценками всех элементов* $[0;1]$ *входит в это семейство. Среди элементов такого семейства хотелось бы выбрать наилучший в каком-то смысле.*

Предложим ответ на поставленный вопрос для случая непротиворечивых исходных фрагментов знаний.

Теорема 5. *Пусть задан упорядоченный набор из* n *непротиворечивых фрагментов знаний одинаковой структуры (то есть, построенных над одинаковым идеалом конъюнктов* C*) с интервальными оценками*

$$(\mathcal{C}_i = \langle C, \mathbf{p}_i \rangle)_{i=0}^{i=n-1}.$$

Тогда наименьшим по включению элементом семейства непротиворечивых фрагментов знаний, сформированным в результате операции «накрывающей» непротиворечивости фрагментов знаний из исходного набора, является линейная оболочка $\Cup_{i=0}^{i=n-1} \mathcal{C}_i$, *последнего.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что линейная оболочка исходного набора непротиворечивых фрагментов знания является непротиворечивым фрагментом знаний [16, 18].

Во-вторых, заметим, что оценка любого элемента линейной оболочки содержит в себе оценку этого элемента из любого исходного фрагмента знаний, поскольку нижняя граница первой не больше, чем нижняя граница второй, а верхняя граница первой не меньше, чем верхняя граница второй.

Таким образом, линейная оболочка входит в семейство ФЗ, получившихся в результате операции «накрывающей» непротиворечивости.

В-третьих, предположим, что в это семейство входит фрагмент знаний с более узкой оценкой вероятности истинности какого-то элемента. Но тогда либо нижняя граница этой более узкой оценки строго больше минимума соответствующих оценок из исходных ФЗ, либо верхняя граница строго меньше максимумов. Но и максимум, и минимум реализуются хотя бы в одном исходном ФЗ (не обязательно в одном и том же), а значит, такая рассматриваемая узкая оценка не включает в себя какие-то исходные, что противоречит определению «накрывающей» непротиворечивости.

Таким образом, мы доказали, что результат операции линейной оболочки минимален по операции включения оценок среди элементов семейства, полученного в результате операции «накрывающей» непротиворечивости. □

9. Заключение. В статье рассмотрена матрично-векторная формализация для моделирования фрагмента знаний с неопределенностью и рассуждений в таком фрагменте знаний в рамках логико-вероятностного подхода или, более точно, в рамках теории алгебраических байесовских сетей.

В локальном синтезе согласованных оценок истинности выделено четыре операции: проверка непротиворечивости фрагмента знаний, поддержание непротиворечивости фрагмента знаний, априорный вывод во фрагменте знаний, формирование фрагмента знаний с «минимальными» непротиворечивыми накрывающими оценками (по отношению к некоторому набору исходных оценок истинности) — поддержание накрывающей непротиворечивости.

Фрагмент знаний формализуется как идеал конъюнктов, которые упорядочены на основе индексов, которые взаимно-однозначно определяются характеристическими векторами конъюнктов. За счет этого идеалу конъюнктов сопоставляется либо вектор скалярных оценок вероятности его элементов, либо два вектора — нижние и верхние границы интервальной оценки вероятности элементов идеала. Кроме того, аналогичным образом индексируются и кванты, совокупность которых рассматривается как пространство элементарных событий.

Построены матрицы, которые преобразуют вероятности квантов в вероятности конъюнктов и наоборот. В дополнение к ним рассматривается характеристический вектор, сопоставляющий пропозициональной формуле кванты из ее разложения в совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

В случае скалярных оценок истинности проверка непротиворечивости фрагмента знаний и априорный вывод в нем сводится к операциям над определенными выше матрицами и векторами. В случае интервальных оценок истинности для всех видов локального синтеза согласованных оценок истинности требуется построить и решить задачи линейного программирования. Целевые функции и ограничения этих задач формируются с использованием определенных выше матриц и векторов.

Установлено, что в случае непротиворечивости исходных данных фрагмент знаний с накрывающими непротиворечивыми оценками существует, и он единственный. В случае противоречивых исходных данных такой фрагмент знаний существует, но он не обязательно единственный.

Литература

1. *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 1997. Т. 5. С. 33–42.

2. *Сироткин А.В.* Вычислительная сожность алгоритмов локального апостериорного вывода в алгебраических байесовских сетях // Труды СПИИРАН. 2011. Вып. 3(18). [*В настоящем выпуске*].

3. *Сироткин А.В., Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: согласованность и согласуемость вероятностных оценок истинности // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сб. трудов IV межд. научно-практической конф. (Коломна, 28–30 мая 2007 г.). В 2-х т. Т. 1. М.: Физматлит, 2007. С. 296–302.

4. *Сироткин А.В., Тулупьев А.Л.* Матричные уравнения локального логико-вероятностного вывода в алгебраических байесовских сетях // Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 6. СПб.: Наука, 2008. С. 134–143.

5. *Сироткин А.В., Тулупьев А.Л.* Постановка экстремальных задач локального логико-вероятностного вывода в алгебраических байесовских сетях на матрично-векторном языке // Региональная информатика-2008 (РИ-2008). XI Санкт-Петербургская международная конференция. Санкт-Петербург, 22–24 октября, 2008 г.: Материалы конференции / СПОИСУ. СПб., 2009. С. 88–91.

6. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Алгебраические байесовские сети: принцип декомпозиции и логико-вероятностный вывод в условиях неопределенности // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2008. №10, т. 6. С. 85–87.

7. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: теоретические основы и непротиворечивость. СПб.: СПИИРАН, 1995. 76 с.

8. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный подход к моделированию баз знаний с неопределенностью. СПб.: СПИИРАН, 2000. 282 с.

9. *Тулупьев А.Л.* Метод построения и исследования баз фрагментов знаний с неопределенностью // Труды СПИИРАН. Вып. 1. 2002. Т. 1. С. 258–271.

10. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: Учеб. пособие. Элементы мягких вычислений. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 40 с.

11. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: локальный логико-вероятностный вывод: Учеб. пособие. Элементы мягких вычислений. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 80 с.

12. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. 140 с. (Элементы мягких вычислений.)

13. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: система операций локального логико-вероятностного вывода // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2009. № 4. С. 41–44.

14. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в идеалах конъюнктов и дизъюнктов. // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 2. С. 121–131.

15. *Тулупьев А.Л.* Апостериорные оценки вероятностей в идеале конъюнктов // Вестник СПбГУ. 2010. Серия 10. Вып. 1. С. 95–104.

16. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 608 с.

17. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Локальный апостериорный вывод в алгебраических байесовских сетях как система матрично-векторных операций // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. V-я Международная научно-практическая конференция. Сборник научных трудов. В 2-х т. Т. 1. СПб.: Наука, 2009. С. 425–434.

18. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2009. 400 с.

19. *Boole G.* An Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. Cambridge: Macmillan/London: Walton & Maberly, 1854. 424 p. (Reprinted in 1958 by Dover Publications, New York.)

20. *Carnap R.* The two concepts of probability // Logical Foundations of Probability. University of Chicago Press, Chicago, 1950. P. 19–51.

21. *Carnap R.* Decision Making // Studies in Inductive Logic and Probability / Ed. by R. Carnap, R. Jeffrey. University of California Press, Berkeley, 1971. Vol. 1. P. 7–9.

22. *Coletti G., Scozzafava R.* Probabilistic Logic in a Coherent Setting. Trends in Logic. Studia Logica Library. London: Kluwer academic publishers, 2002. 292 p.

23. *de Finetti B.* Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio // Atti della R. Academia Nazionale dei Lincei. 1931. Vol. 4. P. 251–299.

24. *de Finetti B.* La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives // Annales de l'Institut Henri Poincare. 1937. Vol. 7. P. 1–68.

25. *de Finetti B.* Theory of Probability. New York: Wiley, 1974-75.

26. *Fagin R., Halpern J.Y.* Uncertainty, Belief, and Probability // Computational Intelligence. 1991. Vol. 6. P. 160–173.

27. *Fagin R., Halpern J.Y.* Uncertainty, Belief, and Probability-2 // Proc. of the IEEE Symposium on Logic and Computer Science. 1991. Vol. 7. P. 160–173.

28. *Fagin R., Halpern J.Y.* Reasoning about Knowledge and Probability // Journal of the Association for Computing Machinery. 1994. Vol. 41, N. 2. P. 340–367.

29. *Fagin R., Halpern J.Y., Megiddo N.* A Logic for Reasoning about Probabilities // Report RJ 6190(60900) 4/12/88. 1988. P. 1–41.

30. *Fagin R., Halpern J.Y., Megiddo N.* A Logic for Reasoning about Probabilities // Information and Computation. 1990. Vol. 87, N. 1/2. P. 78–128.

31. *Jensen F.V.* Bayesian Networks and Decision Graphs. New York: Springer-Verlag, 2002. 268 p.

32. *Kindermann R., Snell J.L.* Markov Random Fields and Their Applications. American Mathematical Society, 1980. 142 p.

33. *Neapolitan R.E.* Learning Bayesian Networks. Pearson Prentice Hall, 2003. 674 p.

34. *Nilsson N.J.* Probabilistic Logic // Artificial Intelligence. 1986. Vol. 28. P. 71–87.

35. *Nilsson N.J.* Logic and Artificial Intelligence // Artificial Intelligence. 1991. Vol. 47. P. 31–56.

36. *Nilsson N.J.* Probabilistic Logic Revisited // Artificial Intelligence. 1993. Vol. 59. P. 39–42.

37. *Nilsson N.J.* Artificial Intelligence: a New Synthesis. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publ., 1998. 513 p.

38. *Pearl J.* Probabilistic reasoning using graphs // Uncertainty in Knowledge-Based Systems / Ed. by B. Bouchon, R.R. Yager. Springer-Verlag, 1987. P. 201–202.

39. *Pearl J.* Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. N.Y.: Morgan Kaufman Publ., 1991. 552 p.

40. *Pearl J., Verma T.* Causal Networks: Semantics and Expressiveness // Machine Intelligence & Pattern Recognition (Uncertainty in Artificial Intelligence, 4). 1990. Vol. 9. P. 69–77.

41. *van der Gaag L.* On probability intervals and their updating: Tech. Rep. RUU-CS-90-22: Institute of Information and Computing Sciences, Utrecht University, 1990.

42. *Zadeh L.A.* Probabilistic Reasoning in Predictive Expert Systems // Machine Intelligence & Pattern Recognition (Uncertainty in Artificial Intelligence). 1986. Vol. 4. P. 103–116.

Сироткин Александр Владимирович — младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики Учреждения Российской академии наук С.-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН). Область научных интересов: алгебраические байесовские сети: вычислительные аспекты логико-вероятностного вывода в условиях неопределенности, математические методы анализа генома. Число научных публикаций — 64. avs@iias.spb.su; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450. Научный руководитель — Тулупьев А.Л.

Alexander Vladimirovich Sirotkin — junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: algebraic Bayesian networks, algorithms of probabilistic-logic inference under uncertainty. The number of publications — 64. avs@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Тулупьев Александр Львович — д.ф.-м.н., доцент; заведующий лабораторией теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН, профессор кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: представление и обработка данных и знаний с неопределенностью, применение методов математики и информатики в социокультурных исследованиях, применение методов биостатистики и математического моделирования в эпидемиологии, технология разработки программных комплексов с СУБД, методы автоматизированной оценки защищенности персонала информационных систем от социоинженерных атак. Число научных публикаций — 230. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

Alexander Lvovich Tulupyev — PhD in Computer Science, Dr. of Sc., Associate Professor; Head of Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS, Professor of Computer Science Department, SPbSU. Research area: uncertain data and knowledge representation and processing, mathematics and computer science applications in socio-cultural studies, biostatistics, simulation, and mathematical modeling applications in epidemiology, data intensive software systems development technology. Number of publications — 230. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09-01-00861-а.

Рекомендовано ТиМПИ СПИИРАН, зав. лаб. Тулупьев А.Л., д.ф.-м.н., доцент.

Статья поступила в редакцию 08.07.2011.

РЕФЕРАТ

Сироткин А.В., Тулупьев А.Л. **Моделирование знаний и рассуждений в условиях неопределенности: матрично-векторная формализация локального синтеза согласованных оценок истинности.**

В статье рассмотрена матрично-векторная формализация для моделирования фрагмента знаний с неопределенностью и рассуждений в таком фрагменте знаний в рамках логико-вероятностного подхода или, более точно, в рамках теории алгебраических байесовских сетей.

В локальном синтезе согласованных оценок истинности выделено четыре операции: проверка непротиворечивости фрагмента знаний, поддержание непротиворечивости фрагмента знаний, априорный вывод во фрагменте знаний, формирование фрагмента знаний с «минимальными» непротиворечивыми накрывающими оценками (по отношению к некоторому набору исходных оценок истинности) — поддержание накрывающей непротиворечивости.

Фрагмент знаний формализуется как идеал конъюнктов, которые упорядочены на основе индексов, которые взаимно-однозначно определяются характеристическими векторами конъюнктов. За счет этого идеалу конъюнктов сопоставляется либо вектор скалярных оценок вероятности его элементов, либо два вектора — нижние и верхние границы интервальной оценки вероятности элементов идеала. Кроме того, аналогичным образом индексируются и кванты, совокупность которых рассматривается как пространство элементарных событий.

Построены матрицы, которые преобразуют вероятности квантов в вероятности конъюнктов и наоборот. В дополнение к ним рассматривается характеристический вектор, сопоставляющий пропозициональной формуле кванты из ее разложения в совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

В случае скалярных оценок истинности проверка непротиворечивости фрагмента знаний и априорный вывод в нем сводится к операциям над определенными выше матрицами и векторами. В случае интервальных оценок истинности для всех видов локального синтеза согласованных оценок истинности требуется построить и решить задачи линейного программирования. Целевые функции и ограничения этих задач формируются с использованием определенных выше матриц и векторов.

Установлено, что в случае непротиворечивости исходных данных фрагмент знаний с накрывающими непротиворечивыми оценками существует, и он единственный. В случае противоречивых исходных данных такой фрагмент знаний существует, но он не обязательно единственный.

SUMMARY

Sirotkin A.V., Tulupyev A.L. **Knowledge and reasoning with uncertainty modeling: matrix-and-vector calculus for local reconciliation of truth estimates.**

The paper presents matrix-vector formalization for knowledge pattern with uncertainty and reasoning with uncertainty modeling. This formalization relies upon probabilistic-logic approach or, more exactly, upon the theory of algebraic Bayesian networks.

The local synthesis of consistent truth estimates falls into four operations: knowledge pattern consistency verification, knowledge pattern reconciliation, *á posteriori* inference in a knowledge pattern, and knowledge pattern enclosing reconciliation. The latter reconciliation is enclosing in regard of the given truth probabilistic estimates which can be initially inconsistent. (We rely upon N. Nilsson's formalization of the probabilistic logic and its further development made by R. Fagin and his co-authors.)

A knowledge pattern is represented as an ideal of conjuncts (conjuncts ideal). In this representation, each conjunct has either scalar or interval estimate of its probability. Conjuncts are indexed with their characteristic vectors wich are considered as the binary notation of the indices. Conjuncts are ordered according their indices. The scalar probabilistic estimates of conjuncts ordered according to their indices provide us with the scalar probabilistic estimates vector. In case of interval estimates, we have two vectors that represent lower and upper bounds of the estimates.

The quants are ordered in the same way as conjuncts are. (The quants are the conjunctions of literals and these conjunctions are of the maximal length.) The quants are considered as a set of possible worlds for the sake of the probabilistic logic introduction.

Two matrices are built that convert probabilities of conjuncts into probabilities of quants and vice versa. We define a characteristic vector that corresponds the set of quants to a propositional formula. The quants are collected from the perfect disjunctive normal form of the propositional formulae.

In case of scalar probabilistic estimates, knowledge pattern consistency verification and *á priori* inference render to a set of matrix-vector operations with the matrices and vectors defined above. In case of interval probabilistic estimates, all kinds of local synthesis of consistent truth estimates render to linear programming problems. The goal functions and the set of constraints of those problems are built with the matrices and vectors defined above.

In case of initial estimates consistency, the knowledge pattern with enclosing consistent estimates exists and it is unique (single). In case of initial estimates inconsistency, a knowledge pattern with enclosing consistent estimates exists and there can exist a number of other such knowledge patterns.