УДК 004.8

А.А. Фильченков, А.Л. Тулупьев

ТРЕТИЧНАЯ СТРУКТУРА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ БАЙЕСОВСКОЙ СЕТИ

Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. **Третичная структура алгебраическое байесовской сети.**

Аннотация. Третичная структура алгебраической байесовской сети (АБС) требуется для построения как случайного минимального графа смежности, так и всего множества минимальных графов смежности. Помимо этого она требуется для нахождения лучшей или оптимальной вторичной структуры для заданной первичной структуры АБС. Целью работы является формирование четко определенного понятия третичной структуры АБС и связанных с ней объектов на основе синтеза существующих подходов, а также исследование их свойств. Рассмотрены все существующие подходы к определению понятий «клика», «множество клик» и «граф клик», а также классификация клик максимального графа смежности. Построена единая терминологическая база для описания сопутствующих объектов, удовлетворяющая критериям неизбыточности и полноты систематизации. Третичная полиструктура определена как семейство графов, построенных над подмножествами множества сужений максимального графа смежности, ребра которых соответствуют тем или иным родственным отношениям, определенным в статье. Третичная структура определена как ориентированный граф, ребра которого проведены от родительских вершин к сыновьем, а вершинами являются сужения максимального графа смежности на веса ребер и вершин, а также на пустой вес (родительский граф над расширенным множеством значимых клик).

Ключевые слова: алгебраические байесовские сети, третичная структура, машинное обучение, вероятностно-графические модели систем знаний, глобальная структура.

Filchenkov A.A., Tulupyev A.L. **The Algebraic Bayesian Network Tertiary Structure.**

Abstract. Algebraic Bayesian network (ABN) tertiary structure is required to both a random minimal join graph and the minimal join graph set. In addition, it is required to find the best or an optimal secondary structure over the given ABN primary structure. The goal of the work is to create a clear definition of the ABN tertiary structure and associated objects on the basis of analysis of existing approaches and study of their properties. All existing approaches to the definition of "clique", "clique set" and "clique graph", and classification of the maximal join graph cliques are overviewed. A unified vocabulary for describing the associated objects satisfying the criteria of non-redundancy and systematization completeness is suggested. Tertiary polystructure is defined as a family of graphs constructed on subsets of the maximum join graph narrowings set whose edges are matched to specific relationships defined in the article. Tertiary structure is defined as a directed graph whose edges lead from the parent vertices to their sons, and whose vertices are the maximum join graph narrowing on weights of the edges and the vertices, as well as on the empty weight (parent graph over extended set of useful cliques).

Keywords: algebraic Bayesian networks, tertiary structure, machine learning, probabilistic graphical knowledge models, global structure.

Цзы-лу сказал:
— Вэйский государь ожидает
Вас, Философ, чтобы с Вами
управлять государством.
С чего Вы намерены начать?
— Необходимо исправить имена, —
ответил Конфуций [1].

1. Введение. Алгебраические байесовские сети (АБС) являются формализмом, родственным байесовским сетям доверия (БСД) [15, 17, 36]. Обе относятся к классу вероятностных графических моделей, исследуемых в богатом теоретическом контексте [39, 41, 42, 46]. Теорема Байеса [33] позволяет распространять влияние знаний о случившихся событиях на вероятности их причин. Соответствующий математический аппарат лежит в основе различных видов логико-вероятностного вывода, которые осуществляются как в АБС [5–8, 10, 11], так и в БСД [35, 37, 39, 43–45]. Одно из основных концептуальных отличий состоит в том, что БСД могут работать только со скалярными оценками вероятностей, тогда как АБС позволяют также обрабатывать и интервальные оценки вероятностей [14– 16], что обеспечивает по сравнению с БСД более высокую выразительную мощность в представлении неопределенности и неточности данных знаний [9, 13].

У обеих сетей можно выделить первичную структуру, которая представляет знания о предметной области, и вторичную структуру, которая характеризует взаимосвязи между элементами первичной структуры и представляется в виде графа [12, 15, 17]. Первичная структура БСД представляет собой набор случайных элементов, а вторичная структура БСД представляет собой ориентированный граф, направление ребер которого характеризует зависимости между указанными элементами [37, 43, 44]. В отличие от этого первичная структура АБС представляет собой максимальные (по включению) фрагменты знаний, представляемые идеалом положительно означенных конъюнкций с заданным на них вероятностным распределением (либо семейством распределений, когда речь идет об интервальных оценках) [14–17]. ВС АБС представляется графом смежности [6, 15, 17, 18, 26], который, в отличие от вторичной структуры БСД, не ориентирован [4, 10], кроме того, на него накладываются определенные условия [3, 26, 29], которые мы подробно рассмотрим ниже.

Дополнительно у АБС выделяют и третичную структуру [18, 23, 24], которая характеризует вторичную структуру АБС и также представляется в виде графа. Роль третичной особенно важна в глобальном обучении АБС, поскольку третичная структура требуется для построения множества минимальных вторичных, возможных над данной первичной структурой [19–22], для построения случайной минимальной вторичной структуры [3] и для поиска наиболее «эффективных» вторичных структур.

На сегодняшний день все еще не сложилось единого понятия третичной структуры. Существование различных подходов ([18, 26, 29]) обусловливается тем, что, третичная структура каждый раз определялась функциональными нуждами конкретных аспектов конкретной проблемы, во-вторых, в силу недостаточного развития теории глобальной структуры АБС, и, как следствие, недостаточно исследованной проблематикой, которая и является источником требований к новым объектам теории. Обычно третичная АБС ассоциируется с понятием графа клик [23, 24], который, однако, определен еще менее однозначно, поскольку в различных работах предлагаются несовместимые определения [18, 19, 21, 26]. Более того, ни одно из этих определений полностью не совпадает с определением этого понятия в теории графов [38, 40].

Очевидно, что требуется выработать единый подход к определению третичной структуры АБС и согласовать получившуюся терминологическую схему с общепринятыми понятиями теории графов.

Целью данной работы является формирование четко определенного понятия третичной структуры АБС и сопутствующих объектов на основе синтеза существующих подходов, а также исследование свойств указанных объектов. Одной из задач является минимизация различий между вводимой системой терминов и уже существующими.

При выборе трактовки того или иного термина мы будем следовать не формальному определению, а основываться на применяемых свойствах объекта.

2. Подходы к определению клики и графа клик. В данном разделе мы будем следовать системе терминов, сформулированной в работах [26, 27, 29], если не оговорено обратное.

Как уже было сказано, обычно третичной структурой АБС называется граф клик [23, 24]. Разночтения возникают уже на уровне определяемого объекта, потому что в разных работах, посвященных проблематике алгебраических байесовских сетей, под графом клик понимаются разные структуры [18, 26].

В данном разделе мы будем последовательно рассматривать подходы к определению трех объектов: клики, множества клик Clique и графа клик, начиная с классического определения [32], принятого в теории графов.

Для разделения различных понятий, обозначаемых в разных источниках одним и тем же термином, мы будем добавлять к этому термину слова «в смысле» и порядковый номер источника, например, *граф клик в смысле 2*. Единственное исключение — понятия теории графов, к которым мы будем добавлять слова «по теории графов», например, *клика по теории графов*.

Отдельно следует оговорить употребление понятия «граф клик» и связанных с ним понятий в настоящей статье. Мы будем отдельно обсуждать множество, над которым строится граф клик, которое будем называть «множество клик» и отдельно — способ построения графа клик над произвольным множеством Clique. Таким образом, мы будем обозначать «графом клик» некий граф, построенный над заранее указанным множеством Clique. Это позволит разложить понятие графа клик на две составляющих и анализировать их раздельно. Рассматривая в каждом подходе граф клик отдельно от множества клик, мы будем полагать, что граф клик строится над некоторым множеством Clique, а не над конкретным, рассматриваемым в анализируемой статье.

2.1. Клика, множество клик и граф клик в теории графов. Первые неоднозначности появляются при определении клики как таковой. В теории графов под кликой традиционно понимается полный подграф некоторого графа (например, [2, 32, 38]). В общем случае никаких дополнительных ограничений на этот подграф не накладывается. Однако иногда под кликой понимается максимальная по включению клика (например, [34]). Во избежание путаницы будем под *кликой по теории графов* (клика по ТГ) понимать произвольный полный подграф, а под *максимальной кликой по теории графов* понимать максимальную по включению клику по теории графов. Дополнительно условимся считать кликой подграф, состоящий ровно из одной вершины (он, очевидно, полон).

Графом клик в теории графов принято называть ненаправленный граф, построенный на множестве максимальных клик по ТГ, ребра которого проведены между двумя максимальными кликами по ТГ тогда и только тогда, когда две эти клики содержат общие вершины [32]. Будем называть такой граф клик *графом клик по теории графов*.

Хотя множество клик Clique отдельно выделяется только в теории глобальной структуры АБС, тем не менее, следуя аналогии, по которой Clique — множество, над которым строится граф клик, мы укажем на соответствующий аналог в теории графов — множество максимальных клик по теории графов. Будем называть такое множество множеством Clique по теории графов.

2.2. Клика, множество клик и граф клик в статье Тулупьева, Столярова и Ментюкова [18]. Также данная терминология применялась в монографии [17]. В статье [18] кликой обозначается именно полный подграф максимального графа смежности без дополнительных ограничений, то есть клика по теории графов.

Под множеством клик Clique (в статье [18] оно называется множество подклик) понимается множество всех клик по теории графов, которое

1) не содержит пустых клик по теории графов;
2) не содержит одноэлементных клик по теории графов;
3) не содержит клик по теории графов с одинаковым весом;
4) не содержит клик по теории графов с пустым весом.

Под весом клики по теории графов понимается вес пересечения всех вершин, принадлежащих ей.

К сожалению, в подобной формулировке данное определение некорректно, потому что неоднозначно. Простейший пример таков: рассмотрим максимальный граф смежности над набором вершин $\{ax_1, ax_2, ax_3\}$. В качестве Clique мы можем указать следующие:

1) $\{\{ax_1, ax_2, ax_3\}\}$ — множество из одной клики по теории графов, содержащей три вершины.
2) $\{\{ax_1, ax_2\}\}$ — множество из одной клики по теории графов, содержащей две вершины.
3) $\{\{ax_1, ax_3\}\}$ — множество из одной клики по теории графов, содержащей две вершины.
4) $\{\{ax_2, ax_3\}\}$ — и еще одно множество из одной клики по теории графов, содержащей две вершины.

При этом, очевидно, вес всех четырех клик равен a, поэтому включение одной из этих клик в множество Clique влечет запрет на включение в это множество всех остальных клик с тем же весом, согласно правилу 3). Фактически, это правило и создает неопределенность, требуя отсутствия в Clique клик по теории графов с одинаковым весом, но не указывая, какая именно клика по теории графов из соответствующего множества должна в присутствовать в Clique. Более того, можно предложить еще один вариант множества Clique:

5) $\{\}$,

потому что в правило не требует, что бы в нем присутствовала хотя бы одна клика соответствующего веса (отметим, что данное множество не противоречит правилу 1), как это могло бы показаться, потому что оно не содержит вообще никаких клик, тем более пустых).

Тем не менее, мы можем выделить объект, который обозначается как Clique, рассмотрев то множество, которое использовалось в статье [18] для построения графов смежности. Конструктивно в Clique включаются все те клики по теории графов, которые получаются сужением максимального графа смежности на вес какого-либо из его ребер (то есть все значимые сужения). Будем называть такое множество Clique *в смысле 1* или, кратко, Clique_1.

Наконец, под графом клик понимается направленный граф, построенный над Clique, такой, что ребро от клики A в клику B проведено тогда и только тогда, когда A содержит B. Очевидно, этот объект не имеет ничего общего с графом клики по теории клик. Будем называть такой граф клик *графом клики в смысле 1.*

Следует, тем не менее, отметить тот факт, что граф клик в смысле 1 для построения множества минимальных графов смежности не требовался — фактически, строилось множество Clique, которое перебиралось по весу клик.

2.3. Клика, множество клик и граф клик в статье Фильченкова и Тулупьева [26]. В статье [26] под кликой так же, как и в предыдущей работе, понимается полный подграф максимального графа смежности без каких либо ограничений, то есть клика по ТГ.

Тем не менее, как и в предыдущей статье, рассматривались и использовались отнюдь не все клики, а только те, которые вошли в множество Clique, которое определялось удовлетворяющим следующим свойствам:

1) не содержит пустых клик;
2) не содержит одноэлементных клик;
3) не содержит одинаковых клик;
4) не содержит клик с пустым весом;
5) содержит только те клики, вес которых совпадает с весом какого-нибудь ребра графа смежности.

Данное определение почти полностью совпадает с тем, как Clique определялось в статье Тулупьева, Столярова и Ментюкова [18]. Различие состоит в том, что в данном определении дополнительно добавлено требование 5). Исследуя использование множества Clique в [26] можно заключить, что подразумевалось Clique в смысле 1, однако для полной эквивалентности правило 5) в данном определении должно быть переформулировано как «содержит те и только те клики, …».

Иначе в очередной раз определяется не множество, а набор множеств, являющихся подмножествами Clique в смысле 1.

Далее в статье [26] вводится совершенно иное понятие графа клик, которое и будет в дальнейшем использоваться во всех следующих работах. Графом клик называется направленный граф, построенный над множеством Clique, такой, что ребро из клики A в клику B проведено, если клика A содержит клику B и не существует такой клики C, что A содержит C и C содержит B. Будем называть такой граф клик *графом клик в смысле 2*.

Данное определение отличается от определения графа клик в смысле 1 тем, что, очевидно, граф клик в смысле 2 является подграфом графа клик в смысле 1, если они построены над одним и тем же множеством Clique. Наглядно объяснить разницу можно следующим образом: если в графе клик в смысле 1 ребра проводятся от предка к потомку, то в графе клик в смысле 2 — от отца к сыну[1].

Однако с функциональной точки зрения (т.е. с точки зрения использования этого понятия в теоретических рассуждения и алгоритмах построения множества минимальных графов смежности) граф клик оказывается все равно не востребован. Алгоритм построения множества минимальных графов смежности ограничивается лишь последовательным перебором множества клик. При этом, если в алгоритме построения минимальных графов смежности речь идет именно о множестве Clique_1, то улучшенный алгоритм построения минимальных графов смежности, предложенный в той же статье, требует построения другого множества: из множества Clique исключаются все клики, которые состоят только из двух вершин и связывающего их ребра. В статье [26] они были названы монокликами, однако в дальнейшем, в связи с развитием анализа клик и уточнением терминологического аппарата подобные клики стали называться *бикликами* (термину «моноклики» было найдено другое употребление, этот вопрос будет освещен далее)[2]. Если мы обозначим множество биклик как Biclique, то в улуч-

---

[1] Здесь придется заметить, что отец обладает таким важным свойством, что, во-первых, он является предком сына, а, во-вторых, не существует другого предка, который был бы потомком отца и предком сына, что естественным образом соотносится с определением графа клик в смысле 2.

[2] Поскольку данное терминологическое разночтение было достаточно быстро скорректировано, за счет чего установилась единая система классификации клик, мы не будем отдельно выделять два различных подхода к обозначению того, что сейчас называется бикликой.

шенном алгоритме построения минимальных графов смежности рассматривается упорядоченное по весу множество $\mathrm{Clique}_1 \backslash \mathrm{Biclique}$. Граф клик опять не используется для построения множества минимальных графов смежности, однако для работы алгоритма появилась необходимость синтеза множества обязательных ребер $\mathrm{NecessaryEdgeGraph}$, которое представляет собой объединение ребер всех биклик.

2.4. Клика, множество клик и граф клик в статье Фильченкова, Тулупьева и Сироткина [29]. Начиная с работ [29] и во всех дальнейших трудах [19–25, 27, 28, 30, 31], посвященных исследованию глобальной структуры АБС, под кликой понимается полный подграф максимального графа смежности, представляющий собой сужение на значимый вес, то есть вес какого-либо ребра. Будем обозначать такие клики как *клики в смысле 3*.

В данном случае была предпринята попытка определить клику как объект множества Clique_1. И действительно, множество Clique в указанных статьях определялось как множество всех клик в смысле 3. Подобный подход обусловлен стремлением определять только те объекты, с которыми мы действительно имеем дело, а не со всеми возможными, однако клика в смысле 3 значительно отличается от клики с точки зрения ТГ, хотя при этом любая клика в смысле 3 является кликой с точки зрения ТГ.

Определение графа клик в работе [29] совпадает с графом клик в смысле 2.

С функциональной точки зрения клики в смысле 3 применяются в 4–х алгоритмах построения множества минимальных графов смежности [19–22]. Эти алгоритмы используют не само множество Clique_1, а лишь некоторые его специфические подмножества (эти подмножества будут подобно рассмотрены в подразделе 2.5). Важно отметить, что если в алгоритмах [21] и [22] действительно требуется построение графа клик над некоторым подмножеством множества клик, то в алгоритмах [19] и [20] нужно всего лишь построить подмножество множества клик. Необходимость построения именно графовой структуры в алгоритмах [21] и [22] обусловлена требованием установить отношения братства между сыновьями одной клики в смысле 2, что, естественно, требует установления отношения сын–родитель между кликами в смысле 2.

Более того, именно граф клик в смысле 2 является необходимым конструктом для полного доказательства теоремы о множестве минимальных графов смежности (которая в том или ином виде формулировалась и доказывалась в работах [18, 26], однако окончательные полнота и строгость появились лишь в работе [31], а полное выписанное и упрощенное доказательство — в работе [29]). Это доказательство, как и вся ветвь исследований, связанная с владениями, опирается именно на граф клик в смысле 2).

2.5. Классификация клик в статье Фильченкова, Тулупьева и Сироткина [27]. Работа [27] в использовании терминов «клика», «множество клик» и «граф клик» следует за статьей [26]. Однако именно в этой работе приведена подробная классификация клик, разобрав которую, мы сможем построить терминологическую основу для описания различий между объектами, которыми в разных источниках присваиваются названия «клика» и «множество клик».

Прежде всего укажем, о каких кликах идет речь. В работе классифицируются все возможные клики в смысле ТГ, которые получаются сужением максимального графа смежности на какой-либо вес. Будем называть такие клики кликами в смысле 4. Любая клика в смысле 3 является кликой в смысле 4, а любая клика в смысле 4 является кликой по теории графов.

Данный подраздел будет построен следующим образом: мы рассмотрим все типы клик в смысле 4 так, как они даны в [27]. Клики в смысле 4 классифицируются по следующим признакам:

1) по числу собственных ребер, то есть ребер, вес которых совпадает с весом сужения (вес сужения — это вес, на который производилось сужение). При этом выделяются сужения, у которых собственных ребер более одного (*многореберные*), ровно одно (*однореберные*), и ровно ноль (*безреберные*). Последние не являются кликами в смысле 3;
2) по числу детей. Хотя это явно не оговорено, рассматривался граф клик в смысле 2, построенный над множеством клик в смысле 4, за исключением одноэлементных клик[3]. *Родительскими кликами* называются клики, у которых есть дети (есть существуют неодноэлементные клики в смысле 4, содержащиеся в данной), а *бездетыми* — те, у которых детей нет.
3) по числу феодов, до которых сжимаются клики — т. е. по числу компонентов связности соответствующего строго сужения. Здесь отдельно оговаривается, что классификация

[3] Вопрос о том, над каким множеством строится граф клик в смысле 2, является крайне важным, потому что это множество определяет отношения отец–сын на графе клик.

затрагивает именно клики (в смысле 3). При этом выделяются клики, которые сжимаются до ровно одного феода (*моноклики*) и клики, которые сжимаются до более чем одного феода (*стереоклики*).

Введенная классификация позволяет указать $1 \cdot 2 \cdot 1$ (для безреберных) и $2 \cdot 2 \cdot 2$ (для одно- и многореберных), т. е. 10 различных клик в смысле 4. Последовательно рассмотрим все эти клики (для краткости будем далее под кликой понимать именно клику в смысле 4, если явно не указано, в каком смысле употребляется этот термин).

1. Безреберная бездетная клика. Как уже было отмечено, эта клика не является кликой в смысле 3, потому что не имеет собственных ребер. Более того, в данном случае речь идет про сужение максимального графа смежности на вес какой-либо вершины, то есть безреберная бездетная клика состоит из единственной вершины максимального графа смежности. Такая клика называется *псевдокликой*.
2. Безреберная родительская клика. Данный объект является кликой в смысле 3, то есть это клика, полученная сужением на некий незначимый вес, а потому не имеющая ребер, однако имеющая детей. Дети выбираются из потомков, получаемых сужением на веса, содержащие вес рассматриваемой клики. Такая клика называется *монокликой-0*.
3. Однореберная бездетная моноклика. Подобный объект невозможен, поскольку однореберная бездетная клика, как это было показано в [27], содержит ровно две вершины и сжимается до ровно двух феодов.
4. Однореберная бездетная стереоклика. Как было отмечено в предыдущем пункте, однореберная бездетная клика содержит ровно две вершины и сжимается до двух феодов. Такая клика называется *бикликой*.
5. Однореберная родительская моноклика. Данный объект имеет достаточно имеет точно определенную структуру, описанную в [27], и, как было доказано в [30], может не учитываться в построении множества минимальных графов смежности. Такая клика называется *монокликой-1*.
6. Однореберная родительская стереоклика. Поскольку стереоклика имеет более одного собственного ребра, то подобный объект невозможен.
7. Многореберная бездетная моноклика. Поскольку бездетная моноклика состоит только из вершин, которые соединяются

ребрами, то, как было показано, наличие нескольких ребер влечет сжатие до нескольких феодов, поэтому подобный объект невозможен.

8. Многореберная бездетная стереоклика. Данный объект представляет собой просто множество вершин, каждая из которых сжимается до феода. Такая клика называется *бездетной стереокликой*.
9. Многореберная родительская моноклика. Данный объект представляет собой один феод, который, тем не менее, имеет ребра между вершинами, в него входящими, а также детей. Многореберная родительская моноклика также имеет строго определенную структуру, описанную в [27]. Такая клика называется *монокликой*-n.
10. Многореберная родительская стереоклика. Данная клика называется *родительской стереокликой*.

Таким образом, мы сумели выделить 7 различных клик в смысле 4. Перечислим существующие клики еще раз для удобства сравнения.

Псевдоклика — вершина максимального графа смежности, то есть сужение максимального графа смежности на вес, совпадающий с весом вершины. Поскольку множество псевдоклик совпадает с множеством вершин максимального графа смежности, то есть набором МФЗ, то будем называть его V.

Моноклика-0 — непустая клика, получаемая сужением максимального графа смежности на незначимый вес, отличный от веса вершины. Монокликами-0 являются все те клики максимального графа смежности, совпадающие с сужениями максимального графа смежности, но при этом не являющиеся значимыми. Будем обозначать множество таких клик как $\mathrm{MZeroClique}$.

Биклика — клика, состоящая ровно из двух вершин. Как было показано [19], для синтеза множества минимальных графов смежности такие клики можно исключить из построения, сохранив, однако, соответствующее ребро (для этого используется $\mathrm{NecessaryEdgesGraph}$). Множество таких клик будем обозначать как $\mathrm{Biclique}$.

Моноклика-1 — клика, имеющая двух сыновей по k вершин в каждом, которые пересекаются по $k-1$ вершине, и не имеющая собственных (доменных) вершин [27]. Как было показано [19], для синтеза множества минимальных графов смежности такие клики можно исключить из построения. Будем обозначать множество таких клик как $\mathrm{MOneClique}$.

Бездетная стереоклика — клика, не имеющая детей и состоящая более чем из двух вершин. Будем обозначать множество таких клик как $\mathrm{BStereoclique}$.

Моноклика-n — клика, состоящая ровно из одного братства [27]. Как было показано [19], для синтеза множества минимальных графов смежности такие клики можно исключить из построения. Будем обозначать множество таких клик как $\mathrm{MNClique}$.

Родительская стереоклика — клика, имеющая детей и состоящая из более чем двух вершин, которая сжимается до более чем одного феода. Будем обозначать множество таких клик как $\mathrm{PStereoClique}$.

Дополнительно будем обозначать множество всех моноклик как $\mathrm{MClique}$:

$$\mathrm{MClique} = \mathrm{MZeroClique} \cup \mathrm{MOneClique} \cup \mathrm{MNClique},$$

множество моноклик, являющихся кликами в смысле 3, как $\mathrm{Monoclique}$:

$$\mathrm{Monoclique} = \mathrm{MOneClique} \cup \mathrm{MNClique} = \mathrm{MClique} \backslash \mathrm{MZeroClique},$$

а множество стереоклик как $\mathrm{Stereoclique}$:

$$\mathrm{Stereoclique} = \mathrm{BStereoclique} \cup \mathrm{PStereoclique}.$$

Замечание 1. Благодаря введенным обозначениям мы можем явно выразить множество Clique_1:

$$\mathrm{Clique}_1 = \mathrm{Monoclique} \cup \mathrm{Biclique} \cup \mathrm{Stereoclique}.$$

Как уже было сказано в разделе 2.3, в работе [26] для построения множества минимальных графов смежности помимо Clique_1 использовалось также и $\mathrm{Clique}_1 \backslash \mathrm{Biclique}$. Во всех последующих работах [19–22], посвященных построению множества минимальных графов смежности, использовалось исключительно множество $\mathrm{Stereoclique}$.

2.6. Обзор подходов к использованию понятий «клика», «множество клик» и «граф клик».

Для того, чтобы систематизировать подходы, представленные в предыдущих подразделах, составим сводную таблицу (см. таблицу).

Понятие «клика» используется для обозначения трех объектов:

- полного подграфа (клика по ТГ) [32];
- полного подграфа максимального графа смежности, соответствующего значимому сужению максимального графа смежности (клика в смысле 3) [26];
- полного подграфа максимального графа смежности, соответствующего произвольному сужению максимального графа смежности [27].

Понятие «множество клик» используется для обозначения двух объектов:

- множества максимальных по включению клик по ТГ (Clique по ТГ) [32];
- множества клик в смысле 1 (Clique_1) [18].

Помимо этого графы клик строятся над следующими множествами:

- $\mathrm{Clique}_1 \backslash \mathrm{Biclique}$ [26];
- Stereoclique [19–22];

Понятие «граф клик» используется для обозначения следующих объектов:

- ненаправленного графа, ребра которого соединяют клики, содержащие общие вершины (граф клик по ТГ) [32];
- ненаправленный граф, ребро из одной клики проведено в другую, если первая клика содержит вторую (граф клик в смысле 1) [18];
- ненаправленный граф, ребро из одной клики проведено в другую, если первая клика содержит вторую, и не существует третей клики, такой, что первая клика содержит третью, а третья содержит вторую (граф клик в смысле 2) [26].

3. Новая система терминов для третичной структуры АБС и связанных с ней объектов. Обзор различных подходов к определению понятий клика, множество клик и граф клик показал, что существует большое количество несогласованных между собой понятийных аппаратов, которые описывают различных объекты третичной структуры алгебраической байесовской сети. Подобная ситуация значительно усложняет исследования в данном направлении. Более того, само понятие «третичной структуры» определено неоднозначно.

В этом разделе будет введена единая перспективная система терминов, описывающая как существующие и используемые объекты, так и те, которые пока не нашли применения, но могут быть полезными в использовании в задачах автоматического обучения глобальной структуры алгебраических байесовских сетей.

Мы будем следовать принципу использования терминов в наиболее употребительном для них значении. В данном случае наибольший приоритет имеет смысл терминов, с которым они употребляются в теории графов, а более ранние работы по исследованию глобальной структуры менее приоритетны, чем более поздние, потому что в самой теории устоялись и нашли практическое воплощение именно объекты, обозначаемые в более поздних работах.

Сводная таблица подходов к определению понятий «клик», «множество клик» и «граф клик» в различных источниках.

<table>
<tr><th>Контекст</th><th>Клика</th><th>Множество клик Clique</th><th>Граф клик</th></tr>
<tr><td>Теория графов</td><td rowspan="3">Клика по ТГ

полный подграф</td><td>Clique по ТГ

множество максимальных по включению клик по ТГ</td><td>Граф клик по ТГ

ненаправленный граф, ребра которого соединяют клики, содержащие общие вершины.</td></tr>
<tr><td>Статья Тулупьева, Ментюкова и Столярова [18]</td><td rowspan="3">Clique в смысле 1

множество клик по ТГ:
1) без пустых клик;
2) без одноэлементных клик;
3) без клик с одинаковым весом;
4) без клик с пустым весом;
5) содержит те и только те клики, вес которых совпадает с весом какого-либо ребра графа смежности.</td><td>Граф клик в смысле 1

направленный граф, ребро из клики A в клику B проведено, если $B \subset A$.</td></tr>
<tr><td>Статья Фильченкова и Тулупьева [26]</td><td rowspan="3">Граф клик в смысле 2

Ненаправленный граф, ребро из клики A в клику B проведено, если $(B \subset A)$ и $\&(\nexists C: B \subset C \subset \subset A)$.</td></tr>
<tr><td>Статья Фильченкова, Тулупьева и Сироткина [29]</td><td>Клика в смысле 3

полный подграф максимального графа смежности, представляющий собой сужение на значимый вес.</td></tr>
<tr><td>Статья Фильченкова, Тулупьева и Сироткина [27]</td><td>Клика в смысле 4

полный подграф максимального графа смежности, представляющий собой сужение на некоторый (необязательно значимый) вес.</td><td>Множество клик в смысле 4, состоящих более чем из одной вершины.</td></tr>
</table>

3.1. Клики. Как было показано во втором разделе этой работы, клики по теории графов являются слишком обобщенным понятием для использования в анализе графов смежности. Наиболее важными для исследований являются клики в смысле 3, однако дополнительно необходимо определить все уровни обобщения понятия графа клик в смысле 3.

Понятия клик и максимальных клик используются в согласовании с теорией графов [32, 40].

Определение 1. *Клика* — полный подграф некоторого графа.

Определение 2. *Максимальная клика* — максимальная по включению клика.

Во всех работах, в которых встречается понятие «сужение» (начиная с [18]), оно определяется для произвольного графа смежности. Однако используется оно исключительно для максимального графа смежности, и авторы настоящей работы не видят перспектив для использования этого термина для произвольных графов смежности. По этой причине решено было изменить использование понятия сужения.

Определение 3. *Сужение* на вес U — подграф максимального графа смежности, состоящий из вершин и ребер исходного графа, вес которых содержит U.

Отметим, что набор максимальных фрагментов знаний, над которым рассматриваются графы смежности, изначально задан, поэтому задан максимальный граф смежности, который единственен для данного набора МФЗ. Поэтому и указание максимального графа смежности при употреблении термина «сужение» не является обязательным.

Следует также отметить, что в случае необходимости понятие «сужение» может также применяться и по отношению к произвольному графу, если явно этот граф указать. Однако, как было сказано выше, сужение немаксимальных графов смежности вряд ли будет где-нибудь использовано, поэтому мы определим сужение именно как сужение максимального графа смежности, хотя можно было определить как сужение произвольного графа и договориться понимать под сужением, если граф не указан, именно максимальный граф смежности.

Определение 4. *Значимая клика* веса U — сужение на значимый вес U.

Замечание 2. Любая значимая клика является кликой.

Значимая клика соответствует клике в смысле 3.

Непустое сужение на непустой вес соответствует клике в смысле 4.

3.2. Множество клик. В данном подразделе мы укажем те объекты, над множествами которых будут строиться графы клик.

Для этого прежде всего заметим, что классификация клик в смысле 4, предпринятая в работе [27] и разобранная в подразделе 2.5, может быть легко сведена к классификации непустых сужений: для этого необходимо добавить лишь сужение на пустой вес, которое будет совпадать с максимальным графом смежности и в общем случае не будет являться даже кликой по теории графов. В работе [24] подобный объект уже получил название *праклика*.

Благодаря этому мы можем выделить ряд множеств.

Определение 5. *Множество сужений* — множество всех непустых сужений.

Определение 6. *Множество значимых клик* — множество всех значимых сужений. Будем обозначать его как Clique.

Множество значимых клик соответствует множеству Clique_1.

Определение 7. *Расширенное вверх множество значимых клик* — множество значимых клик, к которому добавлена праклика. Будем обозначать его как $\mathrm{Clique}^{\uparrow}$.

Определение 8. *Расширенное вниз множество значимых клик* — множество значимых клик, к которому добавлено множество псевдоклик. Будем обозначать его как $\mathrm{Clique}_{\downarrow}$.

Определение 9. *Расширенное множество значимых клик* — множество значимых клик, к которому добавлено множество псевдоклик и праклики. Будем обозначать его как $\mathrm{Clique}_{\downarrow}^{\uparrow}$.

3.3. Граф клик.

Определение 10. *Граф клик* — ненаправленный граф, построенный на множестве максимальных клик, ребра которого проведены между двумя максимальными кликами, тогда и только тогда, когда две эти клики содержат общие вершины [32].

Под графом клик будем понимать граф клик по теории графов.

Прежде, чем определять графы, определим необходимые взаимосвязи между сужениями.

Определение 11. Сужение N_U на вес U называется *предком* сужения N_V на вес V, если $U \subset V$, или, что то же самое, $N_U \supset N_V$.

Определение 12. Сужение N_V называется *потомком* сужения N_U, если N_U — предок N_V.

Определение 13. Сужение N_U на вес U называется *родителем* сужения N_V на вес V, если N_U является предком N_V, и не существует такого N_S, что N_S является предком N_V и потомком N_U.

Определение 14. Сужение N_V называется *сыном* сужения N_U, если N_U — родитель N_V.

Определение 15. Сужение N_p называется *братом* N_q, если N_p и N_q являются сыновьями одного и того же сужения, и, кроме того, содержат общие вершины [31].

Для расширенного вниз множества значимых клик и расширенного множества значимых клик определение 15 можно переформулировать в рамках введенных терминов.

Определение 15*. Сужение N_p называется *братом* N_q, если N_p и N_q являются сыновьями одного и того же сужения, и, одновременно, предками одного и того же сужения.

В работе [31] также отдельно выделялось *понятие полусиблинга*, также обозначающее отношение между двумя сужениями, однако определяемое третьим сужением. Так, два сужения могут быть полусиблингами для одного сужения и не быть ими для другого сужения.

Благодаря введенным отношениям, мы можем ввести понятия, которые будут соответствовать как уже обозначаемым объектам, так и тем объектам, которые пока лексически не выделены, однако кажутся авторам перспективно полезными.

Определение 16. *Родительский граф* — направленный граф, в котором ребра соответствуют отношениям родитель–сын.

Родительский граф соответствует графу клик в смысле 2.

Определение 17. *Родовой граф* — направленный граф, в котором ребра соответствуют отношениям предок–потомок.

Родовой граф соответствует графу клик в смысле 1.

Замечание 3. Родовой граф является транзитивным замыканием родительского графа.

Определение 18. *Семейный граф* — гибридный граф, получающийся дополнением родительского графа ненаправленными ребрам, соответствующими отношениям брат–брат.

Определение 19. *Родственный граф* — гибридный граф, получающийся дополнением родительского графа ненаправленными ребрами, соответствующими отношениям брат–брат.

Определение 20. *Родословный граф* — граф, определяемый над множеством сужений.

Родословный граф является обобщением графов, к которым относятся родительский, родовой, семейный и родственный графы. Также важно отметить, что родословным графом над неким множеством A может быть и граф, не содержащий ребер — это объекту соответствует само множество A.

3.4. Определение понятия третичной структуры. В подразделе 3.2 были рассмотрены подмножества множества сужений, которые могут служить для построения родословных графов, а в подразделе 3.3 были рассмотрены различные родословные графы, которые можно построить над каждым подмножеством сужений. Таким образом, мы получили целое семейство структур.

Определение 21. *Третичная полиструктура* — семейство родословных графов над некоторым подмножеством множества сужений, объединенное с множеством подмножеств сужений.

Дополнительно можно выделить достаточно важного представителя этого семейства, который кажется авторам статьи наиболее полно и точно представляющим указанное семейство.

Определение 22. *Третичная структура* — родительский граф над расширенным множеством значимых клик.

4. Заключение. В данной работе выполнена структуризация семантического поля, связанного с отношениями сужений максимального графа смежности, которые названы третичной полиструктурой АБС. Помимо собственно третичных полиструктуры и структуры были разграничены объекты, которые в различных источниках обозначались как «клика», «множество клик» и «граф клик».

Получившаяся система терминов характеризуется полнотой систематизации, поскольку описывает все используемые и связанные с третичной структурой объекты. Также получившаяся система терминов является неизбыточной, потому что каждому обозначаемому соответствует единственное обозначающее, и все обозначаемые актуальны или перспективно актуальны для теории глобальной структуры АБС. Важно также отметить, что введенная система терминов согласуется с теорией графов, не переопределяя общепринятых терминов.

В статье удалось разложить объекты третичной полиструктуры по множеству сужений, над которыми они строятся, и принципу построения ребер, что позволяет компактно описать семейство структур.

Сформулированная система терминов должна облегчить исследования третичной полиструкутры, роль которой начинает усиливаться по мере ее изучения. Наиболее перспективным направлением является создание и описание алгоритмов глобального логико-вероятностно вывода с использованием третичной полиструктуры (и, вероятно, третичной структуры). Помимо этого на текущем уровне исследований именно недостаток знаний относительно третичной структуры мешает формированию критерию качества «лучшей» вторичной структуры, и, соответственно, ее построению.

Литература

1. *Конфуций* Беседы и суждения. Ростов-на-Дону: Феникс. 2006. 304 с.
2. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. М.: Вильямс, 2005. 1296 с.
3. *Опарин В.В., Тулупьев А.Л.* Синтез графа смежности с минимальным числом ребер: формализация алгоритма и анализ его корректности // Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 11. С. 142–157.
4. *Опарин В.В., Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Матроидное представление семейства графов смежности над набором фрагментов знаний // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2010. Вып. 4. С. 73–76.
5. *Сироткин А.В.* Модели, алгоритмы и вычислительная сложность синтеза согласованных оценок истинности в алгебраических байесовских сетях // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2009. №11. С. 32–37.
6. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 40 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).
7. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: локальный логико-вероятностный вывод: Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 80 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).
8. *Тулупьев А.Л.* Ациклические алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный вывод // Нечеткие системы и мягкие вычисления: Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений. 2006. Том 1, № 1. С. 57–93.
9. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети доверия и алгебраические байесовские сети: сравнительный анализ выразительной мощности // Информационные технологии и интеллектуальные методы. 1997. Вып. № 2. С. 121–147.
10. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. 140 с. (Элементы мягких вычислений).
11. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в алгебраических байесовских сетях. Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 3. С. 144–151.
12. *Тулупьев А.Л.* Основы теории алгебраических байесовских сетей: программа спецкурса для студентов старших курсов и аспирантов. СПб.: СПбГУ, 2007. 7 с.
13. *Тулупьев А.Л.* Преобразование ациклических байесовских сетей доверия в алгебраические байесовские сети // Известия высших учебных заведений: Приборостроение. 2009. № 3. С. 21–23.
14. *Тулупьев А.Л.* Согласованность данных и оценка вероятности альтернатив в цикле стохастических предпочтений // Известия высших учебных заведений: Приборостроение. 2009. № 7. С. 3–8.
15. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.
16. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Алгебраические байесовские сети: принцип декомпозиции и логико-вероятностный вывод в условиях неопределенности // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2008. № 10. т. 6. С. 85–87.
17. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009, 400 с.

18. *Тулупьев А.Л., Столяров Д.М., Ментюков М.В.* Представление локальной и глобальной структуры алгебраической байесовской сети в Java-приложениях // Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. СПб.: Наука, 2007. С. 71–99.
19. *Фильченков А.А.* Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 1 (12). С. 119–133.
20. *Фильченков А.А.* Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик-собственников // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 3 (14) С. 150–169.
21. *Фильченков А.А.* Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи клик владений // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 2 (13). С. 119–133.
22. *Фильченков А.А.* Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи клик-собственников владений // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 4 (15). С. 193–212.
23. *Фильченков А.А.* Алгоритмы построения третичной структуры алгебраической байесовской сети // Труды СПИИРАН. 2011. Вып. 17. С. 197–218.
24. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л.* Анализ циклов в минимальных графах смежности алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. 2011. Вып. 17. С. 151–173.
25. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л.* Понятие торакса в применении к исследованию графов смежности алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. 2011. Вып. 16. С. 186–205.
26. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л.* Структурный анализ систем минимальных графов смежности Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 11. С. 104–127.
27. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Компаративный анализ клик минимальных графов смежности алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 2 (13). С. 87–105.
28. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Мощность множества минимальных графов смежности // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 4 (15). С. 136–161.
29. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Особенности анализа вторичной структуры алгебраической байесовской сети // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 1 (12). С. 97–118.
30. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Ребра графов смежности в контексте компаративного анализа клик минимальных графов смежности алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 3 (14). С. 132–149.
31. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Структурный анализ клик минимальных графов смежности // Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика. 2011. №20. С. 139–151.
32. *Харари Ф.* Теория графов. М.: УРСС. 2003, 296 с.
33. *Bayes T., Price R.* An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 53. 1763, 370–418 pp.
34. *Bron C., Kerbosh J.* Algorithm 457 — Finding all cliques of an undirected graph // Comm. of ACM, 16. 1973. p. 575—577.
35. *Cowell R.G., Dawid A.P., Lauritzen S.L., Spiegelhalter D.J.* Probabilistic Networks and Expert Systems. NY.: Springer-Verlag, 1997. 370 p.
36. *Gorodetsky V.I., Drozdgin V.V., Jusupov R.M.* Application of Attributed Grammar and Algorithmic Sensitivity Model for Knowledge Representation and Estimation // Artificial Intelligence and Information, Control Systems of ROBOTSA. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1984, P. 232–237.
37. *Jensen F.* Bayesian Networks and Decision Graphs. NY.: Springer. 2001. 268 p.

38. *Karp R.M., Miller R.E., Thatcher J.W.* Reducibility Among Combinatorial Problems // The Journal of Symbolic Logic, Vol. 40, No. 4 (Dec., 1975), pp. 618-619.
39. *Korb K., Nicholson A.* Bayesian Artificial Intelligence. NY.: Chapman amnd Hall/CRC. 2004. 364 p.
40. *Kuratowski K.* Sur le probléme des courbes gauches en Topologie // Fundamenta Mathematicae 15. 1930. P. 271–283.
41. *Laplace P.* Essai philosophique sur les probabilités. 6e édition, 1840. Paris: Bachelier. 282 p.
42. *Neyman J.* First Course in Probability and Statistics. 1950. Henry Holt & Co. 350 p.
43. *Pearl J.* Distributed Revision of Composite Beliefs. // Artificial Intelligence, vol. 33. 1987. P. 173–215.
44. *Pearl J.* Fusion, propagation, and structuring in belief networks. // Artificial Intelligence, vol. 29, 1986. P. 241–288.
45. *Pearl J.* Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems. Morgan Kaufmann, 1988. 552 p.
46. *Venn J.* The Logic of Chance. 1866. General Books LLC. 184 p.

Фильченков Андрей Александрович — аспирант кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ), младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН. Область научных интересов: автоматическое обучение вероятностных графических моделей. Число научных публикаций — 27. aaafil@mail.ru, aaf@iias.spb.su; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450. Научный руководитель — А.Л. Тулупьев.

Filchenkov Andrey Alexandrovich — PhD student of Computer Science Department, SPbGU, junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS Research area: machine learning of probabilistic graphical models. The number of publications — 27. aaafil@mail.ru, aaf@iias.spb.su; SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450. Scientific advisor — A.L. Tulupyev.

Тулупьев Александр Львович — д.ф.-м.н., доцент; заведующего лабораторией теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН, профессор кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: представление и обработка данных и знаний с неопределенностью, применение методов математики и информатики в социокультурных исследованиях, применение методов биостатистики и математического моделирования в эпидемиологии, технология разработки программных комплексов с СУБД. Число научных публикаций — 250. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

Tulupyev Alexander Lvovich — PhD in Computer Science, Dr. of Sc., Associate Professor; Head of Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS, Professor of Computer Science Department, SPbSU. Research area: uncertain data and knowledge representation and processing, mathematics and computer science applications in socio-cultural studies, biostatistics, simulation, and mathematical modeling applications in epidemiology, data intensive software systems development technology. Number of publications — 250. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Рекомендовано ТиМПИ СПИИРАН, зав. лаб. А.Л. Тулупьев, д.ф.-м.н., доц.

Работа поступила в редакцию 02.08.2011.

Поддержка исследования. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № **09-01-00861**-а «Методология построения интеллектуальных систем поддержки принятия решений на основе баз фрагментов знаний с вероятностной неопределенностью», а также грантом правительства Санкт-Петербурга для победителей конкурса грантов Санкт-Петербурга для студентов, аспирантов, молодых ученых, молодых кандидатов наук 2010 г., диплом ПСП№10697.

РЕФЕРАТ

Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. **Третичная структура алгебраической байесовской сети.**

Алгебраическая байесовская сеть (АБС) представляет собой вероятностную графическую модель систем знаний с неопределенностью. Выделяют три структуры АБС: первичную, которая состоит из фрагментов знаний, хранящих знания с неопределенностью, вторичную которая является графом, построенным над первичной структурой, и третичную, которая также является графом, но строится над определенными подмножествами вершин первичной структуры.

Третичная структура требуется для построения и анализа минимальных графов смежности, а также для определения и построения класса более оптимальных вторичных структур. Тем не менее, все еще не сложилось единого подхода к определению как третичной структуры, так и связанных с ней объектов.

В работе рассматриваются использование в различных источниках (в том числе классической литературы по теории графов) трех понятий: понятия клики, понятия множества клик, над которым строится граф клик, и понятие графа клик. В теории АБС понятие «клика» имеет три дополнительных смысла «множество клик» — один дополнительный смысл и граф клик — два дополнительных смысла, отличных от принятых в теории графов.

На основании компаративного анализа использования терминов предложена новая перспективная система терминов, отличающаяся неизбыточностью и полнотой систематизации. Сужение на вес определено как подграф максимального графа смежности, веса всех вершин и ребер которого содержат этот вес. Значимая клика определена как сужение на значимый вес. Расширенное множество значимых клик определено как множество значимых клик, к которому добавили множество вершин и сужение на пустой вес (праклику). Класс графов, определяемых над множеством сужений, назван классом родословных графов. Выделены несколько типов родословных графов, а частности, родительские графы — направленные графы, в которых ребра проведены от сужений–родителей к сужениям–детям (сужение–родитель является минимальным сужением, строго содержащим сужение–сына).

Третичная полиструктура АБС определена как семейство родословных графов над подмножествами множества сужений. Третичная структура АБС определена как родительский граф над расширенным множеством значимых клик.

ABSTRACT

Filchenkov A.A., Tulupyev A.L. **The Algebraic Bayesian Network Tertiary Structure.**

Algebraic Bayesian network (ABN) is a probabilistic graphical model of systems of knowledge with uncertainty. Three structures of ABN are marked out: the primary structure, which consists of knowledge patterns storing knowledge with uncertainty, the secondary structure, which is a graph constructed over the primary structure, and the tertiary structure, which is also a graph, but built over the specified subset of the primary structure vertices.

The tertiary structure is required for synthesizing and analyzing the minimal join graphs, as well as for defining and synthesizing a class of optimal secondary structures. Nevertheless, a unified approach to define the tertiary structure and associated objects is still not developed

The use of the three concepts is overviewed in the paper: the concept of clique, the concept of clique set and a concept of clique graph in a framework of different sources (including the classic literature on graph theory). In theory of ABN the term of “clique” has three additional meanings, concept “clique set” has one additional meaning and concept of “clique graph” has two additional meanings in comparison with the graph theory.

The system of terms characterized with non-redundancy and systematization completeness, is suggested in the paper on the basis of comparative analysis. A narrowing on a weight is defined as the maximum join graph subgraph of all the vertices and edges whose weights contain the weight. Useful clique is defined as a useful narrowing on a significant weight. The expanded set of useful cliques is defined as the useful clique set united with the vertices set and with a narrowing on the empty weight (praclique). The class of graphs, defined over the narrowings set, is called the genealogical graphs class. Some types of genealogical graphs are marked out. In particular, parent graph is defined as undirected graph in which edges are drawn from a narrowing–parent to a narrowing-child (narrowing–parent is a minimal narrowing, strictly containing the narrowing-son).

ABN tertiary polystructure is defined as a family of genealogical graphs over subsets of the narrowings set. ABN tertiary structure is defined as the parent graph over the extended set of useful cliques.