

Б.Г. МАЙОРОВ  
**МОДЕЛИ СОСТАВНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛУВОЛН И  
СВЯЗЬ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ С ЭНТРОПИЕЙ  
ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ**

*Майоров Б.Г. Модели составных гармонических полувольт и связь дискретизации времени с энтропией временных параметров сигналов.*

**Аннотация.** Целью данного исследования является определение связи энтропии временных параметров сигналов в робастной системе управления с величиной дискретизации системного времени (в развитие работ trspy 1185, trspy 1274). В качестве примера объекта исследования рассмотрен процесс и его сигналы экстренного торможения высокоскоростного состава при наличии скольжения колёс по рельсам. Решена задача нахождения абсолютной погрешности ступенчатой и линейной интерполяции сигнала управления по равномерным выборкам из него с применением моделей составных гармонических полувольт. Предварительно, при обследовании объекта управления, определяются максимальные величины параметров сигнала и полувольт: скорость, ускорение и резкость. Параметры спектра отсутствуют по причине большой инерционности объектов управления, процессов и сигналов. Для определения величин интервалов равномерной дискретизации времени рассмотрены две группы моделей «гармонических полувольт». Первая группа моделей описывается гармоническими функциями времени, параметры которых согласованы. Вторая группа моделей описывается составными гармоническими функциями времени, тем самым согласуются временные параметры сигналов. Доказано, что при увеличении энтропии максимальных величин параметров сигналов увеличивается величина интервала дискретизации времени без увеличения погрешности интерполяции. Таким образом, величина энтропии параметров сигналов служит индикатором их рассогласованности. Приведены результаты моделирования и графики, полученные в среде математического пакета MathCAD. Результаты предназначены для оптимизации загрузки задачами ввода и первичной обработки информации процессоров в робастных системах автоматизации реального времени, например, используемых для управления высокоскоростными поездами при штатном экстренном торможении и экстренном торможении в условиях скольжения или юза.

**Ключевые слова:** робастные системы, реальное время, дискретизация времени, интерполяция нулевого и первого порядка, составные, гармонические функции, энтропия параметров сигналов, модель торможения с юзом высокоскоростных поездов.

**1. Введение.** Областью применения результатов настоящей статьи является использование полученных моделей при проектировании систем реального времени (СРВ) для объектов, управляемых, преимущественно, в автоматическом режиме. В подобных технических системах для первичной обработки аналоговых сигналов [1, 2] применяют бортовые процессоры. При этом часто отсутствует (неизмерима) информация о частотном спектре сигналов управляемых процессов в большинстве случаев в связи с большой инерционностью объектов управления. Эти сигналы являются сигналами объекта управления и их можно назвать

сигналами с трудно определяемым спектром [1, 2, 3]. Для наглядности, в дальнейшем, получим модель для описания интервала экстренного торможения высокоскоростного состава с юзом (скольжением) колёсных пар, сигналы процесса которого не имеет спектра. Правила экстренного торможения реализуют в соответствии с Европейской системой управления поездами (European Train Control System (ETCS)), где они связаны с регулированием ускорения (замедления) в зависимости от способности торможения поезда, данных рельефа и меняющейся погоды на маршруте движения [4 – 8].

Для первичной обработки сигналов с трудно определяемым спектром в системах реального времени необходимо:

- определять величину постоянного шага равномерной дискретизации сигнала процесса по времени по результатам замеров максимальных величин амплитудно-временных параметров сигнала на этапе предварительного обследования объекта управления: допустимого отклонения –  $\Delta$  от линейной аппроксимации соседних выборок, максимальной скорости –  $V$ , максимального ускорения –  $a$  и максимальной резкости движения –  $R$ ;

- обработку информации и выдачу сигнала управления на исполнительные органы СРВ проводить за один или два интервала дискретизации времени  $T_g$ , где индекс «г» – от слова гармонический;

- восстанавливать сигнал между выборками при помощи интерполяции нулевого (ступени), первого порядка (прямые) [1], при этом сохранять значения сигнала без изменений в точках выборок [9 – 11].

Критерием оптимальной обработки таких сигналов в СРВ является максимум интервала дискретизации времени  $T_g$ . Очевидным является тот факт, что чем больше  $T_g$ , тем меньше выборок будет сделано из одного сигнала процесса с сохранением заданной величины погрешности интерполяции  $\Delta$ , тем больше сигналов процессов можно подвергнуть первичной обработке в единицу времени в СРВ [12].

Задача и модель для определения величины интервала равномерной дискретизации времени  $T_g$  сигнала должна математически связывать максимальные амплитудно-временные параметры сигнала  $\{\Delta, V, a, R\}$  и интерполяцию нулевого или первого порядка по равномерным выборкам.

Наличие сигналов с трудно определяемым спектром на объекте управления свидетельствуют о неопределённости информационного описания объекта управления СРВ. Такие СРВ можно отнести к робастным системам управления [11, 12]. Модели робастных процессов и сигналов традиционно описывают в амплитудно-временной области. В системах управления роботом траекторию

оптимального процесса управления задают в виде сопрягаемых парабол [9, 13, 14]. Моделируют равноускоренное движение манипулятора руки квадратичным трёхчленом [15], в качестве коэффициентов трёхчлена используют максимальные значения ускорения и скорости сигнала. Осуществляют сопряжение параболами смежных участков траектории движения космического аппарата [16]. В оптико-электронных системах для обнаружения и сопровождения подвижных объектов, которые имеют значительные угловые скорости и ускорения, используют модель «машина Дубинса» [17 – 19]. Представляют сейсмические события в виде линейных степенных функций для упрощения анализа больших объёмов данных [20].

Известны две формулы В.Н. Хлистунова [21] в виде линейного и квадратичного остаточного члена формулы Лагранжа в измерительной технике и в других применениях систем управления [2]. Обобщением этих двух формул является формула [22], которая обосновывает существенное увеличение интервала дискретизации времени при сохранении точности интерполяции сигнала. Положительный результат дают модели в виде гармонических полуоволн [9, 23, 25]. Во всех примерах, в качестве основного физико-математического обоснования моделей, применены основополагающие идеи *принципа максимума Л.С. Понтрягина и понятия частоты Найквиста (Nyquist H.)* [2, 26].

**Постановка задачи:** Определение максимального интервала равномерной дискретизации времени  $\max T_r = 1/2f$  при неизвестной частоте Найквиста  $2f$  (где неизвестна  $f$  частота среза спектра), когда задана погрешность линейной интерполяции соседних выборок  $\max p^{(0)}(t) = \Delta$ , найдены и замерены, предварительно, максимальные производные сигнала процесса, максимальные параметры  $\{\Delta, V, a, R\}$ . Измерения максимальных параметров проводятся не в реальном времени, а на предварительном этапе обследования объекта управления, адаптирующая интерполяция в этом случае не применяется. Для измерений используют, как правило, цифровые аналитические осциллографы или анализаторы сигналов [3].

В упомянутых выше исследованиях не отражено: как изменение величины рассогласования (энтропии  $H$ ) максимальных величин амплитудно-временных параметров процесса (сигнала)  $\{\Delta, V, a, R\}$  связано с величиной интервала дискретизации времени или интервалом выдачи управляющих воздействий на объект управления?

В тоже время энтропия является математическим индикатором и характеристикой степени беспорядка или рассогласования, поэтому необходимо исследовать её роль в применении к соотношению

величин  $\{\Delta, V, a, R\}$ . Это позволит определять (индексировать) в произвольный момент времени необходимость применения результатов исследования предложенных моделей сигналов с трудно определяемым спектром к управлению в робастных системах реального времени.

В данной работе применена методика построения и исследованы свойства гармонических полуволн с согласуемыми параметрами для моделирования сигналов в робастных системах. Это позволяет создать модели гармонических полуволн с согласуемыми параметрами и определить связь энтропии рассогласования с величиной интервалов дискретизации сигналов без потери точности интерполяции процесса (сигнала) по выборкам.

**2. Свойства моделей гармонических полуволн сигнала управляемого процесса и основные выражения.** Для устранения упомянутых особенностей и нахождения зависимости интервала дискретизации времени от коэффициентов рассогласования максимальных скорости и ускорения сигналов или от степени энтропии этих параметров применим допущение и рассмотрим две группы моделей: с согласованными амплитудно-временными параметрами и с согласуемыми параметрами.

*Определение 1. «Согласованная гармоническая полуволна является выпуклой гармонической траекторией (функцией времени, заданной одной формулой), по которой сигнал процесса изменяется между значениями в соседних выборках при одновременном учёте максимальных параметров  $\{\Delta, V, a, R\} (1 \leq n \leq 3)$  на временном интервале  $0 \leq t \leq T_r$ . При этом  $(n+1)$  максимальный параметр входит в равенство, названное условием согласованности параметров».*

Допущение (гипотеза подобия). Гармоническая полуволна имеет максимальные временные параметры  $\{\max |r^{(i)}(t)|, \text{ где } 1 \leq i \leq n\}$ , которые имеет сигнал  $r(t)$ , поэтому может быть использована, как математическая модель для исследования взаимозависимостей параметров сигнала  $r(t)$  и величины шага равномерной дискретизации  $T_r$  сигнала  $r(t)$  по времени [9, 25].

Общие свойства гармонической полуволны. Модель гармонической полуволны (ГПВ<sup>r</sup>) является выпуклой функцией времени, симметрична относительно прямой  $t = 0.5T_r$ , начало и конец полуволны совпадают с двумя соседними выборками или замыкаются интервалом равномерной дискретизации  $T_r$  сигнала  $r(t)$  процесса, амплитуда полуволны равна  $\max^{(0)}(0.5T_r) = \Delta$ .

Допущению и Общим свойствам соответствует математическая модель в виде простейшей гармонической функции времени [9, 25]:

**3. Согласованная модель гармонической полуволны и нахождение шага дискретизации времени сигнала процесса.** Уравнение простейшей гармонической полуволны [9, 25]:

$$p(t) = \Delta \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $0 \leq t \leq T_r$ ,  $T_r = T/2 = 1/2f$  – интервал Найквиста,  $f$  – частота среза в спектре сигнала  $p(t)$  после цифрового фильтра нижних частот,  $T$  – период частоты среза,  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота,  $\Delta$  – амплитуда гармонической полуволны или максимальная погрешность линейной аппроксимации двух выборок из полуволны в моменты времени  $t=0$  и  $t=T_r$ . Первая производная ( $i=1$ ) от гармонической полуволны:

$$p^{(1)}(t) = \omega \Delta \cos \omega t = V(t), \quad (2)$$

где ( $i=1$ ) – порядок производной,  $1 \leq i \leq n$ . Вторая ( $i=2$ ) и третья ( $i=3$ ) производные от гармонической полуволны [25]:

$$p^{(2)}(t) = -\omega^2 \Delta \sin \omega t = a(t); \quad p^{(3)}(t) = -\omega^3 \Delta \cos \omega t = R(t). \quad (3)$$

Гармоническая полуволна и три производные от неё изображены на рисунке 1.

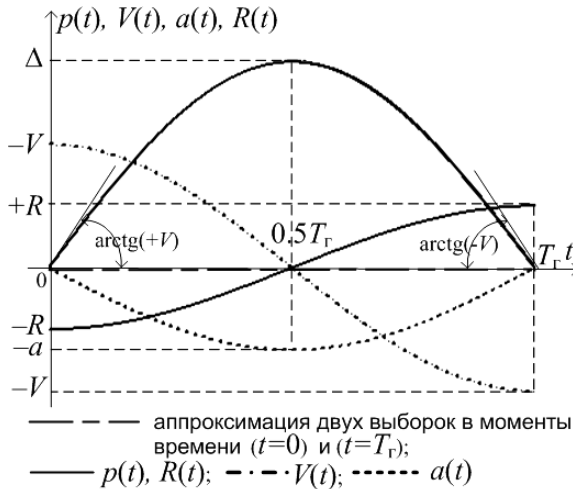


Рис. 1. Согласованная, гармоническая полуволна и три производных

Выражение (1) или гармоническая полуволна (ГПВ<sup>n</sup>) описывает математически половину  $T_r = T/2 = 1/2f$  периода  $T$  частоты среза  $f$  в спектре сигнала  $p(t)$ . Частота  $2f$  широко используется в теории связи, управления и в информатике [4 – 6].

Первая выборка из сигнала  $p(t)$  осуществлена в момент времени  $t = 0$ , вторая – в момент времени  $t = T_r = T/2$ . Линейная интерполяция между двумя выборками изображена двух штриховой линией. Погрешность такой интерполяции  $\Delta$  достигает максимального значения в точке  $(0.5T_r, \Delta)$ , которая является вершиной гармонической полуволны. Проходящая через вершину вертикальная линия  $t = 0.5T_r = 0.25T$  служит её осью симметрии. Связь круговой частоты  $\omega$  и интервала гармонической полуволны  $T_r$  запишем в виде выражения [25]:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T_r}. \quad (4)$$

Определим интервал гармонической полуволны  $T_r$  через максимальные параметры сигнала, которые должны быть измерены при исследовании спектра сигнала  $p(t)$  или получены при обработке результатов обследования объекта управления, если сигнал процесса является сигналом с трудно определяемым спектром. В выражение первой производной (2) подставим моменты времени выборок из сигнала  $p(t)$ :  $p(t = 0) = 0$  и  $p(t = T_r) = 0$  и приравняем двум её максимальным значениям:  $\max p^{(1)}(t = 0, t = T_r) = |\pm V|$ , учтём (4), получим [25]:

$$T_r = \pi \frac{\Delta}{V}. \quad (5)$$

В выражение второй производной (3) подставим момент времени  $(t = 0.5T_r)$ , при котором наступает максимум ускорения сигнала  $p(t)$  и приравняем её максимальному значению:  $\max p^{(2)}(t = 0.5T_r) = |-a|$ , аналогично при известном значении  $\max p^{(3)}(t = 0, t = T_r) = |\pm R|$ . Используем (4), получим цепь равных элементов:

$$T_r = \pi \frac{\Delta}{V} = \pi \frac{V}{a} = \pi \left(\frac{\Delta}{a}\right)^{1/2} = \pi \frac{a}{R} = \pi \left(\frac{\Delta}{R}\right)^{1/3}, \quad (6)$$

где очевидны два частных условия согласования параметров  $\{\Delta, V, a, R\}$  модели:  $V^2 = \Delta a$ ,  $a^2 = VR$ . Общее условие согласования:  $Va = \Delta R$  получим по схеме перемножения правых и левых частей:

$$\left. \begin{aligned} & \times V^2 = \Delta a \\ & a^2 = VR \end{aligned} \right\} \rightarrow Va = \Delta R. \quad (7)$$

С учётом (4) преобразуем (6) в круговую частоту  $\omega$ :

$$\omega = \frac{V}{\Delta} = \frac{a}{V} = \left(\frac{a}{\Delta}\right)^{1/2} = \left(\frac{R}{V}\right)^{1/2} = \frac{R}{a} = \left(\frac{R}{\Delta}\right)^{1/3}. \quad (8)$$

**4. Согласование максимальных параметров  $\{\Delta, V_A, a\}$  сигнала процесса отрезками прямых линий.** Рисунок 2 позволяет дать определение и записать математическую модель, которая показывает возможность согласования максимальных параметров  $\{\Delta, V_A, a\}$  сигнала  $p(t)$  [9]:

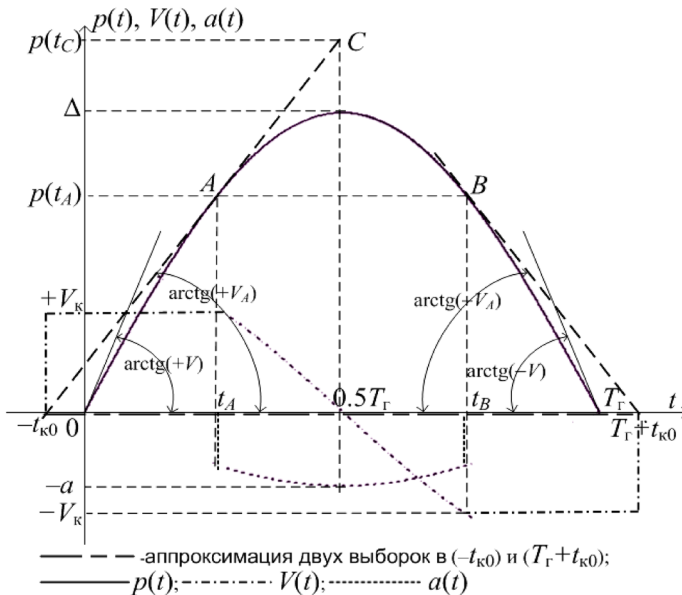


Рис. 2. Составная полуволна, согласуемая двумя отрезками прямых линий,  $\pm V_A = \pm \text{const} \leq V$

Графическая модель траектории составной полуволны характеризуется максимальной скоростью  $V_A$ , которая постоянна в начале и конце траектории  $\pm V_A = \pm \text{const}$ . Поэтому эту полуволну

назовём «гармонической полувольтной, согласуемой двумя отрезками прямых линий» и введём индекс «гл» в обозначение гармонической полувольтны (ГПВ<sup>гл</sup>) и интервала времени действия составной полувольтны  $T_{\text{гл}}$ . Первая выборка из составной согласуемой полувольтны осуществлена в момент времени  $(-t_{\text{к0}})$ , вторая – в момент времени  $(T_{\text{г}} + t_{\text{к0}})$  (рисунок 2). Таким образом, из рисунка 2 следует величина интервала продолжительности составной полувольтны:

$$T_{\text{гл}} = T_{\text{г}} + 2|t_{\text{к0}}|. \quad (9)$$

Между двумя выборками сигнал отклоняется по составной полувольтне, состоящей из трёх частей:

- на интервале времени  $(-t_{\text{к0}} \leq t \leq t_A)$  с постоянной скоростью  $V_A \leq (\Delta a)^{1/2}$ , по прямой линии касательной к гармонической полувольтне синусоиды (1) в точке  $A$ ;
- между точками касания  $A$  и  $B$  линий касательных к синусоиде (1) по верхней части гармонической полувольтны (1);
- на интервале времени  $t_B \leq t \leq (T_{\text{г}} + t_{\text{к0}})$  с постоянной скоростью  $-V_A \geq -(\Delta a)^{1/2}$ , по прямой линии касательной к (1) в точке  $B$ .

Для нахождения интервала полувольтны  $T_{\text{гл}}$  по выражению (9) определим момент времени  $t_{\text{к0}}$ , для чего найдём касательную к полувольтне синусоиды (1) в точке  $A$ . Первую производную (2) от (1) в точке  $A$  приравняем скорости  $V_A$ , введём коэффициент согласования скоростей  $0 \leq k \leq 1$ , запишем  $V_A = kV$ , момент времени  $t_A$  подставим в (1), получим промежуточный результат в виде координат точки  $A$ :

$$t_A = \frac{1}{\omega} \arccos(k) \quad \text{и} \quad p(t_A) = \Delta(1 - k^2)^{1/2}. \quad (10)$$

Запишем уравнение касательной прямой через точку  $A[t_A, p(t_A)]$  под углом  $\arctg V_A$ :  $p(t) - p(t_A) = V_A(t - t_A)$ . Пересечение касательной с осью абсцисс ( $0t$ ) при  $t = t_{\text{к0}}$ ,  $p(t_{\text{к0}}) = 0$  (рисунок 2) даёт:

$$t_{\text{к0}} = \frac{1}{\omega} \left[ \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right)^{1/2} - \arccos(k) \right].$$

Используем (6), (8), получим  $\omega = \pi/T_{\text{г}}$ , преобразуем и подставим  $|t_{\text{к0}}|$  в (9), введем относительную величину интервала составной полувольтны согласуемой отрезками прямых  $\tau_{\text{гл}} = T_{\text{гл}} / T_{\text{г}}$ , получим:



$$\tau_{\text{гл}} = 1 + \frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right)^{1/2} - \arccos(k) \right], \quad (11)$$

где  $0 \leq k \leq 1$ ; частное условие согласования параметров  $\{\Delta, V_A, a\}$  процесса:  $V_A = k(\Delta a)^{1/2}$ . Для наглядности сравнения величин интервалов времени согласованной гармонической полуволны  $T_{\text{г}}$  (6) и согласуемой линией составной полуволны  $T_{\text{гл}}$  (11) введем относительную величины интервала гармонической полуволны  $\tau_{\text{г}} = T_{\text{г}}/T_{\text{г}} = 1$ . Получим графики относительных величин  $\tau_{\text{гл}}$  и  $\tau_{\text{г}}$  (рисунок 3) [25].

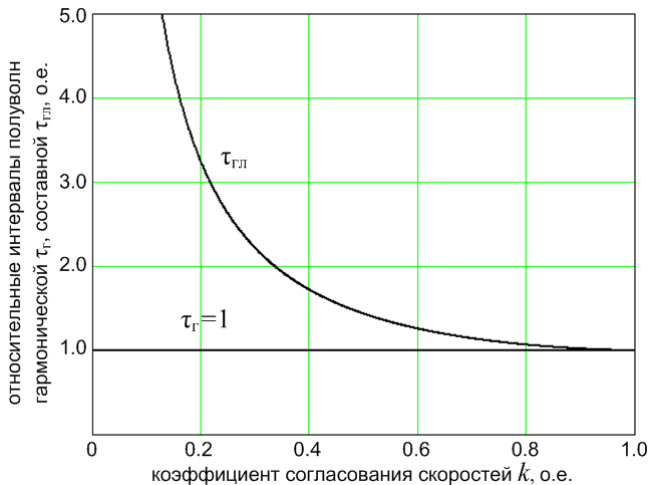


Рис. 3. Зависимости относительных интервалов согласованной гармонической и согласуемой составной полуволн от коэффициента  $k$

Графики показывают, что при уменьшении коэффициента согласования  $k$  или уменьшении максимальной скорости изменения сигнала  $V_A = kV$  происходит увеличение относительного интервала времени составной полуволны  $\tau_{\text{гл}} \geq 1$ . Этот результат позволяет сформулировать новое информационное свойство сигналов процессов:

*Свойство 1: Уменьшение величины коэффициента согласования  $k$  параметров  $\max\{\Delta, V_A, a\}$  сигнала  $p(t)$  приводит к увеличению интервала времени  $T_{\text{гл}}$  составной полуволны (или  $\tau_{\text{гл}} \geq 1$ ). При этом максимальная абсолютная погрешность измерения равна амплитуде согласованной гармонической полуволны  $\Delta$  или не изменяется [25].*

Из вышесказанного следует определение согласуемой отрезками прямых линий составной гармонической полуволны (ГПВ<sup>гп</sup>).

**Определение 2.** «Составная ГПВ<sup>гп</sup> является выпуклой гармонической функцией модуля времени, заданной последовательно несколькими формулами, которые описывают изменение сигнала процесса между соседними выборками на временном интервале  $0 \leq t \leq T_{\text{гл}}$ . При этом три максимальных параметра  $\{\Delta, V_A, a\}$  входят в условие согласованности параметров (УСП):  $V_A < (\Delta a)^{1/2}$  или  $V_A = k (\Delta a)^{1/2}$ , где  $k = V_A/V \leq 1$  – коэффициент согласования скоростей».

**5. Согласование максимальных параметров  $\{\Delta, V_A, a\}$  сигнала процесса частями гармонических функций.** На рисунке 4 приведено изображение составной полуволны согласованной двумя гармоническими линиями (ГПВ<sup>2г</sup>). Траектория ГПВ<sup>2г</sup> задаётся составными функциями, заданными тремя формулами гармонических функций.

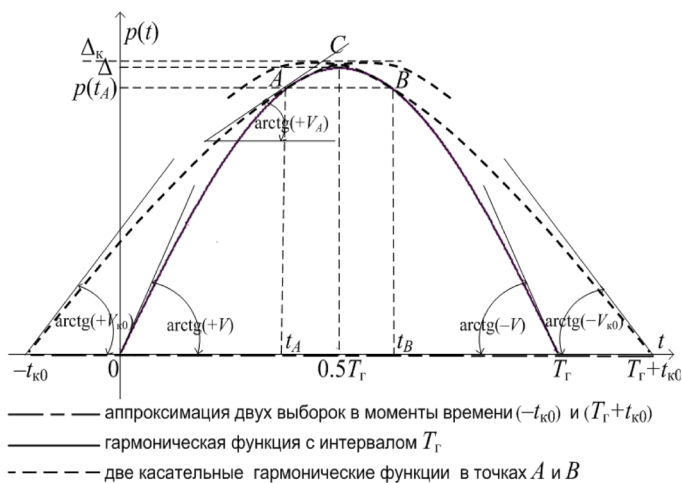


Рис. 4. Составная полуволна ГПВ<sup>2г</sup>, согласуемая двумя частями гармонических полуволн при  $V_A \leq V_{к0} \leq V$

Рисунок 4 поясняет связь параметров  $\{\Delta, V_A, a\}$  сигнала  $p(t)$ , позволяет записать математическую модель ГПВ<sup>2г</sup>, которая согласует эти параметры. Участки согласующей полуволны описываются двумя симметричными частями гармонической функции, где нижний индекс «к» обозначает внешнее касание левой части гармонической функции в точке  $A$  к гармонической полуволне (1) [9]:

$$p(t) = \Delta_k \sin(\omega_k t + \varphi_0), \quad (12)$$

где  $\Delta_k$ ,  $\varphi_0$ ,  $\omega_k$  – соответственно, амплитуда, фаза и круговая частота согласующей полуволны;  $(-t_{k0}) \leq t \leq (T_\Gamma + t_{k0})$ ;  $t_{k0} = -\varphi_0/\omega_k$ ;  $\omega_k = 2\pi/T_k$ ;  $\omega_k = V_k/\Delta_k$  по аналогии с (8). Так как параметры  $\{\Delta, V_A, a\}$  полуволны на рисунке 4 согласуются двумя одинаковыми гармоническими полуволнами, введём индекс «2Г» в обозначение интервала времени полуволны  $T_{2\Gamma}$ .

Предположим, что для сигнала  $p(t)$  процесса предварительно замерили параметры  $\{\Delta, V_A, a\}$ . Причём величина максимальной скорости в точке  $A$  равна  $V_A = kV = k(\Delta a)^{1/2}$ , где  $0 \leq k \leq 1$ . Процесс отклонения полуволны от прямой, аппроксимирующей две соседние выборки в моменты времени  $(-t_{k0})$  и  $(T_\Gamma + t_{k0})$ , происходит по трём участкам:

- в интервале времени  $(-t_{k0} \leq t \leq t_A)$ , по левой части гармоники (12) от точки  $(-t_{k0})$  до точки  $A$ , при этом скорость  $V_A \leq V_{k0} \leq V = (\Delta a)^{1/2}$ ;

- между точкой касания  $A$  гармонической функции (12) к синусоиде (1) в момент времени  $t = t_A$  до точки её пересечения с осью симметрии в момент времени  $t = 0.5T_\Gamma$ ;

- в интервале времени  $(0.5T_\Gamma \leq t \leq (T_\Gamma + t_{k0}))$  симметрично второму и первому участкам относительно оси симметрии  $t = 0.5T_\Gamma$ .

Интервал времени составной полуволны  $T_{2\Gamma}$  можно определить по выражению (12) при  $p(-t_{k0}) = 0$ , с учётом величины фазы гармонической траектории наибольшего отклонения  $|t_{k0}| = \varphi_0/\omega_k$  и  $\omega_k = 2\pi/T_k$ :

$$T_{2\Gamma} = T_\Gamma + \frac{1}{\pi} T_k \varphi_0 = T_\Gamma \left( 1 + \frac{2}{\pi} \varphi_0 r \right), \quad (13)$$

где  $r = T_k/2T_\Gamma$ ,  $T_k \geq (T = 2T_\Gamma)$ ,  $r \geq 1$  [9]. Для определения фазы  $\varphi_0$  воспользуемся равенством скоростей  $V_A$  в точке взаимного касания  $A(t_A, p(t_A))$  гармонических функций (1) и (12). Производные этих функций по времени преобразуем  $t_A = (1/\omega) \arccos(k) = (1/\omega_k)(\arccos(m) - \varphi_0)$ . Используем условия согласования параметров процесса:  $V_A = kV$ ,  $V_A = mV_{k0}$ . Найдём отношение выражения (4)  $\omega = \pi/T_\Gamma$  и ему подобного выражения  $\omega_k = 2\pi/T_k$ , которое равно  $1/r = \omega_k/\omega = 2T_\Gamma/T_k$ . Получим:

$$\varphi_0 = \arccos(m) - \frac{1}{r} \arccos(k). \quad (14)$$

Найдём связь между величинами коэффициентов  $k$ ,  $m$  согласования параметров сигнала и коэффициентом  $r$  [9].

Выражение (1) при  $t = t_A$  запишем в виде  $\Delta \sin \omega t_A = p(t_A)$  и последовательно преобразуем его по известной тригонометрической формуле  $\arcsin x = \arccos[(1 - x^2)^{1/2}]$ , получим:

$$\omega t_A = \arcsin [p(t_A)/\Delta] = \arccos [1 - (p(t_A)/\Delta)^2]^{1/2}. \quad (15)$$

Первая производная от (1) при  $t = t_A$  равна скорости  $V(t_A) = V_A$ , из (2) запишем:  $\Delta \omega \cos \omega t_A = V_A$ . В это выражение подставим вторую часть выражения (15) и применим тригонометрическую формулу  $\cos \arccos x = x$ . Получим выражение  $p^2(t_A) = \Delta^2 - (V_A/\omega)^2$ , в которое последовательно подставим  $\omega = V/\Delta$  из (8) и  $V_A = kV$ , в итоге получим:  $p^2(t_A) = \Delta^2(1 - k^2)$ . Аналогично преобразуем выражение (12), при этом используем  $\omega_k = V_{k0}/\Delta_k$  аналогичное (8), и  $V_A = mV_{k0}$ . Получим выражение:  $p^2(t_A) = \Delta_k^2(1 - m^2)$ . Два выражения для нахождения  $p^2(t_A)$  преобразуем совместно через их отношение, получим:

$$\frac{\Delta^2}{\Delta_k^2} = \frac{1 - m^2}{1 - k^2}. \quad (16)$$

Определим отношение амплитуд составной траектории отклонения  $\Delta$  и  $\Delta_k$  через коэффициенты согласования параметров сигнала  $m$ ,  $k$  и коэффициент  $r$ . Для этого последовательно применим выражения (8)  $\Delta = V/\omega$ ,  $\Delta_k = V_{k0}/\omega_k$ , выражения (4)  $\omega = \pi/T_r$ ,  $\omega_k = 2\pi/T_k$ , выражения  $V_A = kV$ ,  $V_A = mV_{k0}$ , получим частное  $\Delta/\Delta_k = m/kr$ . Подставим это выражение в (16) и выделим коэффициент согласования  $r \geq 1$ , в соответствии с (13):

$$r = \frac{m}{k} \left( \frac{1 - k^2}{1 - m^2} \right)^{1/2} \geq 1. \quad (17)$$

Выражение (17) умножим на (14) ( $\varphi_0 \cdot r$ ) и результат подставим в (13). Введем относительную величину интервала гармонической составной полуволны  $\tau_{2r} = T_{2r}/T_r$ . В результате преобразований получим искомое выражение:

$$\tau_{2r} = \frac{T_{2r}}{T_r} = 1 + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{m}{k} \left( \frac{1 - k^2}{1 - m^2} \right)^{1/2} \cdot \arccos(m) - \arccos(k) \right], \quad (18)$$

где  $0 \leq k \leq m \leq 1$ . Графики  $\tau_{2r}$  для  $m=0.2$ ,  $m=0.5$ ,  $m=0.8$  для наглядности совместим с графиками  $\tau_{r1}(k)$  и  $\tau_r(k)$  (рисунки 3 и 5).

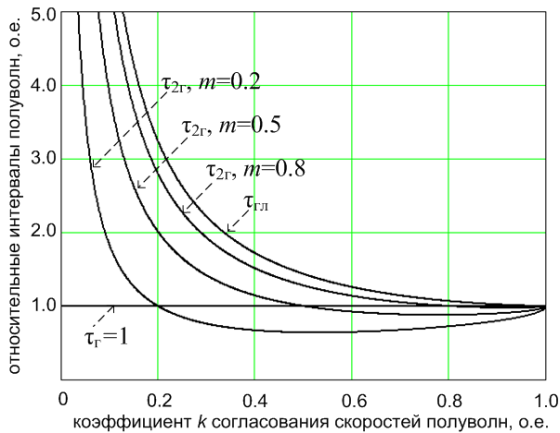


Рис. 5. Примеры зависимостей относительных интервалов гармонических полувольт от коэффициентов согласования скоростей  $k$ ,  $m$

Сравним графики на рисунке 5 с графиками величин энтропии  $H_{2r}\{\Delta, V_A, a\} = \log_2(\tau_{2r})$  (рисунок 6) для тех же величин  $m$  пяти примеров согласований параметров. Каждый график  $\tau_{2r}$  определён в своей верхней части ( $\tau_{2r} \geq \tau_r = 1$ ), при коэффициенте согласования из замкнутого интервала  $0 \leq k \leq m$ , что следует из (17) и (13) [9].

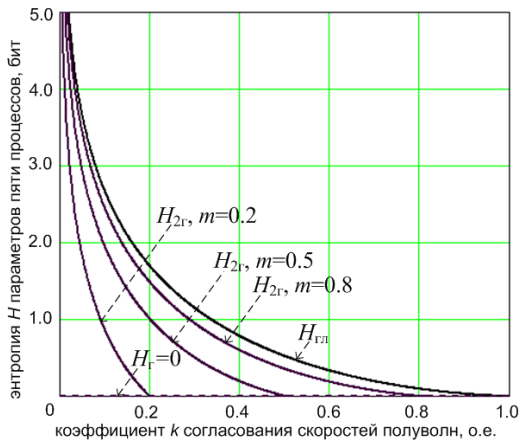


Рис. 6. Примеры зависимостей энтропии параметров составных полувольт от коэффициентов согласования скоростей  $k$ ,  $m$

Правые границы определения лежат в точках пересечения графика  $\tau_r = 1$  с каждым из трёх графиков зависимостей  $\tau_{2r} = F(k, m = \text{const})$ . Нижние части графиков  $\tau_{2r}$  ( $\tau_{2r} \leq \tau_r = 1$ ) соответствуют внутреннему касанию составной ГПВ<sup>2r</sup> к гармонической ГПВ<sup>r</sup>, поэтому (18) даёт  $\tau_{2r} \leq \tau_r$  или результат, имеющий только математический, но не физический смысл. Энтропия во всех примерах  $H \geq 0$ , что соответствует двум этим смыслам и позволяет использовать энтропию для индикации рассогласования параметров сигналов.

**6. Общее свойство полученных моделей дискретизации времени.** Свойство заключается в получении одних моделей ( $\tau_{rл}$  из  $\tau_{2r}$ ;  $\tau_r$  из  $\tau_{rл}$ ) путем задания граничных значений коэффициентов согласования параметров  $k, m$  сигнала.

Для проверки общности моделей (11) и (5) зададим  $k = 1$  в (11) или выполним условие согласования. Получим  $T_{rл}(k = 1) = T_r$ , что позволяет сформулировать свойство:

Свойство 2: *Математическая модель гармонической полуволны с согласованными временными параметрами сигналов (процессов) является частным случаем модели составной полуволны, согласуемой двумя симметричными отрезками касательных прямых [9].*

Найдём предел выражения (18)  $\lim_{m \rightarrow 1} \tau_{2r}$  при  $(m \rightarrow 1)$ :

$$\lim_{m \rightarrow 1} \tau_{2r} = 1 + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{k} \left( \frac{1-k^2}{0} \right)^{1/2} \cdot 0 - \arccos(k) \right], \quad (19)$$

имеем неопределённость 0/0, которую раскроем по правилу Лопиталья:

$$\lim_{m \rightarrow 1} \frac{\arccos(m)}{(1-m^2)^{1/2}} = \lim_{m \rightarrow 1} \frac{(\arccos(m))^{(1)}}{((1-m^2)^{1/2})^{(1)}} = \lim_{m \rightarrow 1} \frac{-1}{-m} = 1.$$

Подставим  $\lim[\arccos(m)/(1-m^2)^{1/2}] = 1$  в (19), получим выражение (11). Из этого следует свойство:

Свойство 3: *Математическая модель составной полуволны с согласованными временными параметрами сигналов (процессов) при помощи двух отрезков прямых линий является частным случаем модели составной полуволны, согласуемой двумя симметричными частями гармонической функции [9].*

На основе Свойств 2 и 3 можно считать общим доказательством для двух типов согласования информационных параметров сигналов процессов доказательство теоремы. Применим энтропию по Хартли [26], для математической индикации согласованности и рассогласованности конкретного конечного множества параметров сигнала:  $\log_2(N=1)=0$ , или  $\log_2(N>1)>0$ . Используем особенность этих формул реагировать на величину коэффициента рассогласования скорости сигнала  $k = 1$  или  $k \leq 1$ . При этом вероятность исходов для такой индикации не важна. Коэффициент  $k$  может принимать любое значение в диапазоне  $0 \leq k \leq 1$ , так как причины, влияющие на него, зависят от конструкции, технических характеристик, процессов функционирования, сигналов конкретного технического объекта управления. Характеристики объектов, от которых зависит их нормальное функционирование, подтверждаются испытаниями, являются стабильными в течение всего интервала времени пригодности к эксплуатации, поэтому для конкретной серии изделий желательна малая и равновероятная интенсивность отказов составных частей. Кроме этого энтропия по Хартли позволяет получить универсальный инструмент индикации рассогласования параметров сигналов для неограниченного класса объектов управления систем реального времени. Для определения связи энтропии и величины интервала дискретизации  $\tau_{2r}$  (18) докажем необходимую теорему. Примем  $N \sim \tau_{2r}$ , так как именно  $\tau_{2r} = F(k, m)$  в (18) определяет количество вариантов рассогласованных составных траекторий, каждой из которых соответствует множество величин коэффициентов согласования  $k, m$ , поэтому запишем:

*Теорема об энтропии параметров сигналов процессов управления:* «Величины энтропии  $H_{гн}\{\Delta, V_A, a\} = \log_2(\tau_{гн}) > 0$  и  $H_{2r}\{\Delta, V_A, a\} = \log_2(\tau_{2r}) > 0$  рассогласованных максимальных параметров  $V_A < (\Delta a)^{1/2}$  сигнала  $p(t)$  процесса больше энтропии  $H_r\{\Delta, V, a\} = \log_2(\tau_r) = 0$  изначально согласованных параметров  $V = (\Delta a)^{1/2}$ . Величины  $H_{гн} > 0$  и  $H_{2r} > 0$  является индикаторами увеличения интервалов дискретизации времени  $\tau_{гн} \geq \tau_r$  и  $\tau_{2r} \geq \tau_r$ ». Теорема поясняется рисунками 6 и 7.

Доказательство. По определению из (5)  $\tau_r = T_r/T_i = 1$ , соответственно:  $H_r\{\Delta, V, a\} = \log_2(\tau_r = 1) = 0$ . По определению из (11)  $\tau_{гн} = T_{гн}/T_r$ , где  $T_{гн} > T_r$ , соответственно:  $H_{гн}\{\Delta, V_A, a\} = \log_2(\tau_{гн} > 1) > 0$ . По определению из выражения (18)  $\tau_{2r} = T_{2r}/T_r$ , где  $T_{2r} > T_r$ , соответственно:  $H_{2r}\{\Delta, V_A, a\} = \log_2(\tau_{2r} > 1) > 0$ . Учтём общие Свойства 2 и 3, что позволяет считать доказательство общим для трёх типов согласования информационных параметров сигналов процессов.

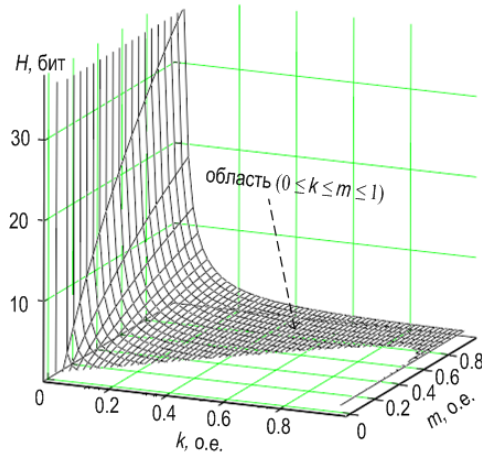


Рис. 7. Энтропия  $H_{2r} > 0$  параметров сигнала процесса в зависимости от величин коэффициентов согласования скоростей  $k, m$

Примечание. «На рисунках 6 и 7 отсутствуют отрицательные участки энтропии, так как им соответствует расположение графиков согласующих гармонических функций внутри графика согласуемой гармонической функции (полуволна с меньшим интервалом касается полуволны с большим интервалом внутри последней), что соответствует уменьшению интервала  $\tau_{2r} \leq \tau_r = 1$  и искажает физический смысл модели».

Преобразуем неравенство (17), учтём:  $m > 0, k > 0$ , получим  $m \geq k$ .

Свойство 4. Величина интервала равномерной дискретизации  $T_{2r}$  сигнала процесса с рассогласованными временными параметрами  $\{\Delta, V_A, a\}$  (при  $V_A < V = (\Delta a)^{0.5}$ ) всегда больше интервала дискретизации  $T_r$  сигнала процесса  $T_{2r} > T_r$  с согласованными временными параметрами  $\{\Delta, V, a\}$  (при  $V = (\Delta a)^{1/2}$ ). Индикатором рассогласования временных параметров сигнала (процесса)  $\{\Delta, V_A, a\}$  является выполнение неравенства  $H_{2r} > 0$  или  $m > k$ .

Графической иллюстрацией неравенства  $m \geq k$ , является энтропия коэффициентов  $k, m$  по выражению (18)  $H_{2r} = \log_2(\tau_{2r})$ , при этом в моделирующем пакете задано условие  $H_{2r} = \log_2(\tau_{2r}) \geq 0$  исходя из теоремы доказанной ранее. На рисунке 7 в системе координат  $k, m$ ,  $H_{2r}$  изображена поверхность, в которой находится область  $0 \leq k \leq m \leq 1$ . В этой области функция  $H_{2r} = \log_2(\tau_{2r})$  определена с доказанными ограничениями.

**7. Применение моделей дискретизации времени для описания скольжения (юза) поездов.** Явление юза или скольжения



поездов по рельсам при экстренном торможении особенно проявляется при дождливой погоде, заморозках и на спусках рельефа пути. Управление высокоскоростными поездами в этих условиях задаётся Европейской системой управления поездами (European Train Control System (ETCS)) [7, 8]. От начала торможения до останова поезда могут происходить четыре различных типа движения поезда, модели которых получим посредством преобразований выражений [25]:

- скольжение без изменения ускорения (замедления) или с постоянной скоростью, с последующим началом окончательного замедления и останова поезда и скольжение без начала замедления и останова поезда (авария);

- скольжение с изменением ускорения (замедления) или с переменной скоростью, с последующим началом окончательного замедления и останова поезда и скольжение с замедлением недостаточным для останова поезда (авария).

В статье [25] предложена новая концепция и методика построения математических моделей кривых экстренного торможения отличных от кривых ETCS и основанных на гармонических полуволнах. Показано, что кривые торможения ETCS описываются известными степенными полуволнами второго порядка. Гармонические полуволны в сравнении со степенными полуволнами позволяют объяснить особенности ETCS, получить предложения по их устранению. Эти полуволны применимы для разработки новых кривых экстренного торможения, которые позволяют плавно осуществлять экстренное торможение поездов. Составные гармонические полуволны используем для моделирования скольжения высокоскоростных поездов при экстренном торможении, как пример возможностей полученных математических моделей в практическом применении.

**7.1. Модель скольжения без изменения ускорения (замедления) или при постоянной скорости.** Для получения математического описания модели используем составную гармоническую полуволну согласуемую двумя отрезками прямых линий (рисунок 2). Скольжение поезда или перемещение с постоянной скоростью  $V_A = \text{const}$  происходит на интервале времени  $T_{\text{СКГЛ}} = t_A + |t_{k0}|$ , что следует из рисунка 2, для конкретизации которого используем (10),  $|t_{k0}|$ , применим  $\omega = \pi/T_{\Gamma}$ , относительное время скольжения запишем в виде выражения, которому соответствует рисунок 8:

$$\tau_{\text{СКГЛ}} = \frac{T_{\text{СКГЛ}}}{0.5T_{\Gamma}} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (20)$$

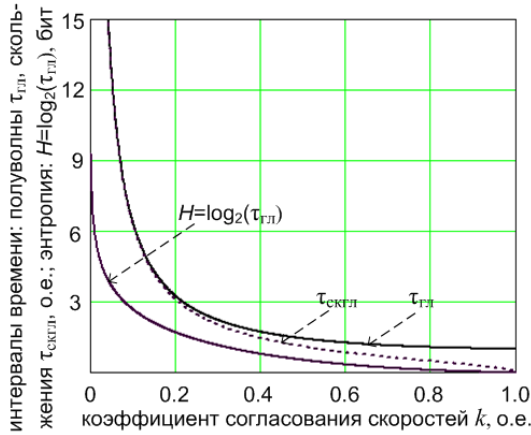


Рис. 8. Три характеристики скольжения по составной гармонической полуволне с постоянной скоростью

На рисунке 8, кроме относительного интервала времени скольжения поезда  $\tau_{скл}$ , (20) даны: траектория торможения с постоянной скоростью скольжения на начальном участке  $\tau_{сл}$  (11), признак скольжения в виде «положительной энтропии параметров  $H_{сл} = \log_2(\tau_{сл}) \geq 0$ » для пояснения использования этого признака.

**7.2. Модель скольжения с увеличением замедления или при переменной скорости.** Для получения математического описания модели используем составную гармоническую полуволну согласуемую двумя отрезками гармоник (рисунки 4 и 9).

Скольжение поезда или перемещение с переменной скоростью  $V_A = var$  происходит на интервале времени  $T_{ск2г} = t_A + |t_{к0}|$ , что следует из рисунка 4, для конкретизации которого из (12) запишем:  $t_A = (1/\omega_k)(\arccos(m) - \varphi_0)$ ,  $|t_{к0}| = |\varphi_0/\omega_k|$ ,  $\omega_k = 2\pi/T_k$ , из (13) при  $r = T_k/2T_r$  применим (17). Относительное время скольжения запишем в виде выражения, которому соответствует рисунок 9.

$$\tau_{ск2г} = \frac{T_{ск2г}}{0.5T_r} = \frac{2}{\pi} \frac{m}{k} \left( \frac{1-k^2}{1-m^2} \right)^{1/2} \cdot \arccos(m), \quad (21)$$

где выполняются условия:  $k \leq m$  из (18) и  $\tau_{ск2г} \geq 1$ .

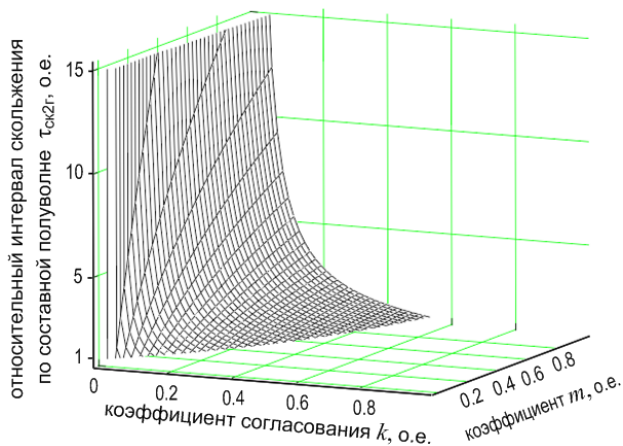


Рис. 9. Относительный интервал скольжения по составной полуолне с переменной скоростью

При этом индикатором режима скольжения (юза) является теорема об энтропии параметров сигналов процессов управления, величина энтропии  $H_{2г}\{\Delta, V_A, a\} = \log_2(\tau_{2г}) > 0$ , поясняется рисунками 7 и 9.

**7.3. Модели скольжения без достаточного замедления для своевременного останова.** Аварийное скольжение поезда (когда авария возможна) может начинаться при постоянной и переменной скорости, когда поезд переходит точку  $A$  (20) с постоянной скоростью скольжения  $V_A = \text{const}$  (рисунок 2) или перемещается с переменной скоростью  $V_A = \text{var}$  (21) через точку  $A$  (рисунок 4). При этом замедление поезда не достигает необходимой величины для останова в точке с координатой пути ( $\Delta$ ) и движение продолжается до точки с координатой  $p(t_C)$  (рисунки 2, 4).

**Модель аварийного скольжения на постоянной скорости.** Из прямоугольного треугольника на рисунке 2 с тремя координатами вершин  $(-t_{к0}, 0)$ ,  $(0.5T_{г}, p(t_C))$ ,  $(0.5T_{г}, 0)$  запишем координату точки возможной аварии:  $p(t_C) = V_A(t_{к0} + 0.5T_{г})$ . Воспользуемся из (6) выражением  $0.5T_{г} = 0.5\pi\Delta/V$ ,  $t_{к0}$  из (10),  $V_A = kV$ , получим:

$$\frac{p(t_C)}{\Delta} = (1 - k^2)^{1/2} + k \arcsin(k), \quad (22)$$

где при  $k = 1$ ,  $p(t_C) = 0.5\Delta\pi$ . С учётом Свойства 3 график по выражению (22), как частный случай общей математической модели,

совместим с графиком модели аварийного скольжения поезда на переменной скорости далее по тексту.

**Модель аварийного скольжения на переменной скорости.**

В выражение (12) подставим  $t = 0.5T_{\Gamma}$ , то есть найдём точку пересечения оси симметрии гармонической полуволны ГПВ<sup>r</sup>  $t_C = 0.5T_{\Gamma}$  с ГПВ<sup>2r</sup> (рисунок 4). При этом используем  $\omega_k = 2\pi/T_k$  (12),  $T_k/2T_{\Gamma} = r$ , коэффициент  $r$  запишем из (17), фазу  $\phi_0$  из (14), применим известную формулу [ $0.5\pi - \arccos(x) = \arcsin(x)$ ], выражение  $\Delta_k/\Delta$  (16), получим:

$$\frac{p(t_C)}{\Delta} = \left( \frac{1-k^2}{1-m^2} \right)^{1/2} \cdot \sin \left[ \frac{k}{m} \left( \frac{1-m^2}{1-k^2} \right)^{1/2} \cdot \arcsin(k) + \arccos(m) \right], \quad (23)$$

где  $p(t_C)/\Delta \geq 1$ , что характерно для аварийной ситуации.

Выражения (22) и (23) иллюстрируются общим рисунком 10. На рисунке 10 изображена поверхность в относительных единицах измерения. В системе координат  $\{k, m, p(t_C)/\Delta\}$  находится поверхность в виде совокупности точек с координатами, в которых происходят аварийные ситуации из-за эффекта скольжения.

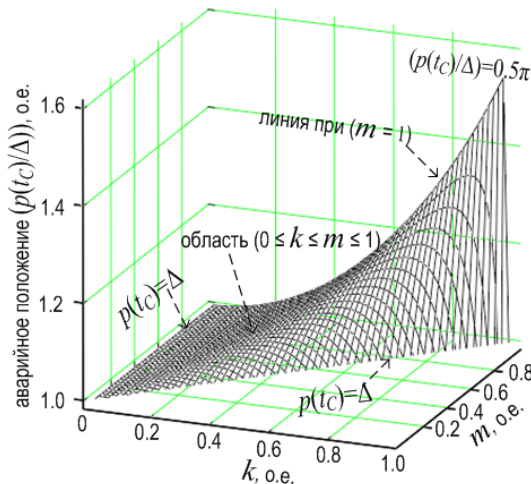


Рис. 10. Относительное аварийное положение поезда при скольжении через точки с координатами  $(t_A, p(t_A))$  и  $(0.5T_{\Gamma}, \Delta)$  в точку  $(0.5T_{\Gamma}, p(t_C))$

Границы поверхности отражают конкретные ситуации и свойства скольжения состава по составной гармонической полуволне:

1) При  $k=m \neq 1$  из (23) имеем  $p(t_C)/\Delta = 1$ , что на рисунке 10 соответствует границе, проходящей параллельно диагонали плоскости  $k, m, p(t_C)/\Delta$ .

2) При  $k=m=1$  из (23) и (22) имеем  $\max p(t_C) = 0.5\Delta\pi$ . Математические модели составных гармонических полуволн с согласованными временными параметрами сигналов процессов, применяемые для моделирования аварийной ситуации от скольжения поезда дают ограничение расстояния скольжения.

3) При  $k=0, m \rightarrow 1$  из (23), по правилу Лопитала:  $p(t_C)/\Delta = 1$ , что на рисунке 10 соответствует границе, проходящей параллельно оси координат  $0m$  в системе координат  $k, m, p(t_C)/\Delta$ .

4) Выражение (23) перевести в выражение (22) при  $m=1$  прямыми преобразованиями не удаётся, поэтому применим преобразование бесконечно малой высшего порядка  $0(m)$ , чем величина  $m$ . Зададимся  $(1-m^2)=0(m)=0.00010$ , откуда  $m=(1-0.00010)^{1/2}=0.99995$ . Подставим значения величин  $0(m)$  и  $m$  в (23), наложим графики (23) и (22) и убедимся в их полном совпадении. Иллюстрацией этого совпадения графиков является рисунок 11.

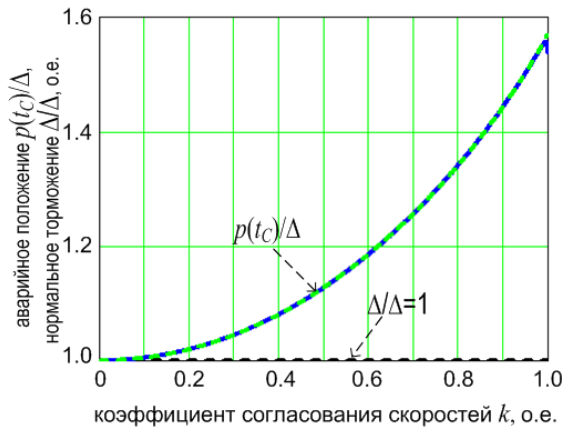


Рис. 11. Совпадение относительных координат аварийного положения поезда при скольжении с постоянной и переменной скоростью при  $m=1$

**8. Пример применения моделей дискретизации времени для расчёта скольжения (юза) высокоскоростных поездов в режиме экстренного торможения.** Применим три рассмотренных и описанных модели для моделирования скольжения при одинаковой величине пути торможения  $\Delta$ , но для различных погодных

и рельефных условий на участке торможения, которые задаются коэффициентами  $k \leq m < 1$ . Используем математический пакет MathCAD. Для пояснения рассмотрим таблицу 1 в основных ситуациях.

**Строка 3.** Предположим, что по сухим рельсам, на равнине высокоскоростной поезд осуществляет экстренное торможение по половине гармонической полуволны (1), [25], где  $0 \leq t \leq 0.5T_r$ .

Таблица 1. Примеры расчётов параметров скольжения (юза) поезда

Тип гармонической полуволны, индекс «...»	$k$ , о.е.	$m$ , о.е.	$\Delta$ , м	$V_{г,гл,2г}$ , м/с	(№), $H = \log_2(\tau)$ , бит	(№), $0.5T_{г,гл,2г}$ , с	(№), $T_{ск}$ , с	(№), $p(t)$ , М
Модели	Параметры движения поезда				Модели и результат			
Согласованная, индекс «г»	1	1	1500	138.89	(5), (11), $\log_2(\tau_r)=0$	(5), 16.96	нет юза	нет аварии
Согласуемая прямой линией, индекс «гл»	0.5	1	1500	69.45	(11), $\log_2(\tau_{гг})=0.522$	(11), 24.36	(20), 18.71	(22), 1692.0 авария
Согласуемая гармонической кривой, инд. «2г»	0.5	0.8	1500	86.81	(18), $\log_2(\tau_{2г})=0.355$	(18), 18.34	(21), 16.05	(23), 1655.0 авария

При начальной скорости движения высокоскоростного поезда в режиме торможения  $V=500$  км/ч=138.89 м/с, необходимо обеспечить тормозной путь  $\Delta=1500$  м с замедлением  $a=V^2/\Delta=12.86$  м/с<sup>2</sup>. Время торможения (5) при заданных условиях  $0.5T_r=16.96$  с, скольжение отсутствует. Авария не прогнозируется, так как скорость  $V_A$ , при которой должно начаться торможение  $V_A=V$ , то  $k=V_A/V=1$  при  $t=0$  (рисунок 1). Проверим энтропию параметров движения на их согласованность:  $H_r = \log_2(\tau_r=1)=0$  (строку 3 таблицы 1). Условие согласования параметров  $\{\Delta, V, a\}$  модели:  $V^2=\Delta a$ .

**Строка 4.** Предположим, что по обледеневшим рельсам, на уклоне высокоскоростной поезд осуществляет экстренное торможение по половине гармонической полуволны, согласуемой отрезком прямой линии (11), [25], где  $\tau_{гг} = T_{гг}/T_r$ ,  $0 \leq t \leq 0.5T_{гг}$ . При этом только в момент времени  $t_A$  тормоза поезда создают необходимую величину замедления, максимум которого наступает в конце тормозного пути  $a=V^2/\Delta=12.86$  м/с<sup>2</sup> в точке с координатами  $(0.5T_{гг}, \Delta)$ , рисунок 2. Время торможения (11) при заданных условиях скольжения  $0.5T_{гг}=24.36$  с. Чтобы обеспечить заданный путь торможения в  $\Delta=1500$  м необходимо

уменьшить начальную скорость торможения  $V=500$  км/ч в два раза  $V_A=kV=69.45$  м/с  $=250$  км/ч (рисунок 2 в точке с координатами:  $-t_{к0}$ ,  $p(-t_{к0})=0$ ). Проверим энтропию параметров движения на их согласованность:  $H_{гп}=\log_2(\tau_{гп})=0.522$  бит  $>0$  (строку 3 таблицы 1). Условие согласования параметров  $\{\Delta, V, a\}$  модели не выполняются:  $V_A^2 \neq \Delta a = V^2$ . Время скольжения найдём из (20) при  $k=0.5$   $T_{скгл}=18.71$  с. Авария в виде столкновения с предыдущим поездом возможна при превышении расстояния  $p(t_C) \geq 1692.0$  м, которое больше чем тормозной путь  $\Delta=1500$  м. Это произойдёт, если в момент времени  $t_A$  тормоза не начнут эффективно работать (рисунок 2).

**Строка 5.** Торможение, совмещенное со скольжением, приводит к уменьшению замедления на интервале времени  $-t_{к0} \leq t \leq t_A$ . В момент времени  $t_A$  тормоза начинают эффективно действовать. Энтропия параметров  $H_{гп}=\log_2(\tau_{гп})=0.355$  бит  $>0$ . Время торможения (18) при заданных условиях скольжения  $0.5T_{2г}=21.70$  с. Начальную скорость торможения  $V=500$  км/ч, при идеальных условиях, необходимо в данном случае уменьшить в 1.6 раза  $V_{к0}=(k/m)V=86.81$  м/с  $=312.52$  км/ч. Это следует из двух равенств  $V_A=kV$  и  $V_A=mV_{к0}$  (16). Учёт условий погоды и рельефа пути должна осуществлять робастная система управления скоростным движением, с применением теоремы об энтропии параметров сигналов процессов управления. При этом только предварительное снижение скорости  $V_{к0}$  высокоскоростного поезда на скользких рельсах и при уклонах рельефа позволяют избежать аварийной ситуации или сохранить постоянной величину тормозного пути  $\Delta$ .

**9. Заключение.** Сформулирована и исследована гипотеза подобия, в соответствии с которой исследование и применение сигналов управляемых процессов в робастных системах управления заменено исследованием и применением гармонических полуволн. Предварительно, при обследовании объекта управления, замерены максимальные величины временных параметров сигнала и полуволн: скорость, ускорение и резкость, которые используют для описания гармонических полуволн, так как параметры спектра отсутствуют. Гармонические полуволны разделены на две группы: согласованные и согласуемые полуволны. Для определения степени согласования применена энтропия временных параметров гармонических полуволн. Обнаружено свойство увеличения интервалов дискретизации времени сигнала совместно с ростом энтропии его параметров, доказана теорема об энтропии параметров сигналов процессов управления. В качестве примера теорема применена для построения математической модели торможения высокоскоростного состава

со скольжением (юзом). Модель работает в двух вариантах скольжения: с постоянной максимальной начальной скоростью и переменной скоростью, что необходимо для управления составом в реальных климатических условиях и с учетом рельефа пути. В дальнейшем возможно применение теоремы для обнаружения информационных атак на системы ГЛОНАСС и GPS спутниковой навигации беспилотных высокоскоростных поездов и беспилотных летательных аппаратов.

### Литература

1. Коберниченко В.Г. Основы цифровой обработки сигналов // Учеб. Пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. 150 с.
2. Курячий М.И., Гельчер А.А. Цифровая обработка сигналов // Томск: Изд-во Томск. Гос. ун-т, 2018. 234 с.
3. Контрольно-измерительное оборудование R&S 2019. Каталоги Rohde&Schwarz. 2019. 256 с. URL: [https://cdn.rohde-schwarz.com/ru/downloads\\_45/common\\_library\\_45/interactive\\_catalog\\_2018\\_19\\_ru.pdf](https://cdn.rohde-schwarz.com/ru/downloads_45/common_library_45/interactive_catalog_2018_19_ru.pdf) (дата обращения: 12.03.2020).
4. Infrastructure Status u-entwicklungsbericht 2019 // Deutsche Bahn. 2020. 124 p.
5. ERTMS Level 3: the Game- Chander. 2022. Programme technical paper. London.
6. Thales consortium to install ECTS Level 1 ATR system in Thailand // Railway Technology. 2019. 20 p. URL: <https://www.railway-technology.com/news/thales-consortium-to-install-etc-level-1-atp-system-in-thailand/> (дата обращения: 12.03.2020).
7. Ehret Marc. Virtual Train Brakes. Eisenbahnwesen-Seminar // TU-Berlin. 2020. 49 p. URL: <https://www.static.tu.berlin/fileadmin/www/10002264/ews/2020-sosc/2020-05-11-folien.pdf> (дата обращения: 12.03.2020).
8. Introduction to ETCS Braking Curves. ERA ERTMS Unit. Version 1.5. 2020. 28 p.
9. Майоров Б.Г. Свойства гармонических и составных полувольт, определение интервала равномерной дискретизации времени цифровых сигнальных процессоров // Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21. № 1. С. 95–125. DOI: 10.15622/ia.2022.21.4.
10. Лазарев В.Л. Информационное шкалирование вариаций законов распределения параметров в приложениях к задачам мониторинга и управления // Научно-технические ведомости СПб ГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2019. Т. 12. № 2. С. 7–15.
11. Лазарев В.Л., Спасивцев А.В., Захаров В.В. Оценка видов законов распределений на основе величины энтропийного коэффициента // Изв. Вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63. № 2. С. 113–119.
12. Шамолин М.В. Алгоритмы диагностирования в некоторых системах прямого и непрямого управления // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2022. Т. 205. С. 107–118. DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-107-118.
13. Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Аналитический обзор подходов к распределению задач в группах мобильных роботов на основе технологий мягких вычислений // Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21. № 4. С. 729–757. DOI: 10.15622/ia.21.4.4.



14. Валиков П.И., Мусатов Р.Л., Степанов Б.В. Электрогидравлическая система управления движением робототехнического комплекса // Электронные информационные системы. 2020. № 2(25). С. 62–68.
15. Петренко В.И., Тебуева Ф.Б., Гурчинский М.М., Антонов В.О., Павлов А.С. Прогнозная оценка траектории руки оператора для решения обратной задачи динамики при копирующем управлении // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18. № 1. С. 123–147. DOI: 10.15622/sp.18.1.123-147.
16. Григорьев И.С., Данилина И.А. Оптимизация траектории перелётов космических аппаратов с дополнительным топливным баком. II. Автоматика и телемеханика. 2018. № 2. С. 135–153.
17. Manyam S.G. Optimal dubins paths to intercept a moving target on a circle // Proc. of the American Control Conference. 2019. pp. 828–834.
18. Майоров Б.Г. Способ непрерывной оптической связи с низколетящей целью // Патент RU №2 715 499 С1. 2020. МПК G 01 S 13/66.
19. Баунин В.Г., Землеханов А.Р., Швецов Н.В., Аверин Д.А. Система управления двухосным поворотным устройством опико-электронной системы сопровождения целей // Электронные информационные системы. 2020. № 2(25). С. 43–49.
20. Сенкевич Ю.И., Марапулец Ю.В., Луковенкова О.О., Солодчук А.А. Методика выделения информативных признаков в сигналах геоакустической эмиссии // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18. № 5. С. 1066–1092.
21. Хлистунов В.Н. О погрешности интерполяции дискретных методов измерения // Приборостроение. 1960. № 5. С. 3–5.
22. Майоров Б.Г. Обобщенный критерий наибольшего отклонения входных сигналов систем управления // Автоматика и телемеханика. 2005. № 10. С. 148–155.
23. Майоров Б.Г. Восстановление сигнала в системах реального времени по равномерным выборкам с уменьшением интервала Найквиста // Системы и средства информатики. 2019. Т. 29. № 2. С. 95–112.
24. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. 1928. vol. 47. no. 2. pp. 617–644.
25. Майоров Б.Г. Применение гармонических полуволн для автоматизации управления высокоскоростными поездами // Информатика и автоматизация. 2023. Т. 22. № 6. С. 1387–1414. DOI: 10.15622/ia.22.6.5.
26. Hartley R.V.L. Transmission of Information // Bell System Technical Journal. 1928. vol. 7. no. 3. pp. 535–563.

**Майоров Борис Геннадьевич** — канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник, центр специальных систем, Акционерное общество «Научно-производственное предприятие «Рубин»; доцент, Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: цифровая обработка сигналов, системы сбора и отображения информации в реальном времени. Число научных публикаций — 88. [bgmaurov@yandex.ru](mailto:bgmaurov@yandex.ru); улица Байдукова, 2, 440015, Пенза, Россия; р.т.: +7(8412)204-777.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена по плану научно-технического развития предприятия на 2024 год.

B. MAYOROV

**MODELS OF COMPOSITE HARMONIC HALF-WAVES AND THE RELATIONSHIP OF TIME SAMPLING WITH THE ENTROPY OF TIME PARAMETERS OF SIGNALS**

*Mayorov B. Models of Composite Harmonic Half-Waves and the Relationship of Time Sampling with the Entropy of Time Parameters of Signals.*

**Abstract.** The problem of finding the absolute error of stepwise and linear interpolation of the control signal from uniform samples from it using models of composite harmonic half-waves is solved. Previously, during the inspection of the control object, the maximum values of the signal parameters and half-waves are determined: speed, acceleration and sharpness, there are no spectrum parameters. To determine the values of the intervals of uniform sampling of time, two groups of models of "harmonic half-waves" are considered. The first group of models is described by harmonic time functions whose parameters are consistent. The second group of models is described by composite harmonic functions of time, thereby the time parameters of the signals are consistent. It is proved that with an increase in the entropy of the maximum values of the signal parameters, the value of the time sampling interval increases without increasing the interpolation error. Thus, the entropy value of the signal parameters serves as an indicator of their inconsistency. The results of modeling and graphs obtained in the environment of the mathematical package are presented. The results are intended to optimize the loading of input tasks and primary information processing of processors in robust real-time automation systems, for example, used to control high-speed trains when braking in sliding or skidding mode.

**Keywords:** robust systems, real time, time sampling, zero- and first-order interpolation, composite, harmonic functions, entropy of signal parameters, braking model with high-speed trains.

**References**

1. Kobernichenko V.G.. Osnovy tsyvrovoy obrabotki signalov. Uchebnoe posobie. [Fundamentals of digital signal processing. Textbook]. Ekaterinburg: Ural University Press, 2018. 150 p. (In Russ.).
2. Kuryachiy M.I., Gelcher A.A. Tsyvrovaya obrabotka signalov [Digital Signal Processing] Tomsk: Tomsk State University Publishing House, 2018. 234 p. (In Russ.).
3. Kontrol'no-izmeritel'noe oborudovanie R&S 2019. Katalogi Rohde&Schwarz [Test equipment R&S 2019. Catalogs Rohde&Schwarz] 2019. 256 p. Available at: [https://www.rohdeschwarz.com/ru/top\\_topics\\_russia/catalogs/\\_231625.html](https://www.rohdeschwarz.com/ru/top_topics_russia/catalogs/_231625.html) (accessed: 12.03.2020).
4. Infrastructure Status u-entwicklungsbericht 2019. Deutsche Bahn. 2020. 124 p.
5. ERTMS Level 3: the Game-Changer. 2022. Programme technical paper. London.
6. Thales consortium to install ECTS Level 1 ATR system in Thailand. Railway Technology. 2019. 20 p. Available at: <https://www.railway-technology.com/news/thales-consortium-to-install-ectcs-level-1-atp-system-in-thailand/> (accessed: 12.03.2020).
7. Ehret Marc. Virtual Train Brakes. Eisenbahnwesen-Seminar. TU-Berlin. 2020. 49 p. Available at: <https://www.static.tu.berlin/fileadmin/www/10002264/ews/2020-sose/2020-05-11-folien.pdf> (accessed:12.03.2020).
8. Introduction to ETCS Braking Curves. ERA ERTMS Unit. Version 1.5. 2020. 28 p.

9. Mayorov B.G. [Properties of harmonic and composite half-waves, determination of the interval of uniform time sampling of digital signal processors]. *Informatika i avtomatizatsiya – Informatics and Automation*. 2022. vol. 21. no. 1. pp. 95–125. DOI: 10.15622/ia.2022.21.4. (In Russ.).
10. Lazarev V.L. [Information scaling of variations in the laws of distribution of parameters in applications to monitoring and control problems]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti St. Petersburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Informatika. Telekommunikatsii. Upravlenie - Scientific and technical statements of the St. Petersburg State Polytechnic University. Computer science. Telecommunications. Control*. 2019. vol. 12. no. 2. pp. 7–15. (In Russ.).
11. Lazarev V.L., Spesivtsev A.V., Zakharov V.V. [Evaluation of the types of distribution laws based on the value of the entropy coefficient]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Izvestiya of higher educational institutions. Instrumentation*. 2020. vol. 63. no. 2. pp. 113–119. (In Russ.).
12. Shamolin M.V. [Diagnostic algorithms in some systems of direct and indirect control. Results of science and technology]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskii obzor – Results of science and technology. Series Modern Mathematics and Its Applications. Subject Review*. 2022. vol. 205. pp. 107–118. DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-107-118. (In Russ.).
13. Darintsev O.V., Migranov A.B. [Analytical review of approaches to the distribution of tasks in groups of mobile robots based on soft computing technologies]. *Informatika i avtomatizatsiya – Informatics and Automation*. 2022. vol. 21. no. 4. pp. 729–757. DOI: 10.15622/ia.21.4.4. (In Russ.).
14. Valikov P.I., Musatov R.L., Stepanov B.V. [Electrohydraulic motion control system for a robotic complex]. *Elektronnye informatsionnye systemy – Electronic information systems*. 2020. no. 2(25). pp. 62–68. (In Russ.).
15. Petrenko V.I., Tebueva F.B., Gurchinsky M.M., Antonov V.O., Pavlov A.S. [Predictive estimation of the trajectory of the operator's hand for solving the inverse problem of dynamics under copy control]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2019. vol. 18. no. 1. pp. 123–147. DOI: 10.15622/sp.18.1.123-147. (In Russ.).
16. Grigoriev I.S., Danilina I.A. Optimising flight for space vehicles with an additional fuel tank. II. *Autom. Remote Control*. 2018. vol. 79. no. 2. pp. 311–326.
17. Manyam S.G. Optimal dubins paths to intercept a moving target on a circle. *Proc. of the American Control Conference*. 2019. pp. 828–834.
18. Mayorov B.G. [The method of continuous optical communication with a low-flying target. Patent RU No. 2715499 C1. 2020. IPC G01S13/66]. *Bulletin of Inventions No. 7*. 2020. 2020. (In Russ.).
19. Baunin V.G., Zemlekanov A.R., Shvetsov N.V., Averin D.A. [Control system for a two-axis rotary device of an optical-electronic target tracking system]. *Elektronnye informatsionnye systemy - Electronic information systems*. 2020. no. 2(25). pp. 43–49. (In Russ.).
20. Senkevich Yu.I., Marapulets Yu.V., Lukovenkova O.O., Solodchuk A.A. [Technique for extracting informative features in geoacoustic emission signals]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2019. vol. 18. no. 5. pp. 1066–1092. (In Russ.).
21. Khlistunov V.N. [On the error of interpolation of discrete measurement methods]. *Priborostroenie – Instrumentation*. 1960. no. 5. pp. 3–5. (In Russ.).
22. Maiorov B.G. The generalized maximum deviation criterion for input signals of control systems // *Autom. Remote Control*. 2005. vol. 66. no. 10. pp. 1666–1672.
23. Mayorov B.G. [Signal recovery in real-time systems from uniform samples with decreasing Nyquist interval]. *Sistemy i sredstva informatiki – Systems and means of informatics*. 2019. vol. 29. no. 2. pp. 95–112. (In Russ.).

24. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. 1928. vol. 47. № 2. pp. 617–644.
25. Mayorov B.G. [Application of Harmonic Half-waves for Automation of High-speed Trains Control]. Informatika i avtomatizatsiya – Informatics and Automation. 2023. vol. 22. no. 6. pp. 1387–1414. DOI 10.15622/ia.22.6.5. (In Russ.).
26. Hartley R.V.L. Transmission of Information. Bell System Technical Journal. 1928. vol. 7. no. 3. pp. 535–563.

**Mayorov Boris** — Ph.D., Leading researcher, Center for special systems, Joint Stock Company Scientific and Production Enterprise Rubin; Associate professor, Penza State Technological University. Research interests: digital signal processing, systems for collecting and displaying information in real time. The number of publications — 88. bgmayorov@yandex.ru; 2, Baidukova St., 440015, Penza, Russia; office phone: +7(8412)204-777.

**Acknowledgements.** The work was carried out according to the plan of scientific and technical development of the enterprise in 2024.