УДК 004.8+519.2

К.В. Фроленков

АЛГОРИТМ ПЕРЕДАЧИ ВИРТУАЛЬНОГО СВИДЕТЕЛЬСТВА, СОХРАНЯЮЩИЙ СВОЙСТВО ГЛОБАЛЬНОЙ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ АЦИКЛИЧЕСКОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ БАЙЕСОВСКОЙ СЕТИ

Фроленков К.В. **Алгоритм передачи виртуального свидетельства, сохраняющий свойство глобальной непротиворечивости алгебраической байесовской сети.**
Аннотация. В теории алгебраических байесовских сетей (логико-вероятностных графических моделей, использующих для представления знаний с неопределенностью интервальные оценки вероятности истинности пропозициональных формул), формализовано понятие непротиворечивости содержащихся в системе знаний. В работе проанализирован алгоритм обработки поступивших свидетельств с точки зрения сохранения в процессе его выполнения непротиворечивости сети. Предложено улучшение существующего алгоритма, обеспечивающее непротиворечивость результата.
Ключевые слова: алгебраические байесовские сети, вероятностные графические модели систем знаний, логико-вероятностный вывод, непротиворечивость.

Frolenkov K.V. **Virtual evidence transmission algorithm preserving the global consistency property of algebraic Bayesian networks.**
Abstract. In the theory of algebraic Bayesian networks (logical probabilistic graphical models using the form of interval estimations of the probabilistic truth values of propositional formulas for knowledge with uncertainty representation) the notion of consistency contained in the knowledge system has been formalized. This paper analyzes the algorithm for propagation of received evidences from the point of view of preserving consistency in the course of its execution. An improvement of an existing algorithm providing consistency preservation is proposed.
Keywords: algebraic Bayesian networks, probabilistic graphical knowledge models, logical and probabilistic inference, consistency.

1. Введение. В исследованиях, связанных с теорией алгебраических байесовских сетей (АБС), особое место занимают вопросы непротиворечивости (согласованности) содержащейся в данной модели знаний с неопределенностью информации. В работах [1, 5, 7, 8] рассматривается ряд вопросов, связанных с непротиворечивостью, в частности выделяются степени непротиворечивости сети, приводятся рассуждения, показывающие недостаточность каждой предыдущей степени непротиворечивости для обеспечения последующей, что связано с использованием интервальных оценок истинности конъюнктов для представления знаний с неопределенностью (в теории АБС под конъюнктом подразумевается [9] положительный конъюнкт в смысле [2]).

Данный подход основывается на вероятностной логике, адаптация которой для потребностей исследований в сфере искусственного интеллекта была предложена в работе Нильсона [17], и уже в ней содержались рассуждения о непротиворечивости.

Одной из основных задач, решаемых в теории АБС, является задача [6, 9, 15] апостериорного вывода: обновления оценок вероятности, содержащихся в сети, при поступлении свидетельства. Алгоритмы, решающие данную задачу, называют алгоритмами апостериорного вывода (либо алгоритмами пропагации свидетельств).

Ранее было доказано [14], что применение данных алгоритмов не нарушает экстернальной непротиворечивости сети (т.е. свойства сети, при котором оценка вероятности истинности любого содержащейся в сети конъюнкта определена однозначно). Экстернальная непротиворечивость является необходимым условием непротиворечивости сети, но не гарантирует её [16].

Цель работы — исследовать свойства непротиворечивости ациклической АБС в контексте применения алгоритма апостериорного вывода, предложить алгоритм апостериорного вывода, действующий на всю сеть и сохраняющий её глобальную непротиворечивость.

2. Используемые определения и методы.

2.1. Основные структуры АБС.

Фрагментом знаний (ФЗ) будем называть пару $(C, \boldsymbol{p})$, где C — множество всех возможных конъюнктов некоторого набора пропозициональных переменных (данный набор будем называть *нагрузкой ФЗ* и обозначать $W(C, \boldsymbol{p})$), и $\boldsymbol{p}\colon C \to I(R)$ (через $I(R)$ обозначим множество интервалов $[a; b]\colon 0 \leq a \leq b \leq 1$), отображение, задающее нижние и верхние оценки вероятности для каждого конъюнкта из C. $\boldsymbol{p}$ может быть представлено парой функций p^- и p^+, удовлетворяющих $\boldsymbol{p}(c) = [p^+(c); p^-(c)]$ для всех конъюнктов c из C.

Частным случаем для такого определения является фрагмент знаний, у которого нижние и верхние границы $\boldsymbol{p}(c)$ совпадают. Такие ФЗ будем называть ФЗ со скалярными оценками и обозначать (C, p).

ФЗ, смоделированный таким образом, позволяет говорить о непротиворечивости содержащихся в нем значений: для случая скалярных оценок непротиворечивость означает, что p — функция вероятности истинности для конъюнктов из C; для случая интервальных оценок, непротиворечивость ФЗ можно определить, как свойство $\boldsymbol{p}$ задавать выпуклую оболочку непротиворечивых скалярных наборов вероятностей истинности данных конъюнктов. Другими словами, $(C, \boldsymbol{p})$ непротиворечив, если $\forall c \in C\ \forall p^* \in \boldsymbol{p}(c)\ \exists \{p_k^*\}_{k \in C} : \forall k \in C\ p_k^* \in \boldsymbol{p}(k)$, $p_c^* = p^*$ и (C, p_k^*) — непротиворечивый ФЗ со скалярными оценками.

Наряду с множеством конъюнктов C фрагмента знаний $(C, \boldsymbol{p})$ можно построить множество его квантов Q. Квантом будем называть элементарную конъюнкцию (не обязательно положительную), содержащую все переменные из $W(C, \boldsymbol{p})$. Алгоритмы получения оценок вероятностей квантов на основе оценок элементов C приведены в [4, 9].

2.2. Принципы обработки свидетельства. Приведем алгоритмы обработки свидетельства в АБС. Такие алгоритмы [10] делятся на два класса: *локальные алгоритмы* осуществляют расчет апостериорных оценок вероятности для конъюнктов, содержащихся в заданном ФЗ; *глобальные алгоритмы* обеспечивают распространение информации, полученной из свидетельства, с одного фрагмента знаний на соседние и, далее, — итеративно на всю сеть. При этом глобальные алгоритмы используют локальные для обработки каждого ФЗ.

Приведем алгоритмы обработки свидетельства для различных его типов внутри фрагмента знаний $(C, \boldsymbol{p})$. Если в систему поступило детерминированное свидетельство, то есть свидетельство истинности одной из формул $\tilde{X}$, построенной над переменными из $W(C, \boldsymbol{p})$, апостериорные оценки вероятностей определяются через решение следующих задач дробно-линейного программирования:

$$p^-\left(Z\middle|\langle\tilde{X}\rangle\right) = \min_{E \cup D} \frac{p\left(Z\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{X}\right)}, \quad p^+\left(Z\middle|\langle\tilde{X}\rangle\right) = \max_{E \cup D} \frac{p\left(Z\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{X}\right)}.$$

Здесь E — ограничения непротиворечивости p, D — ограничения вида $p(x) \in \boldsymbol{p}(x)$ для всех конъюнктов из C.

Если в систему поступило стохастическое свидетельство, то есть свидетельство, представленное фрагментом знаний (C_e, p_e): $C_e \subset C$ со скалярными оценками вероятности. Тогда апостериорные оценки p_a^-, p_a^+ вычисляются по формулам

$$p_a^-\left(Z\middle|\langle p_{[a]}(q)\rangle\right) = \sum_q p_a^-(Z|\langle q\rangle) p_{[a]}(q),$$

$$p_a^+\left(Z\middle|\langle p_{[a]}(q)\rangle\right) = \sum_q p_a^+(Z|\langle q\rangle) p_{[a]}(q).$$

Для случая поступления неточного свидетельства $(C_e, \boldsymbol{p_e})$ во фрагмент знаний $(C, \boldsymbol{p})$ расчет осуществляется в три этапа. На первом этапе вычисляются оценки $p_a^+(Z|\langle q\rangle)$ и $p_a^-(Z|\langle q\rangle)$ для всех квантов свидетельства. На втором — оцениваются вероятности таких квантов, исходя из вероятностей конъюнктов свидетельства (обозначим их как

$\Pr[a] : Q \to I(R)$ Далее апостериорные оценки вероятности рассчитываются по формулам:

$$p^{+}\left(Z \,\middle|\, \langle p_{[a]}(q) \in \Pr_{[a]}(q)\rangle\right) = \max_{p_{[a]}:F,T} \sum_{q} p_{a}^{+}(Z|\langle q\rangle) p_{[a]}(q),$$

$$p^{-}\left(Z \,\middle|\, \langle p_{[a]}(q) \in \Pr_{[\mathrm{a}]}(q)\rangle\right) = \max_{p_{[a]}:F,T} \sum_{q} p_{a}^{-}(Z|\langle q\rangle) p_{[a]}(q),$$

где F — множество ограничений вида $p_{[a]}(q) \in \Pr_{[\mathrm{a}]}(\mathrm{q})$, построенное для всех квантов q свидетельства, T — множество ограничений вида $\sum_q p_{[a]}(q) I_x(q) \in p_e(x)$, построенное для всех конъюнктов свидетельства, где $I_x(q) = 0$ в случае, если $x \wedge q$ — невыполнима, и $I_x(q) = 1$ в противном случае.

Распространение влияния свидетельства на более чем один фрагмент знаний производится с помощью передачи виртуальных свидетельств по особому дереву, связывающему фрагменты знаний в сеть и называемому деревом смежности. Требования, предъявляемые к таким деревьям, а также их свойства подробно описаны в [11–13]. Виртуальное свидетельство порождается из апостериорных оценок фрагмента знаний и передается в соседний, ещё не обработанный фрагмент знаний в качестве свидетельства.

3.1. Обеспечение непротиворечивости. Приведем формализацию понятия непротиворечивости сети [3].

Локально непротиворечивой [3] называют сеть, в которой каждый фрагмент знаний непротиворечив.

Экстернально непротиворечивой [3] называют локально непротиворечивую сеть, в которой оценки вероятностей конъюнктов, входящих в два или более фрагментов знаний, определены однозначно, т.е. $\forall c \; c \in C_i \cap C_j \Rightarrow p_i(c) = p_j(c)$.

Интернально непротиворечивой [3] называют экстернально непротиворечивую сеть, в которой при выборе точки из интервальной оценки вероятности любого конъюнкта в остальных интервальных оценках можно выбрать такие точки, что получившееся распределение вероятностей непротиворечиво внутри каждого ФЗ.

Глобально непротиворечивой [3] называют сеть, которая может быть погружена в непротиворечивый объемлющий фрагмент знаний. Объемлющий фрагмент знаний для сети $\{(C_i, \boldsymbol{p}_i)\}_{i=1}^{n}$ — это непротиворечивый ФЗ $(C, \boldsymbol{p})$, построенный над множеством всех пропозициональных переменных, вошедших в сеть, такой что $\forall i \forall c \in C_i \; \boldsymbol{p}_i(c) = \boldsymbol{p}(c)$.

Доказано [9], что в случае ациклического графа смежности всякая интернально непротиворечивая сеть глобально непротиворечива.

В контексте сохранения свойства интернальной непротиворечивости при пропагации свидетельства введем определения сонаправленной и противонаправленной интернальной непротиворечивости.

Пусть $N = \{(C_i, \boldsymbol{p}_i)\}_{i=1}^{n}$ — АБС, полученная применением алгоритма глобального апостериорного вывода, причем верно, что, если $i \geq j$, то фрагмент знаний $(C_i, \boldsymbol{p_i})$ обрабатывался алгоритмом локального апостериорного вывода не позже, чем $\left(C_j, \boldsymbol{p}_j\right)$. Тогда если для произвольного поддерева дерева смежности $\left\{\left(C_{i_k}, \boldsymbol{p}_{i_k}\right)\right\}_{k=1}^{m}$ с корнем $(C_i, \boldsymbol{p}_i)$ при выборе точки e из $\boldsymbol{p}_i(\mathrm{c})$, где $c \in C_i$, можно предъявить такие согласованные (т.е. совпадающие на одинаковых формулах) скалярные оценки $p_{i_k}^*$, что $p_{i_k}^*(w) \in \boldsymbol{p}_{i_k}(w)$ $\forall w \in C_{i_k}$, $p_{i_k}^*(c) = e$, в случае $i = \min\{i_k\}$, N противонаправленно интернально непротиворечива, в случае $i = \max\{i_k\}$, N сонаправленно интернально непротиворечива.

Замечание. Если АБС сонаправленно и противонаправленно интернально непротиворечива, то она интернально непротиворечива.

Утверждение 1. При поступлении неточного свидетельства $(C_e, \boldsymbol{p}_e)$ во фрагмент знаний $\left(C, \boldsymbol{p}_{\mathrm{apr}}\right)$, результирующий фрагмент знаний $(C, \boldsymbol{p})$ с апостериорными оценками вероятностей $\boldsymbol{p}$ обладает следующим свойством: для любого непротиворечивого набора скалярных оценок вероятностей p_e^* конъюнктов из C_e, такого что $\forall c \in C_e, p_e^*(\mathrm{c}) \in \boldsymbol{p_e}(c)$, существует такой непротиворечивый набор скалярных оценок вероятностей p^* конъюнктов из C, что $\forall c \in C_e, p^*(\mathrm{c}) = p_e^*(c)$ и $\forall c \in C, p^*(c) \in \boldsymbol{p}(c)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный набор оценок вероятностей p_{apr}^*: $\forall c \in C, p_{\mathrm{apr}}^*(c) \in \boldsymbol{p}_{\mathrm{apr}}(c)$. Возьмем в качестве p^* набор апостериорных оценок вероятностей, полученный в результате пропагации стохастического свидетельства (C_e, p_e^*) во фрагмент знаний $\left(C, \boldsymbol{p}_{\mathrm{apr}}\right)$. Известно [10], что любой полученный в результате пропагации набор оценок вероятностей является непротиворечивым, следовательно p^*— непротиворечивый.

Доказано [9], что апостериорная оценка вероятности совпадает с оценками, содержащимися в стохастическом свидетельстве $p^*(\mathrm{c}) = p_e^*(c)$.

Осталось доказать, что $\forall c \in C, p^*(c) \in \boldsymbol{p}(c)$, можно переписать в виде

$$\max_{\mathrm{p_e}:T,F} \sum_{\mathrm{I_c(q)=1}} p_e\,(q) \max_{p_{\mathrm{apr}}:\mathrm{D,E}} \left(\frac{p_{\mathrm{apr}}(c \wedge q)}{p_{\mathrm{apr}}(q)}\right) \geq \sum_{\mathrm{I_c(q)=1}} \mathrm{p_e^*}\,(q) \cdot \left(\frac{p_{\mathrm{apr}}^*(c \wedge q)}{p_{\mathrm{apr}}^*(q)}\right)$$

и

$$\min_{\mathrm{p_e}:T,F} \sum_{\mathrm{I_c(q)=1}} \mathrm{p_e}\,(q) \min_{p_{\mathrm{apr}}:\mathrm{D,E}} \left(\frac{p_{\mathrm{apr}}(c \wedge q)}{p_{\mathrm{apr}}(q)}\right) \leq \sum_{\mathrm{I_c(q)=1}} \mathrm{p_e^*}\,(q) \cdot \left(\frac{p_{\mathrm{apr}}^*(c \wedge q)}{p_{\mathrm{apr}}^*(q)}\right),$$

где $\mathrm{p_e^*}(q)$ — вероятность кванта, полученная на основе оценок $\mathrm{p_e^*}$, что верно, так как $\mathrm{p_e^*}(q)$ — фиксированный набор скалярных оценок, подчиняющийся условиям T и F, p_{apr}^* — подчиняющийся условиям D и E.

Утверждение 2. АБС, полученная в результате применения алгоритма глобального апостериорного вывода по дереву смежности, сонаправленно интернально непротиворечива.

Доказательство. Докажем утверждение по индукции по числу фрагментов знаний, принадлежащих выбранному поддереву.

База индукции. Если дерево состоит из единственного фрагмента знаний, условия утверждения и локальной непротиворечивости совпадают. При этом известно [5], что фрагмент знаний с апостериорными оценками вероятностей, полученными в результате применения алгоритма локального апостериорного вывода, непротиворечив.

Переход. Пусть $(C_i, \boldsymbol{p}_i)$ — корень дерева, $\left(C_j, \boldsymbol{p}_j\right)$ — один из листьев и $(C_l, \boldsymbol{p}_l)$ сочленен с $\left(C_j, \boldsymbol{p}_j\right)$, и выбрана точка, внутри одного из интервалов-оценок конъюнктов из C_i. По предположению индукции существует набор согласованных скалярных оценок $p_{i_k}^*$, таких что $\left(C_{i_k}, p_{i_k}^*\right)$ непротиворечивы, для всех фрагментов знаний дерева, кроме $\left(C_j, \boldsymbol{p}_j\right)$. Рассмотрим вероятности $p_l^*(c)$, $c \in C_l \cap C_j$. По утверждению 1 существует набор $p_j^*(c)$ скалярных оценок конъюнктов из C_j, такой что $p_j^*(c) = p_l^*(c)\ \forall c \in C_l \cap C_j$. Таким образом, набор $p_{i_k}^*$ и $p_j^*(c)$ удовлетворяет поставленному условию.

3.2. Улучшенный алгоритм передачи свидетельства. Описываемый алгоритм является альтернативным к алгоритму передачи виртуального свидетельства, используемого на данный момент.

Пусть в графе смежности имеется два смежных фрагмента знаний $(C_1, \boldsymbol{p_1})$ и $(C_2, \boldsymbol{p_2})$, причем для первого из них уже проведен пересчет вероятностей, а для второго ещё нет. Как и в изначальном алгоритме, подсчитаем апостериорные вероятности $p(a|\tilde{x})$, для всех конъюнктов a принадлежащих C_2 и всех квантов $\tilde{x}$, построенных над атомами из $C_1 \cap C_2$. Для получения апостериорных оценок будем решать задачи линейного программирования вида

$$\min \sum_x \left(\sum_q I_q(x) p_1(q) \right) p^-(a|x), \quad \max \sum_x \left(\sum_q I_q(x) p_1(q) \right) p^+(a|x),$$

где внешнее суммирование производится по всем квантам над переменными из C_1, а внутреннее — по всем квантам над переменными из $C_1 \cap C_2$.

При этом сконструируем множество ограничений, таким же образом, как в [15], при использовании переменных $\{q_i\}$ в задаче линейного программирования, ограничения будут выглядеть как $\sum_i p_1(q_i)\, I_c(q_i) \in \boldsymbol{p}_1(c)$ для всех конъюнктов c из $C_1 \cap C_2$ (обозначим такой набор за T'), набор ограничений F заменится на $F' = \{p_1(q) \in \boldsymbol{p}_1(q) \colon q \in Q_1\}$.

Замечание. Для случая скалярных оценок (т.е. когда минимум и максимум берутся по одноэлементному множеству) вероятности результаты использования улучшенного алгоритма передачи свидетельства и алгоритма, использующего виртуальное свидетельство, совпадут.

Доказательство. В случае скалярных оценок p_1, $\sum_q I_q(x) p_1(q) = p_e(x)$, где $p_e(x)$ — набор оценок квантов над переменными из $C_1 \cap C_2$, вычисленные на основе оценок конъюнктов из $C_1 \cap C_2$, следовательно, $\sum_x p_a(a|\langle x \rangle) p_e(x) = \sum_x \big(\sum_q I_q(x) p_1(q) \big) p_a(a|x)$.

Утверждение 3. Фрагмент знаний, полученный в результате применения улучшенного алгоритма передачи свидетельства, непротиворечив.

Доказательство. Пусть фрагмент знаний $(C, \boldsymbol{p})$ получен из $(C, \boldsymbol{p}_{\text{apr}})$ при поступлении в него свидетельства из $(C_1, \boldsymbol{p}_1)$. Зафиксируем точку $p_0 \in \boldsymbol{p}(\mathrm{c})$ для некоторого конъюнкта c из C. Так как $p_0 \in \boldsymbol{p}(c)$, выполняются неравенства:

$$\max_{\mathrm{p_e}:T',F'} \sum_x \left(\sum_q \mathrm{I_x(q) p_1}\,(q) \right) \max_{p_{\text{apr}}:D,E} \left(\frac{p_{\text{apr}}(c \wedge x)}{p_{\text{apr}}(x)} \right) \geq p_0,$$

$$\min_{\mathrm{p_e}:T',F'} \sum_x \left(\sum_q \mathrm{I_x(q) p_1}\,(q) \right) \min_{p_{\text{apr}}:D,E} \left(\frac{p_{\text{apr}}(c \wedge x)}{p_{\text{apr}}(x)} \right) \leq p_0.$$

В силу выпуклости пространства распределений вероятностей, задаваемых фрагментом знаний, существуют оценки вероятности квантов $p_1^*(q)$, удовлетворяющие T', F', и конъюнктов p_{apr}^*, удовлетворяющие

D, E, что $p_0 = \sum_x (\sum_q \mathrm{I_x(q)p_1^*}(q)) \left(\frac{p^*_{\mathrm{apr}}(c \wedge q)}{p^*_{\mathrm{apr}}(q)}\right)$. Тогда набор значений $f(a) = \sum_x (\sum_q \mathrm{I_x(q)p_1^*}(q)) \left(\frac{p^*_{\mathrm{apr}}(a \wedge q)}{p^*_{\mathrm{apr}}(q)}\right)$, где для всех конъюнктов a из C, задает распределение вероятностей, так как является выпуклой комбинацией непротиворечивых наборов оценок вероятностей $\left\{\frac{p^*_{\mathrm{apr}}(a \wedge q)}{p^*_{\mathrm{apr}}(q)}\right\}_{a \in C}$. Следовательно, непротиворечивость доказана.

Утверждение 4. АБС, полученная с помощью улучшенного алгоритма передачи свидетельства, сонаправленно интернально непротиворечива.

Доказательство. Пусть выбрана точка $p_n^*(w) \in \boldsymbol{p}_n(w)$. Пусть $\{(C_i, \boldsymbol{p}_i)\}_{i=1}^n$— произвольное поддерево графа смежности, содержащее $(C_n, \boldsymbol{p}_n)$. Докажем утверждение по индукции по n. При $n = 1$ утверждение следует из непротиворечивости $(C_n, \boldsymbol{p}_n)$. Для $n > 1$ обозначим смежный с $(C_n, \boldsymbol{p}_n)$ ФЗ через $\left(C_j, \boldsymbol{p}_j\right)$, и докажем, что существуют наборы чисел $p_j^*(\mathrm{c}) \in \boldsymbol{p}_j(\mathrm{c})$ и $p_n^*(\mathrm{c}) \in \boldsymbol{p}_n(\mathrm{c})$, такие, что $p_j^*(\mathrm{c}) = p_n^*(c)$ $\forall \mathrm{c} \in C_n \cap C_j$, и $\left(C_j, p_j^*\right)$, (C_n, p_n^*) — непротиворечивы. Тогда по предположению индукции сонаправленная интернальная непротиворечивость будет доказана. Пусть $\boldsymbol{q}_j$ — набор априорных (т.е. таких, что $(C_j, \boldsymbol{p}_j)$ получается из $(C_j, \boldsymbol{q}_j)$ в результате применения алгоритма локального апостериорного вывода) интервальных оценок вероятности конъюнктов из C_j. По непротиворечивости $(C_n, \boldsymbol{p}_n)$ существует непротиворечивый набор $p_n^*(\mathrm{c}) \in \boldsymbol{p}_n(\mathrm{c})$, по которому можно вычислить $p_n^*(q)$ для всех квантов q над переменными из C_n. Зафиксируем произвольный непротиворечивый набор $q_j^*(c) \in \boldsymbol{q}_j(c)$, Тогда, в силу совпадения результатов работы алгоритмов передачи свидетельства при скалярных оценках, набор $p_j^*(c)$, полученный по формулам $p_j^*(c) = \sum_x \left(\sum_q I_q(x) p_n^*(q)\right) q_j^*(a|x)$, будет непротиворечив и совпадет с $p_n^*(c)$ на c из $C_n \cap C_j$. Отметим, что $p_j^*(c) \in \boldsymbol{p}_j(c)$, так как $p_n^*(q)$ удовлетворяет T', F', и q_j^* удовлетворяет D, E.

Замечание. Было доказано чуть более сильное утверждение: при выборе произвольного непротиворечивого набора скалярных оценок внутри интервалов из $(C_n, \boldsymbol{p}_n)$ можно выбрать согласованные скалярные оценки внутри всех остальных значений $\boldsymbol{p}_j$, все выбранные оценки — согласованны, и все фрагменты знаний с соответствующими оценками — непротиворечивы.

Утверждение 5. АБС, полученная с помощью улучшенного алгоритма передачи свидетельства из интернально непротиворечивой сети, противонаправленно интернально непротиворечива.

Доказательство. Как и в случае утверждения 4, достаточно доказать утверждение для деревьев, состоящих из двух фрагментов знаний, из чего по индукции последует противонаправленная интернальная непротиворечивость. Для случая двух ФЗ, обозначим ФЗ, к которому алгоритм локального апостериорного вывода применялся первым через $(C_1, \boldsymbol{p}_1)$, а оставшийся через $(C_2, \boldsymbol{p}_2)$. Тогда для точки $p_2^*(w) \in \boldsymbol{p}_2(w)$, докажем существование непротиворечивых согласованных оценок $p_1^*(\mathrm{c})$, $p_2^*(w)$. Построим $f(a) = \sum_x (\sum_q \mathrm{I_x(q)p_1^*}\,(q)) \left(\frac{p_{\mathrm{apr}}^*(a \wedge q)}{p_{\mathrm{apr}}^*(q)} \right)$, как описано в доказательстве утверждения 3, подставив вместо $\boldsymbol{p}$ набор оценок $\boldsymbol{p}_2$. По построению $f(a) \in \boldsymbol{p}_2(a)$, тогда $p_1^*(\mathrm{c})$, использованный при построении $f(a)$, и $f(a)$ — искомые наборы.

Следствие. Ациклическая АБС, полученная с помощью улучшенного алгоритма передачи свидетельства интернально непротиворечива, и, если такая АБС ациклична, то она глобально непротиворечива.

4. Заключение. В статье проанализирован алгоритм распространения виртуальных свидетельств по дереву смежности с точки зрения сохранения свойства глобальной непротиворечивости АБС. В таком контексте данное свойство может быть рассмотрено как совокупность свойств сонаправленной и противонаправленной интернальной непротиворечивости. Установлено, что алгоритм пропагации свидетельства по дереву смежности, использующий виртуальные свидетельства, сохраняет свойство сонаправленной интернальной непротиворечивости. Предложен алгоритм передачи виртуального свидетельства, при котором сохраняются оба вида интернальной непротиворечивости.

Литература

1. *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // Известия РАН. Серия «Теория и системы управления». 1997. №5. С. 33–42.
2. *Кон П.* Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1969. — 351 с.
3. *Сироткин А. В.* Интернальная и экстернальная степени непротиворечивости ациклических алгебраических байесовских сетей // X Санкт-Петербургская международная конференция «Региональная информатика – 2006 (РИ-2006)», Санкт-Петербург, 24–26 октября 2006 г.: Мат. конфер. СПб.: СПОИСУ. 2006. С. 52.
4. *Сироткин А. В., Тулупьев А. Л.* Матричные уравнения локального логико-вероятностного вывода оценок истинности элементов в алгебраических байесовских сетях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2012. № 3. С. 63-72.

5. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: теоретические основы и непротиворечивость. СПб.: СПИИРАН, 1995. 75 с.
6. *Тулупьев А.Л.* Апостериорные оценки вероятностей в идеале конъюнктов // Вестник СПбГУ. 2010. Серия 10. Вып. 1. С. 95–104.
7. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в алгебраических байесовских сетях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. Вып. 3. С. 144–151.
8. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в идеалах конъюнктов и дизъюнктов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. Вып. 2. С. 121–131
9. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.
10. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2009. 400 с.
11. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. Сироткин А.В.* Компаративный анализ клик минимальных графов смежности алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 13. С. 186–205.
12. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л.* Совпадение множеств минимальных и нередуцируемых графов смежности над первичной структурой алгебраической байесовской сети. Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 2. С. 69–78.
13. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л.* Структурный анализ систем минимальных графов смежности Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 11. С. 104–127.
14. *Фроленков К.В.* Уточнение оценок вероятностей при локальном апостериорном выводе в алгебраической байесовской сети в случае неточного свидетельства // Труды СПИИРАН. 2013. Вып. 1. С. 190–204.
15. *Фроленков К. В., Фильченков А. А., Тулупьев А. Л.* Апостериорный вывод в третичной полиструктуре алгебраической байесовской сети. // Тр. СПИИРАН. № 4. 2012. С. 343-356.
16. *Сироткин А.В.* Алгебраические байесовские сети: вычислительная сложность алгоритмов логико-вероятностного вывода в условиях неопределённости: диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. СПб., 2011. (Санкт-Петербургский государственный университет.)
17. *Nilson N. J.* Probabilistic logic // Artificial Intelligence. N. 28(1). 1986. P. 71-87.

Фроленков Константин Владиславович — аспирант кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ), младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН. Область научных интересов: машинное обучение, вероятностный вывод. Число научных публикаций — 10. frolenk@mail.ru. Научный руководитель — А.Л. Тулупьев.

Frolenkov Konstantin Vladislavovich — PhD student of Computer Science Department, SPbGU, junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS. Research area: machine learning, probabilistic inference. The number of publications — 10. frolenk@mail.ru. Scientific advisor — A.L. Tulupyev.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 12-01-00945-а, 12-01-31202-мол_а.

Рекомендовано ТиМПИ СПИИРАН, зав. лаб. А.Л. Тулупьев, д.ф.-м.н., доцент.
Работа поступила в редакцию 20.02.2013.

РЕФЕРАТ

Фроленков К.В. **Алгоритм передачи виртуального свидетельства, сохраняющий свойство глобальной непротиворечивости алгебраической байесовской сети.**

В исследованиях по теории алгебраических байесовских сетей (АБС) особое место занимают вопросы непротиворечивости содержащейся в данной модели информации. Такое положение связано со способом представления знаний в виде интервальных или скалярных оценок истинности положительных конъюнктов. Данный подход основывается на вероятностной логике, адаптацию которой для потребностей исследований в сфере искусственного интеллекта, был предложен в работе Н. Нильсона, и уже в ней содержались рассуждения о непротиворечивости.

Одной из основных задач, решаемых в теории АБС, является задача апостериорного вывода: обновления оценок вероятности, содержащихся в сети, при поступлении в систему знания (свидетельства). Алгоритмы, решающие данную задачу, называют алгоритмами апостериорного вывода.

Ранее было доказано, что применение данных алгоритмов не нарушает согласованности сети (т.е. свойства сети, при котором оценка вероятности истинности содержащегося в сети конъюнкта определена однозначно). Согласованность является обязательным условием непротиворечивости, но не гарантирует её.

В настоящей статье проанализирован алгоритм распространения виртуальных свидетельств по дереву смежности с точки зрения сохранения свойства глобальной непротиворечивости АБС (более сильного свойства, чем согласованность). В таком контексте данное свойство может быть рассмотрено как совокупность свойств сонаправленной и противонаправленной интернальной непротиворечивости. Установлено, что алгоритм пропагации свидетельства по дереву смежности, использующий виртуальные свидетельства, сохраняет свойство сонаправленной интернальной непротиворечивости. Предложен алгоритм передачи виртуального свидетельства, при котором сохраняются оба вида интернальной непротиворечивости.

SUMMARY

Frolenkov K.V. **Virtual evidence transmission algorithm preserving the global consistency property of algebraic Bayesian networks.**

In the theory of algebraic Bayesian networks (ABN) issues of consistency of the information contained in the model take a special place. Such a situation is related to the method of knowledge representation in the form of interval or scalar evaluations of probabilistic truth values of positive conjunctions of propositional variables. This approach is based on probabilistic logic, which was adopted for artificial intelligence research area by Nielson, and in his works one may find discussion of the consistency.

One of the main tasks in the theory of ABN is a posteriori inference: updating the estimations of probabilities contained in the network when the system receives knowledge (evidence). Algorithms that perform this problem called algorithms of posteriori inference.

It has been proved that the use of these algorithms is not violates the coherence of a network (i.e. property which implies that estimation of the probability of a contained in the network conjunction is uniquely defined). In this paper the algorithm of virtual evidences propagation along the edges of join tree is analyzed for the global consistency property (stronger property than coherence) preservation. In this context, the property can be viewed as a complex of properties of co-directional and anti-directional internal consistency. Virtual evidences propagation algorithm on a join tree preserving the co-directional internality consistency is proven. The algorithm for the transmission of virtual evidence, which preserves both types of internal consistency, is proposed.