УДК 681.3

А.Е. Кочура, Л.В. Подкользина, Я.А. Ивакин, И.И. Нидзиев

СИНГУЛЯРНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ПУЧКИ В ОБОБЩЕННОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Кочура А.Е., Подкользина Л.В., Ивакин Я.А., Нидзиев И.И. **Сингулярные матричные пучки в обобщенной симметричной проблеме собственных значений.**
Аннотация. В статье излагаются предложенные методы решения обобщенной проблемы собственных значений и векторов для сингулярных матричных пучков, встречающихся в важных прикладных задачах различных отраслей знания.
Ключевые слова: матричный пучок, проблема собственных значений, спектральное уравнение, характеристическая матрица, сингулярное разложение матрицы, нуль-пространство матрицы, конгруэнтность, подобное преобразование, инерция матрицы, делитель спектра, дихотомия.

Kochura A.E., Podkolzina L.V., Ivakin Y.A., Nidziev I.I. **Singular matrix bundles in a generalized symmetric problem of eigenvalues.**
Abstract. The article sets out the methods proposed for solving the generalized problem eigenvalues and vectors for singular matrix bundles, occurring in the important applied problems of different branches of knowledge.
Keywords: matrix beam, eigenvalue problem, spec-Central equation, characteristic matrix, the singular value decomposition of a matrix, the null space of the matrix, congruence, such a transformation the inertia matrix, the divisor of the spectrum, the dichotomy.

1. Введение. Для широкого круга прикладных задач, связанных с исследованием характеристик и нахождением оптимальных расчетных структур всевозможных динамических систем в технике, сейсмологии, океанографии, квантовой химии, современных моделей обработки сигналов и во многих других областях знания, обобщенная проблема собственных значений в виде решения спектрального уравнения $\left(G-\lambda\,\Theta\right)X=0$ для симметричного действительного матричного пучка $\left(G,\Theta\right)$ обычно играет роль центральной вычислительной процедуры решаемых задач [1,2]. Причем в большинстве типовых случаев одна из матриц пучка или некоторая линейная комбинация из них положительно определена. В таких случаях обобщенная проблема (1) уверенно решается с использованием современного высококачественного программного обеспечения, реализованного в системе MATLAB, которая вобрала в себя передовой опыт развития и актуальной компьютерной реализации надежных и эффективных численных методов.

В прикладных задачах динамики механических и электромеханических систем рациональное построение расчетных спектральных моделей сложных агрегатно-модульных систем опирается на использование стандартизованных спектральных характеристик отдельных компоновочных модулей. В таких случаях глобальная расчетная модель исследуемого объекта принимает вид несвободной динамической системы с позиционными связями. Аналогично складывается расчетная ситуация при исследовании сейсмостойкости сложных многокомпонентных строительных объектов.

Проектные расчеты указанных систем, как правило, имеют многовариантный характер для обеспечения оптимальных характеристик создаваемых систем за счет варьирования в допустимых пределах упруго-инерционных параметров. В общем случае такие расчеты приобретают характер структурно-параметрического синтеза, когда варьируемое пространство дополняется корректирующими динамическими устройствами.

При видимой несхожести задач первого и второго вида их модельная интерпретация при исследовании спектральных характеристик приводит к динамическим моделям одной и той же структуры.

Спектральную задачу для рассматриваемых систем в наиболее общей ситуации можно представить как обобщенную проблему собственных значений

$$\left(G-\lambda\,\Theta\right)X=0 \tag{1}$$

для сингулярного матричного пучка $\left(G,\Theta\right)$, имеющего следующую структуру

$$G=\left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{12}^{*} & \Phi & 0 \\ \hline A_{13}^{*} & 0 & 0 \end{array}\right];\quad \Theta=\left[\begin{array}{c|c|c} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{2}$$

где Φ и E — диагональная и единичная матрицы; A_{12}^{*} и A_{13}^{*} — матрицы, эрмитово сопряженные в общем случае или симметричные в вещественных задачах.

Размеры подматриц в блочной структуре квазиупругой матрицы G определим следующим образом:

$$A_{11}:n_1\times n_1;\ A_{12}:n_1\times n_2;\ A_{13}:n_1\times n_3;\ n_2<n_1;n_3<n_1. \tag{3}$$

Рассматриваемая структура пучка (G,Θ) в общем случае соответствует подобному преобразованию стартовой расчетной модели дискретно-континуальной динамической системы в результате спектрального разложения исходной инерционной матрицы модели [2].

Обобщенная проблема собственных значений для симметричного пучка вида (2) принципиально труднее стандартной проблемы, поскольку в ней могут иметь место явления, существенно осложняющие локализацию собственных пар матричного пучка. Одно из таких явлений порождается сингулярностью пучка, которая состоит в том, что характеристическое уравнение пучка удовлетворяется при любом значении характеристического показателя. Чаще всего сингулярность матричного пучка обусловлена тем, что его компоненты имеют общие нуль-векторы X такие, что $GX = \Theta X = 0, X \neq 0.$ Такие векторы по сути являются собственными векторами пучка, и любое число будет для них собственным значением. Порождаемая этим явлением неопределенность собственного спектра пучка диктует необходимость специального начального этапа анализа любого пучка. На этом этапе отыскивается, а затем исключается из расчетной модели общее нуль-пространство матричной пары пучка. Теоретически это осуществляется сужением пучка на так называемое инвариантное подпространство.

На практике существует также опасность наличия у пучка (G,Θ) векторов, которые почти аннулируются обеими матрицами пучка. При расчетах в дискретной вычислительной среде это приводит к тому, что стандартные программы для решения обобщенной проблемы собственных значений могут вычислять некоторые плохо обусловленные собственные значения с патологическими свойствами. Эти собственные значения не только сверхчувствительны к возмущениям матриц пучка, но их присутствие в спектре значительно понижает устойчивость вычислительной схемы при определении других собственных значений. Математически в точной арифметике у матриц пучка в рассматриваемом случае нет общего нуль-пространства. В практической же процедуре для уверенного определения собственных пар пучка необходимо на начальном этапе избавиться также и от «почти-общего» нуль-пространства матриц пучка, задаваясь для этой цели соответствующим критерием малости при спектральных разложениях.

Таким образом, рассматриваемая проблема собственных значений требует особого подхода, и использование стандартного математического обеспечения возможно только после предварительной структуризации исходной модели с целью исчерпания общего нуль-пространства расчетного матричного пучка.

Решение поставленной задачи может быть осуществлено двумя путями. Один из них использует аппарат сингулярного разложения матриц, другой — «окаймляющую» структуризацию расчетного пучка в сочетании с эффективным алгоритмом решения обобщенной проблемы собственных значений окаймленного пучка.

Рассмотрим первый путь решения [3]. В дальнейшем воспользуемся следующими обозначениями:

$$\left.\begin{aligned} (G,\Theta) \xrightarrow{P} \left(\bar{G},\bar{\Theta}\right):\ \bar{G} = P^{*}G\,P;\ \bar{\Theta} = P^{*}\Theta\,P; \\ P \oplus R = diag\left(P,R\right), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где P^{*} — эрмитово сопряженная матрица для P.

Осуществим ортогональное преобразование координат модели (1)

$$X = (U \oplus E \oplus V)Y \tag{5}$$

и соответствующее подобное преобразование пучка (G,Θ)

$$(G,\Theta) \xrightarrow{(U\oplus E\oplus V)} (\bar{G},\bar{\Theta}), \tag{6}$$

где

$$\bar{G} = \left[\begin{array}{c|c|c} U^{*}A_{11}U & U^{*}A_{12} & U^{*}A_{13}V \\ \hline A_{12}^{*}U & \Phi & 0 \\ \hline V^{*}A_{13}^{*}U & 0 & 0 \end{array}\right];\ \bar{\Theta} = \left[\begin{array}{c|c|c} U^{*}U & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]; \tag{7}$$

$U^{*}A_{13}V = \left[\begin{array}{c} \sigma \\ \hline 0 \end{array}\right]$; $U^{*}U = E$; U и V — левая и правая сингулярные матрицы для подматрицы A_{13}, которые представляют собой ортонормальные модальные матрицы для симметричных произведений $A_{13}A_{13}^{*}$ и $A_{13}^{*}A_{13}$ соответственно; σ — диагональная $n_3 \times n_3$ матрица сингулярных чисел подматрицы A_{13}, представляющих собой положительные квадратные корни из ненулевых собственных значений матриц $A_{13}A_{13}^{*}$ и $A_{13}^{*}A_{13}$.

Если подматрица A_{13} имеет неполный ранг: $\operatorname{rank} A_{13} = \bar{n}_3 < n_3$, ее сингулярное разложение принимает вид

$$U^{*}A_{13}U = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\sigma} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \tag{8}$$

где $\bar{\sigma}$ — диагональная матрица порядка $\bar{n}_3$ ненулевых сингулярных чисел матрицы A_{13} ранга $\bar{n}_3$.

В общем случае, имея в виду возможность существования векторов, которые почти аннулируются обеими матрицами пучка, матрицу σ целесообразно представить в виде $\sigma = \bar{\sigma} \oplus \Delta$, где $\|\Delta\| = \kappa\|\sigma\|$. Здесь κ — пользовательский критерий малости, который позволяет принять $\Delta = 0$ и рассматривать преобразованную подматрицу A_{13} в виде (8). В матрицу Δ войдут и нулевые сингулярные числа, если подматрица A_{13} имеет арифметически точный неполный ранг.

В соответствии с факторизацией (8) для A_{13} подматрицы преобразованного пучка (7) целесообразно представить следующим образом:

$$U^* A_{11} U = \left[\begin{array}{c:c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hdashline \bar{A}_{12}^* & \bar{A}_{22} \end{array}\right]; \; U^* A_{12} = \left[\begin{array}{c} \bar{A}_{13} \\ \hdashline \bar{A}_{23} \end{array}\right]. \tag{9}$$

Участвующие в этих выражениях подматрицы характеризуются размерами:

$$\bar{A}_{11} : \bar{n}_3 \times \bar{n}_3; \; \bar{A}_{12} : \bar{n}_3 \times n_1 - \bar{n}_3; \; \bar{A}_{22} : (n_1 - \bar{n}_3) \times (n_1 - \bar{n}_3); \tag{10}$$
$$\bar{A}_{13} : \bar{n}_3 \times n_2; \; \bar{A}_{23} : (n_1 - \bar{n}_3) \times n_2.$$

В соответствии с принятым блочным представлением подматриц матрицы $\bar{G}$ матричное спектральное уравнение преобразованного пучка $(\bar{G}, \bar{\Theta})$ представим в следующем сегментированном виде:

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c:c} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} & \bar{\sigma} & 0 \\ \hdashline \bar{A}_{12}^* & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & 0 & 0 \\ \hdashline \bar{A}_{13}^* & \bar{A}_{23}^* & \Phi & 0 & 0 \\ \hdashline \bar{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{Y}_1 \\ \hdashline \bar{Y}_2 \\ \hdashline \bar{Y}_3 \\ \hdashline \bar{Y}_4 \\ \hdashline \bar{Y}_5 \end{array}\right] = \lambda \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{Y}_1 \\ \hdashline \bar{Y}_2 \\ \hdashline \bar{Y}_3 \\ \hdashline \bar{Y}_4 \\ \hdashline \bar{Y}_5 \end{array}\right]. \tag{11}$$

Форму (11) спектрального уравнения преобразованного пучка $(\bar{G}, \bar{\Theta})$ можно назвать канонической для сингулярных пучков с общим нуль-пространством у матричных компонентов пучка.

В рассматриваемом случае матрицы пучка $(\bar{G}, \bar{\Theta})$ имеют общее нуль-пространство размерности $n_3 - \bar{n}_3$, которое порождает бесконечное множество собственных значений. Действительно, вследствие нулевого окаймления матриц пучка $(\bar{G}, \bar{\Theta})$ для каждого вектора вида

$$\left(0 \;\vdots\; 0 \;\vdots\; 0 \;\vdots\; e_k^*\right)^*, \tag{12}$$

где e_k — единичный $(n_3 - \bar{n}_3)$-компонентный вектор, $k = 1, 2, \ldots, n_3 - \bar{n}_3$, любое число является собственным значением.

Таким образом, пучок $(\bar{G}, \bar{\Theta})$, которому соответствует спектральное уравнение вида (11), является сингулярным. В рабочей программе для решения обобщенной проблемы собственных значений должна быть предусмотрена вычислительная ветвь, которая в подобной ситуации осуществляет исчерпывание общего нуль-пространства матриц расчетного пучка. В рассматриваемом случае это означает, что пятые блочные строка и столбец в выражениях (11) для матриц $\bar{G}$ и $\bar{\Theta}$ должны быть отброшены. После этого, разрешая уравнения (11) снизу вверх, получим

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\sigma}\bar{Y}_1 = 0 \Rightarrow \bar{Y}_1 = 0;\\
&\bar{A}^*_{23}\bar{Y}_2 + \Phi\bar{Y}_3 = 0 \Rightarrow \bar{Y}_3 = -\Phi^{-1}\bar{A}^*_{23}\bar{Y}_2;\\
&(\bar{A}_{22} - \bar{A}_{23}\Phi^{-1}\bar{A}^*_{23})\bar{Y}_2 = \lambda\bar{Y}_2 \Rightarrow (\bar{A}_{22} - \bar{A}_{23}\Phi^{-1}\bar{A}^*_{23} - \lambda E)\bar{Y}_2 = 0;\\
&\bar{A}_{12}\bar{Y}_2 + \bar{A}_{13}\bar{Y}_3 + \bar{\sigma}\bar{Y}_4 = 0 \Rightarrow \bar{Y}_4 = -\bar{\sigma}^{-1}(\bar{A}_{12}\bar{Y}_2 + \bar{A}_{13}\bar{Y}_3).
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Из выражения в третьей строке системы (13) следует, что $n_1 - \bar{n}_3$ конечных собственных значений симметричного расчетного пучка (G, Θ) могут быть найдены в результате решения стандартной проблемы собственных значений для симметричной матрицы $\bar{A}_{22} - \bar{A}_{23}\Phi^{-1}\bar{A}^*_{23}$. Соответствующие этим значениям собственные векторы $\bar{Y}_s$ ведущего блочного 4×4-сегмента канонической формы пучка согласно зависимостям (13) имеют вид

$$\bar{Y}_s = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \bar{\bar{Y}}_{2s} \\ \hline -\Phi^{-1}\bar{\bar{A}}^*_{23}\bar{Y}_{2s} \\ \hline -\bar{\sigma}^{-1}(\bar{A}_{12} - \bar{A}_{13}\Phi^{-1}\bar{A}^*_{23})\bar{Y}_{2s} \end{array}\right], \quad s = 1, 2, \ldots, n_1 - \bar{n}_3. \qquad (14)$$

Согласно сегментации пучка, в промежуточной (7) и канонической (11) формах блочные компоненты собственных векторов этих форм связаны следующими соотношениями:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \hline \bar{Y}_2 \end{bmatrix};\; Y_2 = \bar{Y}_3;\; Y_3 = \begin{bmatrix} \bar{Y}_4 \\ \hline \bar{Y}_5 \end{bmatrix}, \qquad (15)$$

причем $\bar{Y}_1 = 0; \bar{Y}_5 = 0$.

Представим сингулярные матрицы U и V в блочном виде

$$U = \left[\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline U_{21} & U_{22} \end{array}\right];\ V = \left[\begin{array}{c|c} V_{11} & V_{12} \\ \hline V_{21} & V_{22} \end{array}\right]. \tag{16}$$

Тогда преобразование собственных векторов $\overline{Y}_s$ канонической формы (11) в собственные векторы исходного пучка (2) можно выполнить по формулам

$$X_s = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} U_{11} & U_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \hline U_{21} & U_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & V_{11} & V_{12} \\ \hline 0 & 0 & 0 & V_{21} & V_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \overline{Y}_1 \\ \overline{\overline{Y}}_2 \\ \overline{\overline{Y}}_3 \\ \overline{\overline{Y}}_4 \\ \overline{\overline{Y}}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} U_{12}\overline{Y}_{2s} \\ \hline U_{22}\overline{Y}_{2s} \\ \hline \overline{\overline{Y}}_{3s} \\ \hline V_{11}\overline{\overline{Y}}_{4s} \\ \hline V_{21}\overline{\overline{Y}}_{4s} \end{array}\right], \tag{17}$$

где $\overline{Y}_{3s}$ и $\overline{Y}_{4s}$ определяются согласно зависимостям (13).

Если подматрица A_{13} в блочной факторизации пучка имеет полный ранг, то каноническая форма спектрального уравнения для пучка $(\overline{G},\overline{\Theta})$ будет адекватна сингулярному ведущему блочному 4×4-сегменту уравнения (11), в котором вместо диагональной матрицы $\overline{\sigma}$ порядка $\overline{n}_3$ будет участвовать диагональная матрица σ порядка n_3. Символические зависимости (13) и (14) сохранят свой вид при условии замены в них имени $\overline{\sigma}$ на имя σ.

В рассматриваемом случае собственные значения расчетного пучка определяются в результате решения стандартной проблемы собственных значений для симметричной матрицы $\overline{A}_{22} - \overline{A}_{23}\Phi^{-1}\overline{A}_{23}^{*}$. Преобразование собственных векторов несингулярной канонической формы пучка в собственные векторы исходного пучка осуществляется в виде

$$X_s = \left[\begin{array}{c} U_{12}\overline{Y}_{2s} \\ \hline U_{22}\overline{Y}_{2s} \\ \hline \overline{\overline{Y}}_3 \\ \hline V\overline{\overline{Y}}_4 \end{array}\right]. \tag{18}$$

Рассмотрим второй путь решения рассматриваемой задачи. В этом случае структуризацию расчетного матричного пучка (G,Θ) после исчерпания общего нуль-пространства целесообразно представить в виде

$$G = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & \Phi \end{bmatrix}; \quad \Theta = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

где Φ — в общем случае вырожденная диагональная матрица, часть элементов или все элементы которой равны нулю.

Осуществим подобное преобразование рассматриваемого пучка, соответствующее ортогональному преобразованию координат $X = PY$

$$(G,\Theta) \xrightarrow{P} \left(\bar{G},\bar{\Theta}\right): \ \bar{G} = P^T G\,P; \ \bar{\Theta} = P^T \Theta\,P; \\ P = \mu \oplus E, \tag{20}$$

где μ — модальная матрица ведущей подматрицы A_{11} порядка n.

Характеристическая матрица K спектрального уравнения преобразованного пучка $\left(\bar{G},\bar{\Theta}\right)$ будет иметь вид

$$K = \begin{bmatrix} N - \lambda E & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{12}^T & \Phi \end{bmatrix}, \tag{21}$$

где $N = \mu^T A_{11}\mu = diag\left(\nu_i\right)$ — диагональная матрица собственных значений ведущей подматрицы A_{11}, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\bar{A}_{12} = \mu^T A_{12}, Y = \left(Y_1, Y_2\right)^T$.

Матрица K представляет собой окаймленную диагональную λ-матрицу $N - \lambda E$ с m-мерным окаймлением, $m = n_2 + n_3$. Структурным ключом этой матрицы служит матричная пара $\left(T_n^{(1)}, \Theta\right)$

$$T_n^{(1)} = \begin{bmatrix} N & R^T \\ R & \sigma_0 \end{bmatrix}; \quad \Theta = E \oplus 0, \tag{22}$$

которой отвечает характеристическая матрица с одномерным окаймлением.

В выражении (22) параметры окаймления матрицы $T_n^{(1)}$ имеют следующее содержание: $R = \left(d_1, d_2, \ldots, d_{n1}\right)$, σ_0 — скаляр, отличный от нуля или равный нулю в зависимости от особенностей моделируемой системы.

Характеристическую матрицу $T_n^{(1)} - \lambda\Theta$, воспользовавшись гауссовой факторизацией для треугольного разложения, можно представить следующими зависимостями:

$$T_n^{(1)} - \lambda\Theta = L^T \Delta\, L, \tag{23}$$

$$L=\begin{bmatrix} E & HR^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\quad H=\left(N-\lambda E\right)^{-1}=diag\left(\frac{1}{\nu_i-\lambda}\right), i=1,2,\ldots,n;$$

$$\Delta(\lambda)=\left(N-\lambda E\right)\oplus\Delta_{n+1};\quad \Delta_{n+1}=\sigma_0-R\,H\,R^T.$$

В соответствии с полученными зависимостями диагональные элементы Δ_k диагональной матрицы $\Delta(\lambda)$ в конгруэнтном представлении матрицы $T_n^{(1)}-\lambda$ можно записать в виде

$$\Delta_k=\nu_k-\lambda,\, k=1,2,\ldots,n;\,\Delta_{n+1}=\sigma_0-\sum_{i=1}^{n}d_i^2\left(\nu_i-\lambda\right)^{-1}. \tag{24}$$

Опираясь на закон Сильвестра об инерции симметричной матрицы, с учетом теоремы Вейля о непрерывности собственных значений такой матрицы, можно утверждать, что число отрицательных знаков у членов последовательности Δ_j, $j=1,2,\ldots,n+1$, согласно выражениям (24) при текущем значении λ равно числу собственных значений матричного пучка $\left(T_n^{(1)},\Theta\right)$ меньших λ. Другими словами, последовательность Δ_j, $j=1,2,\ldots,n_1+1$, можно рассматривать как опорный знаковый ряд для делителя спектра $\varsigma(\lambda)$ матричного пучка $\left(T_n^{(1)},\Theta\right)$: число отрицательных элементов $\varsigma(\lambda)$ на главной диагонали матрицы $\Delta(\lambda)$ есть число собственных значений пучка $\left(T_n^{(1)},\Theta\right)$, которые меньше, чем λ.

Эффективность процесса локализации собственных значений пучка $\left(T_n^{(1)},\Theta\right)$ может быть существенно повышена, если учесть особенности характеристического уравнения этого пучка

$$\sigma_0-\sum_{i=1}^{n}d_i^2\left(\nu_i-\lambda\right)^{-1}=0. \tag{25}$$

Из выражения (25) следует, что уравнение (25) имеет n при $\sigma_0\neq 0$ и $n-1$ при $\sigma_0=0$ корней λ_i, которые строго разделяются собственными значениями ν_i ведущей подматрицы N пучка $\left(T_n^{(1)},\Theta\right)$:

$$\begin{gathered} \nu_1<\lambda_1<\nu_2<\lambda_2<\ldots<\nu_{n-1}<\lambda_{n-1}<\nu_n<\lambda_n<\infty\text{, если } \sigma_0<0; \\ 0<\lambda_1<\nu_1<\lambda_2<\nu_2\ldots<\nu_{n-2}<\lambda_{n-1}<\nu_{n-1}<\lambda_n<\nu_n\text{, если } \sigma_0>0; \\ \nu_1<\lambda_1<\nu_2<\lambda_2<\ldots<\nu_{n-1}<\lambda_{n-1}<\nu_n\text{, если } \sigma_0=0; \end{gathered} \tag{26}$$

Условия (26) позволяют эффективно осуществлять локализацию собственных значений пучка $\left(T_n^{(1)},\Theta\right)$ по параллельной вычислительной схеме одновременно в n или $n-1$ интервалах изоляции в соответствии с выражениями (26). При этом делитель спектра пучка $\left(T_n^{(1)},\Theta\right)$ целесообразно использовать в бинарной модификации, как двоичный индикатор $\xi(\Delta_{n+1})$:

$$\xi(\Delta_{n+1}) = \begin{cases} 1 \text{ при } \Delta_{n+1} < 0; \\ 0 \text{ при } \Delta_{n+1} \geq 0. \end{cases} \tag{27}$$

Собственное значение λ_i в простейшей вычислительной схеме локализуется в интервале длиной $(\nu_{i+1}-\nu_i)2^{-k}$ за k шагов итерационного процесса, реализуемого по схеме деления отрезка пополам. В теле соответствующего рабочего цикла на каждом j-м шаге границы текущего интервала изоляции $\left(a_j^{(i)},b_j^{(i)}\right)$ для λ_i определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i^{(j-1)} = \frac{1}{2}\left(a_{j-1}^{(i)}+b_{j-1}^{(i)}\right);\ \xi_j = \xi\left(\Delta_{n+1}\left(\lambda_i^{(j-1)}\right)\right); \\ &a_j^{(i)} = \lambda_i^{(j-1)};\ b_j^{(i)} = b_{j-1}^{(i)}\ \textit{при}\ \xi_j = 0; \\ &a_j^{(i)} = a_{j-1}^{(i)};\ b_j^{(i)} = \lambda_i^{(j-1)}\ \textit{при}\ \xi_j = 1, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где $\lambda_i^{(j-1)}, a_{j-1}^{(i)}, b_{j-1}^{(i)}$ — приближение собственного значения λ_i и границы интервала его изоляции на $(j-1)$-м шаге рассматриваемого итерационного процесса.

В общем случае вместо рассмотренной дихотомической схемы для локализации собственных значений пучка $\left(T_n^{(1)},\Theta\right)$ в интервалах согласно выражениям (26) можно использовать более эффективные известные процедуры [1].

Вычисление собственных векторов пучка $\left(T_n^{(1)},\Theta\right)$ можно построить на основе явных выражений для компонентов α_{ks} собственного вектора $V_s = \left(\alpha_{1s},\alpha_{2s},\ldots,\alpha_{n+1,s}\right)$:

$$\alpha_{ks} = -d_k\left(\nu_k-\lambda_s\right)^{-1},\ k=1,2,\ldots,n;\ \alpha_{n+1}=1, \tag{29}$$

где $s \in \begin{cases} [1, n], \; если \; \sigma_0 \neq 0; \\ [1, n-1], \; если \; \sigma_0 = 0. \end{cases}$

Можно показать, что и в особых ситуациях, связанных с наличием у пучка $\left(T_n^{(1)}, \Theta\right)$ кратных собственных значений, структура пучка позволяет построить для решения проблемы его собственных значений и векторов эффективные и хорошо обусловленные параллельные вычислительные схемы [2].

Общий алгоритм решения проблемы собственных значений и векторов матричного пучка (G, Θ) вида (19) реализуется как рекурсивная последовательность соответствующих проблем для пучков $\left(T_n^{(1)}, \Theta\right)$ вида (22), сопровождающаяся последовательным исчерпанием матричного окаймления характеристической матрицы K пучка (G, Θ) [2].

Рассмотрим в качестве иллюстративного примера решение с использованием изложенной методики задачи, связанной с расчетом спектральных характеристик консервативной составной динамической системы с сосредоточенными параметрами, компонуемой из трех подсистем.

Векторы обобщенных координат подсистем примем в виде

$$X_1 = (x_1, x_2, x_3)^*; \quad X_2 = (x_4, x_5, x_6)^*; X_3 = (x_7, x_8, x_9)^*.$$

Консервативные динамические модели подсистем можно представить в виде

$$m_i \ddot{X}_i + g_i X_i = 0, i = 1, 2, 3,$$

где $m_1 = diag(3,1,3); m_2 = diag(2,4,1); m_3 = diag(2,2,3);$

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \; g_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}; g_3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Приведенные значения квазиинерционных параметров узлов и квазиупругих параметров подсистем являются безразмерными, соответствующими некоторым принятым значениям квазиинерционной и квазиупругой постоянных расчетной динамической системы.

Глобальная система образуется как связный ансамбль рассматриваемых подсистем в результате наложения следующих связей двух видов:

- жесткого сопряжения инерционных узлов 2, 5 и 8

$$f_1(X_g) = x_2 - x_5 = 0; \quad f_2(X_g) = x_2 - x_8 = 0; \\ f_2(X_g) = x_5 - x_8 = 0; \tag{30}$$

- сопряжения инерционных узлов 1, 7 и 3, 6 упругими соединениями с безразмерными квазиупругими коэффициентами соответственно $c_{1,7} = 1$; $c_{3,6} = 0,5$

$$f_3(X_g) = x_1 - x_7 + \delta_1 = 0; \quad f_4(X_g) = x_3 - x_6 + \delta_2 = 0, \tag{31}$$

где $X_g = (x_1, x_2, \ldots, x_6)^*$; δ_1 и δ_2 — деформации указанных упругих соединений.

Рассматривая глобальную систему как несвободную динамическую систему, подчиненную позиционным связям вида (1) и (2), запишем дифференциальные уравнения движения невозмущенной глобальной системы в лагранжевой форме с множителями

$$\left.\begin{aligned} M_0\ddot{X}_g + G_0 X_g &= \left(\frac{DF_1}{DX_g}\right)^T \Lambda_1 + \left(\frac{DF_2}{DX_g}\right)^T \Lambda_2; \\ \frac{DF_1}{DX_g} X_g + \Delta &= 0; \\ \frac{DF_2}{DX_g} X_g &= 0; \\ C\Delta &= \Lambda_1, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

где $M_0 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3$; $G_0 = g_1 \oplus g_2 \oplus g_3$; $\Delta = diag(\delta_1, \delta_2)$; $C = diag(c_{1,7}, c_{3,6})$; $F_1 = (f_3, f_4)$; $F_2 = (f_1, f_2)$; $\frac{DF_1}{DX_g}, \frac{DF_2}{DX_g}$ — матрицы Якоби; Λ_1, Λ_2 — неопределенные множители Лагранжа, имеющие смысл реакций соответствующих связей, $\oplus$ — символ прямой суммы матриц.

Используя расширенный вектор X_r избыточных обобщенных координат, консервативную динамическую модель рассматриваемой глобальной системы можно представить в следующей матрично-векторной форме:

$$M_r X_r + G_r X_r = 0, \tag{33}$$

где

$$M_r = M_0 \oplus 0_4\,; \quad G_r = \begin{bmatrix} G_0 & D_1 & D_2 \\ D_1^* & \Phi & 0_2 \\ D_2^* & 0_2 & 0_2 \end{bmatrix};$$

$D_i = \left(\dfrac{DF_i}{DX_g}\right)^*, i = 1,2.\ \Phi = C^{-1};\quad X_r^* = \left(X_g^*, \Lambda_1^*, \Lambda_2^*\right);\quad 0_2$ и 0_4 – нулевые матрицы порядков 2 и 4.

Численные версии матриц M и G с учетом упруго-инерционных характеристик подсистем и уравнений связей (1) и (2) получены в виде

$$M_r = \begin{bmatrix}
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix};$$

$$G_r = \begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Выполним нормировку матрицы M_r модели (4) за счет преобразования координат в виде

$$X_r = P_m X,\ P_m = M_0^{-0,5} \oplus E_4. \tag{34}$$

В координатном пространстве X модель (4) будет иметь вид

$$M_m \ddot{X} + G_m X = 0, \tag{35}$$

где

$$M_m = E_9 \oplus 0_4\,;\quad G_m = \begin{bmatrix} G_{0m} & D_{1m} & D_{2m} \\ D_{1m}^* & \Phi & 0_2 \\ D_{2m}^* & 0_2 & 0_2 \end{bmatrix}; G_{0m} = M_0^{-0,5} G_0 M_0^{-0,5};$$

$$D_{1m} = M_0^{-0,5} D_1\,; D_{2m} = M_0^{-0,5} D_2\,.$$

Отыскание решения дифференциального уравнения (35) в форме $X = \mathrm{H}e^{\lambda t}$ приводит к необходимости решения обобщенной проблемы собственных значений для матричного пучка (G_m, M_m)

$$G_m H = \lambda M_m H, \tag{36}$$

где (λ, H) — собственная пара пучка.

Матричный пучок (G_m, M_m) имеет структуру сингулярного матричного пучка (2) и характеризуется следующим численным содержанием его компонентов

$$
G_m = \begin{bmatrix}
0.333 & -0.577 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.577 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.577 & 2 & -0.577 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -0.577 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.577 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.707 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & 3 & -1.225 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.707 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.225 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.577 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.577 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
M_m = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Используя стандартную программу *svd* системы MATLAB, найдем матричные компоненты сингулярного разложения подматрицы $D_{2m} = USV^*$

$$[U,S,V] = svd(D_{2m});$$

где U,V — левая и правая сингулярные матрицы подматрицы D_{2m}; S — сингулярное ядро подматрицы D_{2m}:

$$
U = \begin{bmatrix}
0 & 0 & -0.792 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.61 & 0 \\
-0.898 & -0.225 & -0.231 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.159 & 0.635 & 0.461 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.599 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0.41 & -0.739 & -0.326 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.424 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix};
$$

$$
S^* = \begin{bmatrix}
1.553 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}; \quad
V = \begin{bmatrix}
-0.7 & -0.52 & -0.577 \\
-0.765 & 0.285 & 0.577 \\
-0.136 & 0.805 & -0.577
\end{bmatrix}.
$$

Определим содержательную ведущую подматрицу σ матрицы S в виде

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1.553 & 0 \\ 0 & 1.043 \end{bmatrix}.$$

Следуя зависимостям (4) и (5), выполним преобразование координат модели (35) по формуле

$$X = P_s Y, \tag{37}$$

и представим эту модель в виде

$$M\ddot{Y} + GY = 0, \tag{38}$$

где $P_s = U \oplus E_2 \oplus V$;

$$G = \left[\begin{array}{c:c:c} U^* G_{0m} U & U^* D_{1m} & U^* D_{2m} V \\ \hdashline D_{1m}^* U & \Phi & 0_2 \\ \hdashline V^* D_{2m}^* U & 0_2 & 0_2 \end{array}\right]; \quad M = \left[\begin{array}{c:c:c} E_9 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0_3 \end{array}\right].$$

Численное значение матрицы G получено в виде

$$G = \begin{bmatrix}
2.143 & -0.404 & -0.471 & -0.113 & -0.519 & -0.159 & -0.615 & -0.238 & -0.502 & 0 & 0 & 1.553 & 0 & 0 \\
-0.404 & 2.143 & 0.431 & -0.449 & -0.13 & -0.635 & 1.109 & -0.773 & 0.905 & 0 & 0 & 0 & 1.043 & 0 \\
-0.471 & 0.431 & 0.636 & 0.326 & -0.133 & 0.461 & 0.489 & -0.612 & 0.399 & -0.458 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.113 & -0.449 & 0.326 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.424 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.519 & -0.13 & -0.133 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0.173 & 0 & 0 & -0.577 & 0 & 0 & 0 \\
-0.159 & -0.635 & 0.461 & 0 & 0 & 2 & 0 & -0.599 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-0.615 & 1.108 & 0.489 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & -0.635 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.238 & -0.773 & -0.612 & -0.424 & 0.173 & -0.599 & -0.635 & 1.411 & -0.519 & -0.352 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.502 & 0.905 & 0.399 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.519 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.458 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.352 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.577 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
1.553 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Подматрица $U^* D_{2m} V = S$ рассматриваемой модели имеет неполный ранг, что порождает общее нуль-пространство у компонентов расчетного матричного пучка (G, M), которое следует исключить. Это исключение совершается в результате удаления последней строки и последнего столбца у матриц G и M. Соответствующее преобразование модели (38) определяется зависимостями:

$$Y = P_\Delta Q; \quad \bar{M}\ddot{Q} + \bar{G}Q = 0; \quad \bar{M} = P_\Delta^* M P_\Delta; \quad \bar{G} = P_\Delta^* G P_\Delta; \quad P_\Delta = \begin{bmatrix} E_{13} \\ 0_{1,13} \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Сингулярный спектральный аналог консервативной модели (39) будет иметь вид

$$\bar{G}\,Z = \lambda\,\bar{M}\,Z, \qquad (40)$$

где (λ, Z) — собственная пара матричного пучка $(\bar{G}, \bar{M})$.

Численные поля полученных компонентов матричного пучка $(\bar{G}, \bar{M})$ сегментируем, следуя схеме (12)

$$\bar{G} = \left[\begin{array}{cc|ccccccc|cc|cc}
2.143 & -0.404 & -0.471 & -0.113 & -0.519 & -0.159 & -0.615 & -0.238 & -0.502 & 0 & 0 & 1.553 & 0 \\
-0.404 & 2.143 & 0.431 & -0.449 & -0.13 & -0.635 & 1.109 & -0.773 & 0.905 & 0 & 0 & 0 & 1.043 \\
\hline
-0.471 & 0.431 & 0.636 & 0.326 & -0.133 & 0.461 & 0.489 & -0.612 & 0.399 & 0-0.458 & 0. & 0 & 0 \\
-0.113 & -0.449 & 0.326 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.424 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.519 & -0.13 & -0.133 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0.173 & 0 & 0 & -0.577 & 0 & 0 \\
-0.159 & 0.635 & 0.461 & 0 & 0 & 2 & 0 & -0.599 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-0.615 & 1.109 & 0.429 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & -0.635 & 0 & -0.707 & 0 & 0 & 0 \\
-0.238 & -0.773 & -0.612 & -0.424 & 0.173 & -0.599 & -0.635 & 1.411 & -0.519 & -0.352 & 0 & 0 & 0 \\
-0.502 & 0.905 & 0.399 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.519 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -0.458 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.352 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.577 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
\hline
1.553 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right],$$

$$\bar{M} = \left[\begin{array}{cc|ccccccc|cc|cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right].$$

В соответствии с выполненной сегментацией матричного пучка $(\bar{G}, \bar{M})$ символическое представление спектрального уравнения (40) примем в виде

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & b_1 & \sigma \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & b_2 & 0 \\ \hdashline b_1^* & b_2^* & \Phi & 0 \\ \hdashline \sigma & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} Z^{(1)} \\ \hdashline Z^{(2)} \\ \hdashline Z^{(3)} \\ \hdashline Z^{(4)} \end{array}\right]=\lambda\left[\begin{array}{c:c:c:c} E_2 & 0_{2,7} & 0_2 & 0_2 \\ \hdashline 0_{7,2} & E_7 & 0_{7,2} & 0_{7,2} \\ \hdashline 0_2 & 0_{2,7} & 0_2 & 0_2 \\ \hdashline 0_2 & 0_{2,7} & 0_2 & 0_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} Z^{(1)} \\ \hdashline Z^{(2)} \\ \hdashline Z^{(3)} \\ \hdashline Z^{(4)} \end{array}\right], \qquad (41)$$

где $Z^{(i)}$,$(i=1,2,3,4)$ — кортежи собственного вектора Z , структурно согласованные со схемой сегментации матричного пучка (G,M) .

Разрешая матричные уравнения, соответствующие четырем горизонтальным сегментам системы (40), снизу вверх, получим

$$\left.\begin{array}{c} \sigma Z^{(1)}=0 \Rightarrow Z^{(1)}=0; \\ b_2^* Z^{(2)}+\Phi Z^{(3)}=0 \Rightarrow Z^{(3)}=-\Phi^{-1}b_2^* Z^{(2)}; \\ (a_{22}-b_2\Phi^{-1}b_2^*)\, Z^{(2)}=\lambda Z^{(2)} \Rightarrow (a_{22}-b_2\Phi^{-1}b_2^*-\lambda E_7)\, Z^{(2)}=0; \\ a_{12}Z^{(2)}+b_1 Z^{(3)}+\sigma Z^{(4)}=0 \Rightarrow Z^{(4)}=-\sigma^{-1}(a_{12}Z^{(2)}+b_1 Z^{(3)}). \end{array}\right\} \qquad (42)$$

Из выражения в третьей строке системы (42) следует, что 7 конечных собственных значений симметричного расчетного пучка (G,Θ) могут быть найдены в результате решения стандартной проблемы собственных значений для симметричной матрицы $A=a_{22}-b_2\Phi^{-1}b_2^*$. В соответствии с выполненной сегментацией матрицы G численное значение матрицы A определено в виде

$$A=\begin{bmatrix} 0.636 & 0.326 & -0.133 & 0.461 & 0.489 & -0.612 & 0.399 \\ 0.326 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.424 & 0 \\ -0.133 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0.173 & 0 \\ 0.461 & 0 & 0 & 2 & 0 & -0.599 & 0 \\ 0.489 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & -0.635 & 0 \\ -0.612 & -0.424 & 0.173 & -0.599 & -0.635 & 1.411 & -0.519 \\ 0.399 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.519 & 1 \end{bmatrix}$$

Решая стандартную проблему собственных значений с помощью стандартной программы системы *MATLAB* найдем матрицу *SP* собственных значений и модальную матрицу μ_A матрицы A:

$$SP=diag\begin{pmatrix}0 & 0.488 & 0.683 & 1 & 1.606 & 2.33 & 3.274\end{pmatrix}; \qquad (43)$$

$$
\mu_A = \begin{bmatrix}
0.652 & 0.427 & -0.43 & 0 & 0 & 0.232 & 0.393 \\
-0.309 & -0.079 & -0.367 & 0.775 & 0.368 & 0.0819 & 0.148 \\
0.378 & -0.843 & -0.321 & 0 & -0.161 & -0.132 & 0.0151 \\
-0.218 & 0.0925 & -0.0394 & 0 & -0.301 & -0.682 & 0.622 \\
-0.309 & -0.17 & 0.0878 & 0 & -0.517 & 0.664 & 0.4 \\
-0.227 & 0.233 & -0.606 & 0 & -0.527 & -0.0784 & -0.494 \\
-0.378 & -0.968 & -0.449 & -0.633 & 0.451 & 0.1 & 0.182
\end{bmatrix}.
$$

Собственные значения матрицы A являются собственными значениями модели (38) и исходной сингулярной динамической модели (33).

Сингулярную модальную матрицу μ_z матричного пучка $\left(\vec{G}, \bar{M}\right)$ модели (40) можно определить как вертикальную конкатенацию четырех матриц $\mu_{z1}, \mu_{z2}, \mu_{z3}, \mu_{z4}$, связанных друг с другом теми же соотношениями, что и кортежи $Z^{(1)}, Z^{(2)}, Z^{(3)}, Z^{(4)}$ собственного вектора Z согласно зависимостям (42):

$$
\mu_z = \left(\mu_{z1}, \mu_{z2}, \mu_{z3}, \mu_{z4}\right)^*,
$$

где $\mu_{z1} = 0_{2,7}$; $\mu_{z2} = \mu_A$; $\mu_{z3} = -\Phi^{-1} b_2^* \mu_{z2}$; $\mu_{z4} = -\sigma^{-1}(a_{12}\mu_{z2} + b_1\mu_{z3})$;

$$
\mu_z = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.652 & 0.427 & -0.43 & 0 & 0 & 0.232 & 0.393 \\
-0.309 & -0.079 & -0.367 & 0.775 & 0.368 & 0.0819 & 0.148 \\
0.378 & -0.843 & -0.321 & 0 & -0.161 & -0.132 & 0.0151 \\
-0.218 & 0.0925 & -0.0394 & 0 & -0.301 & -0.682 & 0.622 \\
-0.309 & -0.17 & 0.0878 & 0 & -0.517 & 0.664 & 0.4 \\
-0.227 & 0.233 & -0.606 & 0 & -0.527 & -0.0784 & -0.494 \\
-0.378 & -0.0968 & -0.449 & -0.633 & 0.451 & 0.1 & 0.182 \\
0 & -0.157 & 0.348 & 0 & 0.551 & -0.548 & -0.289 \\
0 & 0.197 & 0.113 & 0 & 0.197 & 0.379 & -0.315 \\
0 & -0.211 & -0.472 & -0.148 & -0.198 & 0.246 & 0.34 \\
0 & 0.178 & -0.196 & 0.882 & -0.277 & -1.343 & -0.666
\end{bmatrix}.
$$

Модальную матрицу μ сингулярного матричного пучка $\left(G_r, M_r\right)$ расчетной модели (33) с учетом преобразований координат модели (33), выполненных в соответствии с выражениями (34), (38) и (39) получим в виде

$$\mu = P_m P_s P_\Delta \mu_z = \left(M_0^{-0,5} \oplus E_4\right)\left(U \oplus E_2 \oplus V\right)\begin{bmatrix} E_{13} \\ 0_{1,13} \end{bmatrix}\mu_z =$$

$$= \begin{bmatrix}
-0.218 & -0.277 & 0.41 & 0 & 0.186 & -0.0787 & -0.0057 \\
-0.218 & -0.0286 & -0.0822 & 0 & -0.158 & -0.077 & -0.238 \\
-0.218 & 0.487 & 0.186 & 0 & 0.0929 & 0.0761 & -0.0087 \\
-0.218 & -0.0559 & -0.259 & 0.548 & 0.26 & 0.0579 & 0.105 \\
-0.218 & -0.0286 & -0.0822 & 0 & -0.158 & -0.077 & -0.238 \\
-0.218 & 0.0925 & -0.0394 & 0 & -0.301 & -0.682 & 0.622 \\
-0.218 & -0.12 & 0.0621 & 0 & -0.366 & 0.47 & 0.283 \\
-0.218 & -0.0286 & -0.0822 & 0 & -0.158 & -0.077 & -0.238 \\
-0.218 & -0.0559 & -0.259 & -0.365 & 0.26 & 0.0579 & 0.105 \\
0 & -0.157 & 0.348 & 0 & 0.551 & -0.548 & -0.289 \\
0 & 0.197 & 0.113 & 0 & 0.197 & 0.379 & -0.315 \\
0 & 0.0402 & 0.399 & -0.365 & 0.268 & 0.543 & 0.132 \\
0 & 0.212 & 0.305 & 0.365 & 0.0722 & -0.571 & -0.45 \\
0 & 0.172 & -0.0941 & 0.73 & -0.196 & -1.114 & -0583
\end{bmatrix}. \qquad (44)$$

Модальное преобразование исходной расчетной модели, сопровождаемое преобразованием ее сингулярного матричного пучка $\left(G_r, M_r\right)$ в виде

$$G_E = \mu^* G_r \mu; \; M_E = \mu^* M_r \mu ,$$

приводит расчетную модель к нормальной форме с диагональным матричным пучком:

$$\ddot{R} + G_R R = 0,$$

где $R = \mu X_r$;

$$G_R = SP = diag\left(0.0000 \;\; 0.4879 \;\; 0.6830 \;\; 1.0000 \;\; 1.6064 \;\; 2.3299 \;\; 3.2738\right).$$

В качестве контрольного расчета построим решение обобщенной проблемы собственных значений для симметричного матричного пучка $\left(G_c, M_c\right)$, соответствующего дифференциальному уравнению движения рассматриваемой динамической системы в том случае, когда она схематизируется как свободная система. Численные значения компонентов пучка $\left(G_c, M_c\right)$ в соответствии с уравнениями связей (30) и (31) можно представить в виде

$$G_c = \begin{bmatrix}
2.000 & -1.000 & 0 & 0 & 0 & -1.000 & 0 \\
-1.000 & 12.000 & -1.000 & -2.000 & -2.000 & -3.000 & -3.000 \\
0 & -1.000 & 1.500 & 0 & -0.500 & 0 & 0 \\
0 & -2.000 & 0 & 2.000 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2.000 & -0.500 & 0 & 2.500 & 0 & 0 \\
-1.000 & -3.000 & 0 & 0 & 0 & 4.000 & 0 \\
0 & -3.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.000
\end{bmatrix};$$

$$M_c = diag\left(3 \quad 7 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3\right).$$

Матрицу собственных значений $S\overline{P}$ и модальную матрицу $\overline{\mu}$ пучка $\left(G_c, M_c\right)$ вычислим по стандартной программе системы *MATLAB*

$$[\overline{\mu}, S\overline{P}] = eig\left(G_c, M_c\right):$$

$$\overline{\mu} = \begin{bmatrix} -0.2182 & -0.2774 & 0.4100 & 0.0000 & 0.1856 & -0.0787 & -0.0057 \\ -0.2182 & -0.0286 & -0.0822 & -0.0000 & -0.1578 & -0.0770 & -0.2384 \\ -0.2182 & 0.4866 & 0.1855 & 0.0000 & 0.0929 & 0.0761 & -0.0087 \\ -0.2182 & -0.0559 & -0.2592 & -0.5477 & 0.2602 & 0.0579 & 0.1048 \\ -0.2182 & 0.0925 & -0.0394 & -0.0000 & -0.3012 & -0.6818 & 0.6218 \\ -0.2182 & -0.1201 & 0.0621 & 0.0000 & -0.3655 & 0.4695 & 0.2830 \\ -0.2182 & -0.0559 & -0.2592 & 0.3651 & 0.2602 & 0.0579 & 0.1048 \end{bmatrix}; \qquad (45)$$

$$S\overline{P} = diag\left(-0.0000 \;\; 0.4879 \;\; 0.6830 \;\; 1.0000 \;\; 1.6064 \;\; 2.3299 \;\; 3.2738\right). \qquad (46)$$

Сравнение полученных значений $\overline{\mu}$, $S\overline{P}$ согласно выражениям (45), (46) и значений μ, SP согласно выражениям (44), (43) с учетом уравнений связей (30) и (31) свидетельствует о корректном совпадении этих значений.

Литература

1. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир, 1983.
2. *Кочура А.Е.* Декомпозиция и технология разреженных матриц в динамике систем. Изд. Санкт-Петербургского института машиностроения, 2001.
3. *Кочура А.Е., Подкользина Л.В.* Нестандартные варианты симметричной проблемы собственных значений в спектральных задачах динамики систем //Инструмент и технологии. № 36 (вып.2). 2012.

Кочура Александр Евгеньевич — д.т.н., профессор. Область научных интересов: динамика и управление. Число научных публикаций — 203. kochura@mail.ru. Государственный политехнический университет, ул. Политехническая, д.29,г. Санкт-Петербург, 195251, РФ; моб. т. +7 -911-961-47-90; р.т. +7(812) 540-39-05.

Kochura Alexander Eugeniyevich - Dr. Sc. in Technical Sciences, Professor. Research interests: the dynamics and management. The number of scientific publications - 203. kochura@mail.ru; State Polytechnical University, ul.Politehnicheskaya, 29, St. Petersburg, 195251, Russia; mob.phone +7 -911-961-47-90; office phone +7(812) 540-39-05.

Подкользина Людмила Викторовна — к.п.н., доцент. Область научных интересов: динамика и управление. Число научных публикаций — 37. Podkolzina1951@mail.ru; stud.atkip@zavod-vtuz.ru. Государственный политехнический университет, ул.Политехническая, д.29,г. Санкт-Петербург, 195251, РФ; моб. т. +7 -921-944-88-54; р.т. +7(812) 540-39-05.

Podkolzina Ludmila Victorovna - PhD, Associate Professor. Research interests: the dynamics and management. The number of scientific publications - 37. Podkolzina1951@mail.ru; stud.atkip@zavod-vtuz.ru; State Polytechnical University, ul.Politehnicheskaya, 29, St. Petersburg, 195251, Russia; mob.phone +7 -921-944-88-54; office phone +7(812) 540-39-05.

Ивакин Ян Альбертович — д.т.н., доцент; ведущий научный сотрудник СПИИРАН. Область научных интересов: интеллектуализация геоинформационных систем. Число научных публикаций — 75. ivakin@oogis.ru; www.oogis.ru; СПИИРАН, 14 линия В.О., д.39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; моб. т. +7 -911-284-36-20; р.т. +7(812) 355-96-81.

Ivakin Yan Albertovich — Dr. Sc. in Technical Sciences, Associate Professor; senior researcher fellow in SPIIRAS. Research interests: intellectualization of geoinformational systems. The number of publication — 75. ivakin@oogis.ru; www.oogis.ru; SPIIRAS, 39, 14-th Line V.O., St.Petersburg, 199178, Russia; mob.phone +7 -911-284-36-20; office phone +7(812) 355-96-81.

Нидзиев Иван Иванович — к.т.н.; докторант ВУНЦ ВМФ «ВМА им. Н.Г.Кузнецова». Область научных интересов: интеллектуализация информационных систем. Число научных публикаций — 24. ivan005@mail.ru; ВМПИ ВУНЦ ВМФ «ВМА им. Н.Г.Кузнецова» , д.17, ул. Разводная, Петродворец. Санкт-Петербург, 198295, РФ; моб. т. +7 -921-952-76-04; р.т. +7(812) 427-52-45.

Nidziev Ivan Ivanovich — Ph.D. Sc. in Technical Sciences; senior researcher fellow in Kuznetcov Naval Academy . Research interests: intellectualization of informational systems. The number of publication — 24. ivan005@mail.ru; Kuznetcov Naval Academy, 17, Razvodn aya str.,Petrodvorets, St.Petersburg, 198295, Russia; mob.phone +7 -921-952-76-04; office phone +7(812) 427-52-45.

Рекомендовано научно-исследовательской лабораторией объектно-ориентированных геоинформационных систем, заведующий лабораторией Попович В.В., д-р техн. наук.
Статья поступила в редакцию 10.03.2013.

РЕФЕРАТ

Кочура А.Е., Подкользина Л.В., Ивакин Я.А., Нидзиев И.И. **Сингулярные матричные пучки в обобщенной симметричной проблеме собственных значений.**

Рассматриваемая проблема имеет актуальный характер для широкого круга прикладных задач, связанных с исследованием характеристик и нахождением оптимальных структур всевозможных динамических систем в самых различных областях знания.

Обобщенная проблема собственных значений для симметричного матричного пучка принципиально труднее стандартной проблемы, поскольку в ней могут иметь место явления, существенно осложняющие локализацию собственных пар матричного пучка. Одно из таких явлений порождается сингулярностью пучка, которая состоит в том, что характеристическое уравнение пучка удовлетворяется при любом значении характеристического показателя.

Такая ситуация характерна для прикладных задач динамики сложных механических и электромеханических агрегатно-модульных систем. Проектные расчеты указанных систем, как правило, имеют многовариантный характер для обеспечения оптимальных характеристик создаваемых систем за счет варьирования в допустимых пределах упруго-инерционных параметров. В общем случае такие расчеты приобретают характер структурно-параметрического синтеза, когда варьируемое пространство дополняется корректирующими динамическими устройствами.

При видимой несхожести задач первого и второго вида их модельная интерпретация при исследовании спектральных характеристик приводит к динамическим моделям одной и той же структуры с вырожденным инерционным полем. Следствием этого обстоятельства обычно является наличие общего нуль-пространства у расчетного матричного пучка, что приводит к необходимости предварительной структуризации исходной расчетной модели с целью исчерпания указанного нуль-пространства.

В статье рассмотрены два метода решения такой задачи. Один из них использует аппарат сингулярного разложения матриц, другой – “окаймляющую” структуризацию расчетного пучка в сочетании с эффективным алгоритмом решения обобщенной проблемы собственных значений окаймленного пучка.

SUMMARY

Kochura A.E., Podkolzina L.V., Ivakin Y.A., Nidziev I.I. **Singular matrix bundles in a generalized symmetric problem of eigenvalues.**

The considered problem is actual for a wide variety of problems related to the study of characteristics and finding the optimal structures of various dynamical systems in various fields of knowledge.

The generalized eigenvalue problem for a symmetric matrix bundle essentially is more difficult than standard-issue, as it may occur phenomena, significantly complicating the localization of their own pairs matrix bundle. One such phenomenon is generated by the singularity of the bundle, which consists in the fact that the characteristic equation of the bundle is satisfied for any value of the characteristic of the indicator.

This situation is typical for applications of the dynamics of complex mechanical and electromechanical aggregate-module systems. Design calculations of these systems tend to have a multivariate character to ensure the optimum performance of the systems due to a variation in the acceptable range of elastic-inertial parameters. In general, these calculations assume the character of structural and parametric synthesis when variable space is complemented by dynamic corrective devices.

The apparent dissimilarity of the tasks of the first and the second type of model interpretation in the study of the spectral characteristics leads to dynamical models of the same structure with a degenerate inertial field. The consequence of this fact is usually the presence of a common null-space matrix bundle in the design, making it necessary to pre-structuring of the original design model to the exhaustion of this null-space.

The paper considers two methods for solving this problem. One of them uses the singular value decomposition of the unit matrix, and the other – "surrounding" structuring of the estimated bundle in combination with an effective algorithm for solving the generalized eigenvalue problem fringed bundle.