УДК 681.3.006

В.М. Шпаков

ТРАНЗИТИВНЫЙ ПОДХОД К РЕАЛИЗАЦИИ И ОЦЕНКЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Шпаков В.М. **Транзитивный подход к реализации и оценке случайных процессов.**
Аннотация. Рассматриваются возможности использования подхода, основанного на транзитивных (трансформационных) правилах формализма спецификации детерминированных процессов, для реализации случайных процессов и оценки их характеристик. Приводится краткое описание формализма и способы его применения для моделирования динамических систем при наличии случайных воздействий. Обсуждаются методы реализации случайных процессов с заданными статистическими свойствами и методы оценки числовых характеристик и корреляционных функций эргодических случайных процессов. Представлены примеры реализации случайных процессов и результаты оценки их характеристик и корреляционных функций.
Ключевые слова: компьютерное моделирование, случайные процессы, автоматическое управление.

Shpakov V.M. **Transitive approach to random processes implementation and estimation.**
Abstract. Means of use of based on transition rules formalism for determinate processes specification for random processes implementation and their characteristic estimation are considered. A short description of the formalism and methods of its use for simulation of dynamical systems in the presence of random impacts are presented. Methods of realization of random processes with specified statistic properties and methods of random ergodic process numerical characteristic and correlation functions estimation are discussed. Examples of random process implementations and results of their characteristics and correlation functions estimations are produced.
Keywords: computer simulation, random processes, automatic control.

1. Введение. Потребность в реализации случайных процессов возникает при компьютерном моделировании динамических систем, использующих случайные управляющие сигналы или / и находящихся под воздействием случайных помех. При этом существует задача реализации случайных процессов, обладающих заданными статистическими свойствами, и задача оценки статистических характеристик процессов, преобразованных динамическими элементами системы.

В [1] рассмотрен подход к спецификации взаимодействующих детерминированных (не случайных) гибридных процессов. В основе подхода лежит модель гибридного автомата [2], функции перехода которой специфицируются с помощью правил трансформации дискретных и непрерывных состояний процессов и реализуются соответствующими процедурами интерпретатора этих правил. Реализация процессов, основанная на использовании трансформационных правил, имеет ряд преимуществ по сравнению с их реализацией с помощью использования универсальных языков программирования и компиляторов. Наиболее трудоемкой задачей при разработке компьютерных моделей динамических систем и реализации систем управления является формализация знаний экспертов в предметных и проблемных областях приемлемая для использования программистами. Язык трансформационных правил ориентирован на спецификацию процессов и в этом отношении является языком более высокого уровня, чем универсальные языки. Одним из достоинств спецификации процессов с помощью правил является простота и удобство модификации получаемых спецификаций. Можно добавлять и удалять отдельные правила или их совокупности, не изменяя оставшиеся правила. Целью данной статьи является изложение результатов экспериментального исследования основанных на указанном подходе методов моделирования случайных процессов и методов оценки их статистических характеристик.

В следующем подразделе введения кратко излагаются необходимые для понимания положения, основанного на трансформационных правилах транзитивного подхода к реализации гибридных процессов [1–3]. Второй раздел статьи содержит описания правил для реализации и оценки случайных процессов, примеры и результаты моделирования некоторых случайных процессов.

1.1. Транзитивный подход к спецификации процессов. Текущее состояние совокупности гибридных процессов задается множеством вещественных переменных X, представляющих непрерывные составляющие, и множеством логических переменных W, представляющих дискретные составляющие процессов. Среди этих переменных выделяются подмножества независимых внешних воздействий: логических (V) и непрерывных (X_i). В составе множества W выделяются также подмножество Q, содержащее переменные для представления состояний дискретно-событийных процессов и режимов гибридных процессов, и подмножество предикатов от непрерывных состояний (G). В это же подмножество включаются логические переменные для представления принимаемых решений и действий. В результате для представления процессов имеем следующие множества переменных: $W = V \bigcup Q \bigcup G$, $X = X_i \bigcup X_S$, где X_s — непрерывные переменные состояния.

Для спецификации процессов необходимо задать функции переходов следующих типов:

$\sigma : W \to Q \times \{False, True\}$ — функция трансформации состояний дискретно-событийных процессов и режимов гибридных процессов;

$\delta : W \times X \to X_s$ — функция трансформации непрерывных состояний для возможных режимов гибридных процессов;

$\gamma : X \to G \times \{False, True\}$ — зависимость значений предикатов от непрерывных состояний процессов.

С учетом этого абстрактная модель гибридных процессов может быть представлена в виде следующего кортежа:

$$M = (V, Q, G, \sigma, \gamma, X, \delta, q_0, Init),$$

где $q_0, Init$ — множества дискретных и непрерывных начальных состояний, соответственно.

Функции трансформации состояний σ и δ специфицируются с помощью трансформационных правил, функция γ — с помощью неравенств от непрерывных состояний. Область определения функции перехода σ можно описывать с помощью элементарных конъюнкций логических переменных. Такие конъюнкции интуитивно понятным образом могут интерпретироваться как логико-динамические ситуации [1]. Вводя обозначение S_j, динамическую ситуацию можно определить следующим образом:

$$S_j = s_{j_1}, \ldots s_{j_i}, \ldots, s_{j_n}, \text{ где } s_{j_i} = w_{j_i} \text{ или } s_{j_i} = \neg w_{j_i},$$
$$w_{j_i} \in W, \; n = 1 \ldots N_w, N_w = |W|.$$

Обозначая множество ситуаций S, тип функции трансформации дискретных (логических) состояний теперь можно определить следующим образом: $\sigma : S \to Q \times \{False, True\}$. Эта функция может быть задана с помощью совокупности продукционных правил:

$$S_j \to r'_{j_1}, \ldots, r'_{j_i}, \ldots, r'_{j_m}, \text{ где } r'_{j_i} = q'_{j_i} \text{ или } r'_{j_i} = \neg q'_{j_i}, \; q'_{j_i} \in Q. \qquad (1)$$

В данной статье нас будут интересовать только непрерывные процессы, определяемые динамическими звеньями и функциональными преобразователями системы, и специфицируемые функцией перехода δ. Эта функция определяется трансформационными правилами, условная часть которых содержит логическую переменную, представляющую ситуацию или режим, а исполнительная часть — транзитивное отношение между текущим и следующим состояниями процесса [4]. При рассмотрении транзитивных отношений используется соглашение о том, что именем переменной со штрихом обозначается состояние процесса, непосредственно следующее за состоянием, обозначенным этим же именем без штриха. В случае свободного одномерного непрерывного процесса отношение следования или транзитивное отношение (transition relation) представляет собой бинарное отношение на множестве вещественных чисел вида $\tau(y, y')$ или $y' = \tau(y)$, где y — текущее состояние процесса, а y' — следующее состояние процесса. Транзитивное отношение τ определяется параметрами динамического звена и длительностью интервала времени Δt между y и y'. В случае вынужденного процесса оно также зависит от внешнего воздействия x. Для реализации зависимости непрерывных состояний от логики развития гибридного процесса, процедуры вычисления этих отношений включаются в исполнительные части правил, условными частями которых являются требуемые значения соответствующих режимов. В принятых обозначениях эти правила имеют вид

$$S_j \rightarrow x'_k = \tau_k(x_k, x),\ x_k \in X_s,\ x \in X, \tag{2}$$

где S_j — ситуация, определяющая режим, τ_k и x_k — соответствующие отношение и состояние, x — вещественная переменная модели.

Функцию γ удобно представлять совокупностью правил следующего вида:

$$(x_{j_1} \geq (a_k + x_{j_2})) \wedge (x_{j_3} \leq (b_k + x_{j_4})) \rightarrow g_k, \tag{3}$$

где $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_4} \in X$, $g_k \in G$, a_k и b_k - константы, соответствующие некоторому диапазону. Более сложные предикаты могут формироваться из простых предикатов с помощью правил (1).

Компьютерная реализация процессов, специфицированных трансформационными правилами (1, 2, 3), производится путем использования интерпретатора этих правил. Архитектура и алгоритмы функционирования интерпретатора достаточно просты. Множества переменных состояния процессов (X и W) в интерпретаторе представляются массивами записей, каждая из которых содержит имя переменной и ее значение. Все правила реализуются с помощью условных операторов «if…then…». Обе части оператора содержат записи об использованных в данном правиле переменных. Основу интерпретатора составляет исполняющая процедура, которая в цикле сканирует списки правил. Алгоритм обработки правил вычисляет значение условной части правила. Если это значение равно True, то запускается алгоритм выполнения исполнительной части правила. В случае правила (1) запускается указанная в исполнительной части правила процедура вычисления транзитивного отношения, и найденное новое значение состояния процесса присваивается соответствующей переменной. На каждом шаге цикла обновления состояний процессов производится продвижение времени на интервал Δt. Возможны два режима продвижения времени. В режиме реального времени измеряется длительность каждого цикла, и время увеличивается на измеренное значение. В этом случае быстродействие соответствует реальным процессам, а точность зависит от быстродействия компьютера и размерности задачи. В режиме модельного времени время продвигается после каждого цикла на заданную пользователем величину. При этом точность определяется величиной заданного приращения времени, а быстродействие зависит от быстродействия компьютера и размерности модели. Использование современных персональных компьютеров для реализации моделей, содержащих тысячу правил, позволяет обеспечить величину приращения реального времени, не превышающую нескольких десятков микросекунд, что обеспечивает точность приемлемую для большинства приложений.

Описанный подход к реализации процессов был использован при разработке в СПИИРАН опытного образца компьютерной среды EnviCon, ориентированной на моделирование совокупностей взаимодействующих гибридных процессов [5]. Среда содержит редакторы для формирования векторов состояния процессов и списков правил трансформации состояний процесса. Для обработки правил (2) в среде имеется набор процедур реализации арифметических операторов, элементарных функций и транзитивных отношений для элементарных процессов. В частности имеются процедуры для реализации интеграторов, дифференциаторов, апериодических звеньев, колебательных звеньев, звеньев чистого запаздывания.

2. Реализация и оценка случайных процессов. Будут рассматриваться только стационарные эргодические процессы, то есть процессы, характеристики которых не изменяются во времени и для которых среднее по времени реализации совпадает со средним по ансамблю реализаций. Основными характеристиками случайного процесса $x(t)$ являются: математическое ожидание $\overline{x} = M(x(t))$, дисперсия $D=M((x(t)-\overline{x})^2)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma=\sqrt{D}$, корреляционная функция $R_x(\tau)=M(x(t)\cdot x(t+\tau))$ и спектральная плотность, представляющая собой преобразованье Фурье от корреляционной функции $S_x(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$. Здесь M обозначен оператор усреднения по времени.

Теоретически формировать случайный процесс с заданными характеристиками проще всего, подавая единичный белый шум на линейную динамическую систему, имеющую требуемую частотную передаточную функцию. Спектральная плотность такого шума имеет вид: $S_x(\omega)=1$. А спектральная плотность процесса на выходе системы, как известно, определяется формулой $S_y(\omega)=S_x(\omega)\cdot\left|F(j\omega)\right|^2=S_x(\omega)\cdot F(j\omega)\cdot F(-j\omega)$, где $F(j\omega)$ — частотная передаточная функция системы, т.е. в случае белого шума она полностью определяется передаточной функцией системы. По виду спектральной плотности с помощью таблиц соответствия можно определить корреляционную функцию процесса и его числовые характеристики. Однако белый шум является лишь удобной математической абстракцией. Реализовать его на практике невозможно. При моделировании случайных процессов в качестве исходного процесса, используемого для формирования случайных процессов с требуемыми характеристиками, используют случайный ступенчатый процесс. Такой процесс формируется путем обращения в цикле к генератору случайных чисел и присваивания полученного значения состоянию процесса. В большинстве языков программирования имеется процедура, выдающая равномерно распределенные значения вещественных чисел в заданном диапазоне, и процедура, формирующая значения, распределенные по нормальному закону с заданным математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением. Например, в Delphi эти процедуры имеют имена Random и RandomG. Эти процедуры были введены в редактор правил среды EnviCon, что позволило в этой среде реализовывать случайные ступенчатые процессы с равномерным и нормальным законами распределения вероятностей. Среда EnviCon была использована для экспериментальных исследований методов реализации и оценки случайных процессов. Редактор правил этой среды имеет достаточно наглядный интерфейс, поэтому рассматриваемые ниже спецификации процессов будут представлены в формате интерфейса этой среды.

Для оценки математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции необходима операция осреднения последовательности числовых значений по времени. Одним из очевидных методов получения средних значений является реализация алгоритма вычисления скользящего среднего. Этот алгоритм основан на использовании механизма организации очереди. Задается временной интервал осреднения Int, создается связный список вещественных переменных. Длина списка должна быть не менее Int/dt, где dt — длительность цикла обновления состояний. Список замкнут, его конец связан с его началом. Пока список не заполнен на каждом шаге цикла, новое состояние процесса x_n помещается в очередной элемент списка. При этом оценка среднего значения вычисляется по формуле $\hat{X} := \hat{X} \cdot \frac{n}{n+1} + \frac{x_n}{n+1}$, где n — текущее значение счетчика состояний. После заполнения списка очередное новое состояние x_n помещается в конец списка, а из его начала удаляется самое старое состояние x_o, при этом обновляется текущее значение оценки $\hat{X} := \hat{X} + \frac{x_n - x_o}{n}$. Процедура, реализующая этот алгоритм, введена в редактор правил среды EnviCon под именем *Скольз. среднее*.

На практике в качестве оператора усреднения по времени может быть использовано апериодическое звено. Это звено имеет передаточную функцию $W = \frac{1}{1+Tp}$ и является фильтром нижних частот. При подаче случайного процесса на вход этого звена на выходе после затухания переходного процесса будет также случайный процесс. Этот процесс будет иметь то же математическое ожидание, что и входной процесс, и существенно меньшую дисперсию. Величина дисперсии тем меньше чем выше спектр входного сигнала и чем больше значение постоянной времени T. Через интервал времени равный $3 \cdot T$ математическое ожидание будет отличаться от установившегося значения не более чем на 5%.

На рис. 1 приведен пример ступенчатого случайного процесса с равномерным распределением в диапазоне 0-200 и длительностью ступеньки 0,001 с. На рис. 2 представлен ступенчатый случайный процесс, имеющий нормальное распределение, математическое ожидание равное 100, среднеквадратическое отклонение равное 20 и длительность ступеньки 0,001с. На этом же рисунке приведены графики процессов определения математического ожидания с помощью апериодического звена (нижняя кривая) и с помощью процедуры вычисления скользящего среднего (верхняя кривая).

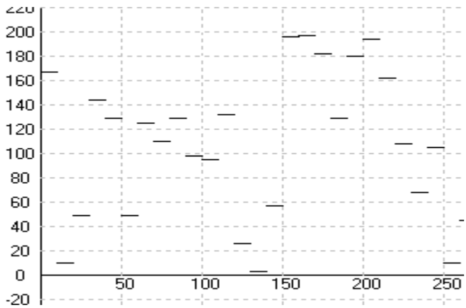

Рис. 1. Ступенчатый случайный процесс.

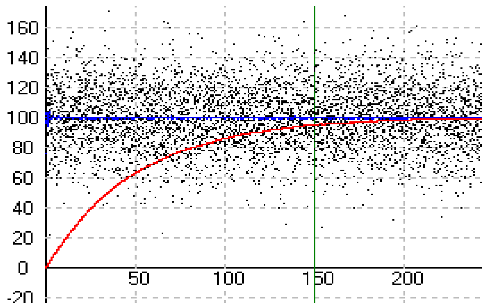

Рис. 2. Оценка математического ожидания.

На рис. 3 приведена часть редактора правил (2) среды EnviCon, содержащая правила для оценки математического ожидания. Первое правило осуществляет реализацию случайного ступенчатого процесса с равномерным распределением вероятностей (рис. 1). Состояние этого процесса представляется вещественной переменной с идентификатором *СлучРавномер*. Длительность ступеньки τ_c в режиме реального времени определяется длительностью цикла обновления состояний (обработки правил), а в режиме модельного времени задается пользователем. Эта длительность может быть увеличена кратно уменьшению приоритета правила, т.к. в этом случае правило обрабатывается не на каждом обороте цикла.

№	Переменная	Процедура	Коэффициент	Аргумент 1	Аргумент 2	Ситуация	имя параметра	значение
1	Ступенч.Равномер.	Равномерное, 0-1	100.00			EverTrue		
2	Ступенч.Нормальн.	Нормальное	1.00			EverTrue	Мат. ожидание	100.00
3	Мат. ожидание	Скольз. среднее	1.00	Ступенч.Нормальн.		EverTrue	Интервал	1.00
4	Мат. ожидание 2	Апериодическая	1.00	Ступенч.Нормальн.		EverTrue	Пост. времени	1.0

Рис. 3. Правила для оценки математического ожидания.

Второе правило реализует ступенчатый случайный процесс с нормальным распределением, математическим ожиданием равным 100 и среднеквадратическим отклонением 20. Длительность ступеньки $\tau_c = 0,001\, c$. 3-е правило осуществляет оценку математического ожидания по алгоритму скользящего среднего с интервалом 1 секунда, т.е. оценка производится по 1000 значений. 4-ое правило производит оценку математического ожидания с помощью апериодического звена с постоянной времени $T = 1$ с . Во всех правилах в качестве ситуации использована логическая константа *EverTrue= True*. Как видно из рисунка, оценки практически совпадают и близки к заданному значению 100. Однако при использовании скользящего среднего оценка производится быстрее.

Корреляционная функция стационарного процесса $R_x(t_1, t_2)$ зависит только от разности аргументов $\tau = t_1 - t_2$. Оценку значений $R_x(\tau)$ для эргодического процесса можно получить путем усреднения по времени соответствующих произведений состояний процесса. Корреляционная функция является четной симметричной функцией, т.е. $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$. Поэтому для ее оценки можно использовать состояние процесса, задержанного относительно текущего состояния. Задержку процесса удобно производить с помощью звена чистого запаздывания. На вход такого звена поступает текущее состояние, а с выхода снимается состояние, задержанное на τ. В основе алгоритма реализации звена чистого запаздывания лежит алгоритм реализации очереди, использующий связный список.

Произведем оценку с помощью правил корреляционной функции ступенчатого случайного процесса с равномерным законом распределения. Теоретически корреляционная функция ступенчатого процесса с некоррелированными состояниями имеет вид треугольника и определяется формулой $R_x(\tau) = D \cdot (1 - \frac{|\tau|}{\tau_c})$ при $|\tau| < \tau_c$ и $R_x(\tau) = 0$ при

$|\tau| > \tau_c$, где D — дисперсия, τ_c — длительность ступеньки [6]. На рис. 3 представлена часть экрана редактора правил среды EnviCon, содержащая правила для реализации процесса и оценки 2-х значений его корреляционной функции. Длительность ступеньки процесса $\tau_c = 0{,}001\ c$. Она определяется заданием интервала продвижения модельного времени и приоритетом правила, обращающегося к генератору случайных чисел. Первое правило формирует значения состояний процесса, равномерно распределенных в диапазоне 0 – 100. Второе правило центрирует процесс. 3-е и 4-ое правила формируют оценку дисперсии процесса: 3-е вычисляет произведение состояний, а 4-ое производит его усреднение. Следующие три правила формируют оценку корреляционной функции для значения $\tau = 0{,}0002\ c$. 5-ое правило формирует запаздывающий процесс, 6-ое — произведение текущего состояния и состояния запаздывающего процесса. 7-ое правило осуществляет усреднение по времени произведения состояний. Оценка второго значения корреляционной функции производится аналогичным образом следующими тремя правилами. Особенность состоит только в том, что для формирования задержанного состояния используется не исходный процесс, а процесс, уже задержанный правилом 5. Остальные значения оценок корреляционной функции формируются аналогичным образом.

№	Переменная	Процедура	Коэффициент	Аргумент 1	Аргумент 2	Ситуация	имя параметра	значение
1	Ступенч. процесс	Равномерное, 0-1	100.00			EverTrue		
2	Процесс центрир.	Сумма	1.0981	Ступенч. процесс	50 const	EverTrue	2-ой коэффициент	-1.0
3	Процусс * Процесс	Умножение	1.00	Процесс центрир.	Процесс центрир.	EverTrue		
4	Дисперсия	Апериодическая	1.00	Процусс * Процесс		EverTrue	Пост. времени	200.00
5	сдвиг на 0,0002	Запаздывание	1.00	Процесс центрир.		EverTrue	Запаздывание	0.0002
6	Проц*сдвиг0,0002	Умножение	1.00	Процесс центрир.	сдвиг на 0,0002	EverTrue		
7	R(0,0002)	Апериодическая	1.00	Проц*сдвиг0,0002		Усреднение	Пост. времени	200.00
8	сдвиг на 0,0004	Запаздывание	1.00	сдвиг на 0,0002		EverTrue	Запаздывание	0.0002
9	Проц*сдвиг0,0004	Умножение	1.00	Процесс центрир.	сдвиг на 0,0004	EverTrue		
10	R(0,0004)	Апериодическая	1.00	Проц*сдвиг0,0004		Усреднение	Пост. времени	200.00

Рис. 4. Оценка корреляционной функции ступенчатого процесса.

В правилах 7 и 10 , производящих усреднение, в качестве ситуации использована логическая переменная *Усреднение*. Эта переменная имеет исходное значение *False* и принимает значение *True* через некоторое время после начала реализации процесса. Это сделано для того, чтобы не производить усреднение до тех пор, пока не появится запаздывающий процесс. В таблице 1 приведены значения корреляционной функции случайного ступенчатого процесса, найденные путем моделирования с помощью представленных правил.

Таблица 1. **Значения корреляционной функции ступенчатого процесса**

τ сек	0,0	0,0002	0,0004	0,0006	0,0008	0,0010	0,0012
$R(\tau)$	1002	812	611	410	209	9	-0,75

Значение корреляционной функции при $\tau = 0$ является значением дисперсии. Приведенные в таблице значения расположены очень близко к прямой, соединяющей значение дисперсии на оси ординат и точку на оси абсцисс, имеющую значение $\tau_c = 0{,}001\ c$. Это значит, что найденная экспериментально корреляционная функция близко совпадает с треугольной формой этой функции, определенной теоретически. При уменьшении длительности ступеньки происходит уменьшение основания треугольника, и корреляционная функция ступенчатого процесса приближается к δ - функции, являющейся корреляционной функцией белого шума.

Спектральная плотность ступенчатого случайного процесса с равномерным законом распределения состояний для низких частот может быть представлена формулой $S(\omega) = D \cdot \tau_c$ [6]. Ступенчатый процесс с дисперсией $D = 1/\tau_c$ может использоваться для области низких частот как эквивалент единичного белого шума. Область низких частот тем шире, чем меньше длительность ступеньки. При подаче на вход динамической системы единичного белого шума на выходе будем иметь случайный процесс, характеристики которого полностью определяются динамикой системы. Так спектральная плотность выходного сигнала будет равна квадрату модуля частотной передаточной функции системы, т.е. $S_{вых} = \left|W(j\omega)\right|^2 = \dfrac{\left|B(j\omega)\right|^2}{\left|A(j\omega)\right|^2} = \dfrac{G((j\omega)}{A(j\omega) \cdot A(-j\omega)}$, где $A(j\omega)$, $B(j\omega)$ и $G(j\omega)$ представляют собой некоторые полиномы от комплексной переменной [7]. Корреляционная функция выходного сигнала определяется с помощью обратного преобразованья Фурье от спектральной плотности. Существуют таблицы двустороннего преобразования Фурье основных четных функций, позволяющие устанавливать соответствие между спектральными плотностями процессов и их корреляционными функциями. Для нахождения дисперсии процесса необходимо проинтегрировать спектральную плотность по всем частотам. Интегралы от спектральных плотностей приведенного выше вида вычислены для полиномов до 7 степени и сведены в таблицы [7]. Они позволяют определять дисперсию процесса по коэффициентам полиномов, представляющих спектральную плотность. Так при подаче единичного белого шума на вход системы с передаточной функцией $W(p)=\dfrac{1}{1+p}$ на выходе будем иметь случайный процесс со спектральной плотностью $S(\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}$. Оба полинома этого выражения имеют коэффициенты равные 1. По таблице интегралов находим, что дисперсия этого процесса должна быть равна 0,5. Для тестирования рассматриваемого метода было проведено моделирование такой системы. На апериодическое звено с постоянной времени $T=1\ c$ подавался случайный ступенчатый сигнал с $\tau_c\ 0,001$ и $D=1000$, определялась дисперсия выходного сигнала с помощью правил, аналогичных правилам 1-4, приведенным на рис. 4. Было проведено более 20 экспериментов. Разброс значений дисперсии находился в диапазоне 0,5050 – 0,5152, т.е. отклонение от теоретического значения не превышало 3%.

Среди реальных случайных процессов часто встречаются процессы, имеющие равномерный спектр в некоторой ограниченной полосе частот ω_n, затухающий за ее пределами. Такие процессы имеют корреляционную функцию экспоненциального вида:

$$R(\tau)=D\cdot e^{-\alpha\cdot|\tau|}. \qquad (4)$$

Эти процессы можно реализовать, подавая случайный ступенчатый процесс, эквивалентный белому шуму, на апериодическое звено с постоянной времени $T=1/\alpha$. При этом ширина полосы частот процесса на выходе будет определяться $\omega_n=1/T$. С целью оценки применимости указанного метода было проведено моделирование прохождения ступенчатого случайного процесса с длительностью ступеньки $\tau_c=0,001$ через апериодическое звено с $T=0,2\,c$. На рис. 5 приведены трансформационные правила, специфицирующие эту модель. Первое правило формирует ступенчатый процесс, второе — центрирует этот процесс. Третье правило формирует случайный процесс на выходе апериодического звена. Четвертое правило вычисляет произведение состояний процесса, а пятое производит усреднение этого произведения, т.е. вычисляет дисперсию процесса или значение корреляционной функции при $\tau = 0,0$. Следующие три правила вычисляют значение корреляционной функции при $\tau = 0,03$. Для вычисления остальных значений используются аналогичные тройки правил.

№	Переменная	Процедура	Коэффициент	Аргумент 1	Аргумент 2	Ситуация	имя параметра	значение
1	Ступ. процесс	Равномерное, 0-1	100.00	50 const		EverTrue		
2	Ступ. Проц. Центр	Сумма	10.09	Ступ. процесс	50 const	EverTrue	2-ой коэффициент	-1.00
3	Процесс	Апериодическая	1.0	Ступ. Проц. Центр		EverTrue	Пост. времени	0.2
4	Проц* Проц	Умножение	1.00	Процесс	Процесс	EverTrue		
5	Дисперся проц.	Апериодическая	1.00	Проц* Проц		EverTrue	Пост. времени	550.00
6	сдвиг на тау 1	Запаздывание	1.00	Процесс		EverTrue	Запаздывание	0.03
7	Проц * сдвиг 1	Умножение	1.00	Процесс	сдвиг на тау 1	EverTrue		
8	Корреляция 1	Апериодическая	1.00	Проц * сдвиг 1		Усреднение	Пост. времени	550.00
9	сдвиг на тау 2	Запаздывание	1.00	сдвиг на тау 1		EverTrue	Запаздывание	0.03
10	Проц * сдвиг 2	Умножение	1.00	Процесс	сдвиг на тау 2	EverTrue		
11	Корреляция 2	Апериодическая	1.00	Проц * сдвиг 2		Усреднение	Пост. времени	550.00

Рис. 5. Оценка корреляционной функции процесса на выходе апериодического звена.

На рис. 6 приведена модельная реализация случайного процесса на выходе апериодического звена, на вход которого подан ступенчатый случайный сигнал с равномерным распределением вероятности состояния. В таблице 2 приведены значения корреляционной функции этого процесса, полученные путем моделирования и вычисленные по формуле (4).

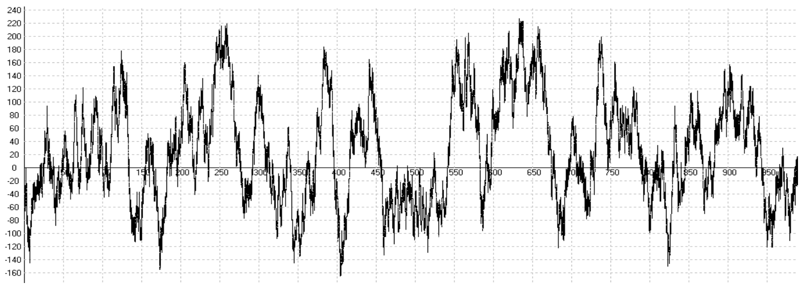

Рис. 6. График процесса на выходе апериодического звена.

Таблица 2. **Значения экспоненциальной корреляционной функции**

τ (сек)	**0,00**	**0,03**	**0,06**	**0,09**	**0,21**	**0,15**	**0,18**	**0,21**
модель	211,6	182,7	157,6	135,8	117,0	100,8	86,7	74,8
формула	211,6	182,2	156,8	135,0	116,2	99,9	86,1	74,3
τ (сек)	**0,24**	**0,27**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	**0,55**
модель	64,4	55,8	48,6	39,0	31,1	24,8	19,7	16,0
формула	63,9	55,0	47,2	37,0	28,6	22,4	17,4	13,5

Сравнение приведенных в таблице 2 модельных и расчетных значений корреляционной функции позволяет сделать вывод о том, что полученная оценка является репрезентативной.

В рассмотренном примере апериодическое звено выполняло функцию фильтра, формирующего случайный процесс с заданной корреляционной функцией. Используя соответствующие формирующие фильтры, можно реализовать случайные процессы с требуемыми характеристиками. Чаще всего используются фильтры, имеющие дробно-рациональные передаточные функции. Такие фильтры очень легко реализуются с помощью рассматриваемого подхода. Покажем это на примере моделирования нерегулярной качки. Для реализации качки часто используют фильтр с передаточной функцией [6]:

$$F(p) = \frac{K_\omega \cdot p}{p^2 + 2\lambda\omega_0 p + \omega_0^2},$$

где K_ω — коэффициент, определяющий интенсивность волнения, ω_0 — доминирующая частота волн, λ — коэффициент затухания. Из приведенной формулы нетрудно видеть, что фильтр представляет собой последовательное соединение колебательного и дифференцирующего звеньев. Колебательное звено может быть реализовано с помощью двух интеграторов, охваченных основной обратной связью и обратной связью по скорости. На рис. 7 приведена структурная схема формирующего фильтра нерегулярной качки.

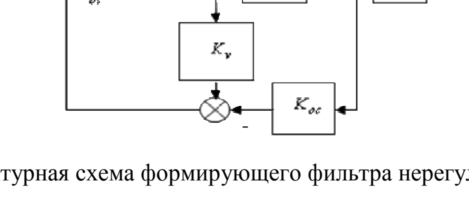

Рис. 7. Структурная схема формирующего фильтра нерегулярной качки.

Чтобы найти передаточную функцию системы, приведенной на рис. 7, необходимо дважды последовательно применить формулу для замыкания системы. Вначале — для контура обратной связи по скорости, затем для основного контура. В результате в приведенных на схеме обозначениях будем иметь

$$F(p) = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot p}{p^2 + K_1 \cdot K_v \cdot p + K_1 \cdot K_2 \cdot K_{oc}}.$$

Сравнивая полученную формулу с (3), находим $K_\omega = K_1 \cdot K_2$, $\omega_0 = \sqrt{K_1 \cdot K_2 \cdot K_{oc}}$, $\lambda = \dfrac{K_1 \cdot K_v}{2 \cdot \sqrt{K_1 \cdot K_2 \cdot K_{oc}}}$. Моделирование качки было проведено для значений $K_1 = K_2 = K_{oc} = 1$ и $K_v = 0{,}1$. Правила, специфицирующие рассматриваемый процесс, приведены на рис. 8. Первые два правила моделируют ступенчатый случайный процесс, эквивалентный белому шуму, следующие пять правил моделируют два сумматора, два интегратора и дифференциатор в соответствии с приведенной схемой. На рис, 9 представлен график полученного процесса нерегулярной качки. Из графика видно наличие в процессе доминирующего колебания. Измерение периода этого колебания показало, что его круговая частота близка к теоретическому значению $\omega_0 = 1$.

№	Переменная	Процедура	Коэффициент	Аргумент 1	Аргумент 2	Ситуация	имя параметра	значение
1	Экв. белый шум	Равномерное, 0-1	100.00			EverTrue		
2	шум центрир.	Сумма	1.0983	Экв. белый шум	1 const	EverTrue	2-ой коэффициент	-50.0
3	U Обр. связь	Сумма	-1.00	X отклонение	Vx скорость	EverTrue	2-ой коэффициент	0.5
4	Ax ускорение	Сумма	1.00	U Обр. связь	шум центрир.	EverTrue	2-ой коэффициент	1.00
5	Vx скорость	Интеграл	1.00	Ax ускорение		EverTrue		
6	X отклонение	Интеграл	1.00	Vx скорость		EverTrue		
7	Y вых. процесс	Производная	1.00	X отклонение		EverTrue		

Рис. 8. Правила для моделирования нерегулярной качки.

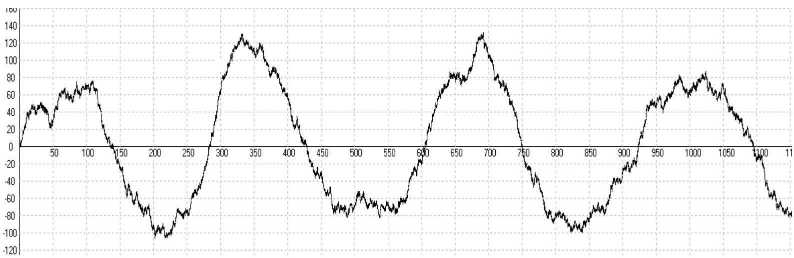

Рис. 9 График процесса нерегулярной качки.

3. Заключение. Проведенное рассмотрение и приведенные результаты экспериментальных исследований позволяют сделать вывод о том, что основанный на правилах транзитивный подход может эффективно быть использован для спецификации и реализации случайных процессов, а также для оценки их характеристик. Применение алгоритма скользящего среднего и апериодического звена для оценки математического ожидания и корреляционной функции позволяют обеспечить требуемую точность при условии соответствующего выбора их параметров. Также достаточно эффективным можно признать использование звена чистого запаздывания для определения значений корреляционной функции.

Введение правил для оценки случайных процессов позволяет заметно расширить возможности формализации знаний экспертов при спецификации процессов управления. Наличие оценок статистических характеристик процессов позволяет находить оценки вероятности истинности (ложности) предикатов от состояний этих процессов. А это, в свою очередь, позволяет вычислять вероятности возникновения определенных ситуаций. Понятно, что существует потребность принимать необходимые решения и действия не только при возникновении, например, аварийной ситуации, но и при определенной вероятности ее возникновения.

Литература

1. *Шпаков В.М.* Исполняемые спецификации транзитивных моделей технологических процессов // Мехатроника, автоматизация, управление. № 3. 2004. С. 38–45.
2. *Henzinger T.A.* The Theory of Hybrid Automata. // Proceedings of the 11th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 96). 1996. 278–292 p.
3. *Alur R., Henzinger T.A., Lafferriere G., Pappas G. J.* Discrete Abstractions of Hybrid Systems // Proceedings of the IEEE. No. 88. 2000. 971–984 pp.
4. *Шпаков В.М.* Спецификация знаний динамики на основе транзитивной модели непрерывных процессов // Труды СПИИРАН. Вып. 3, т. 1. СПб.: Наука, 2006. С. 191–197.
5. *Шпаков В.М.* Прототип среды моделирования структурированных совокупностей взаимодействующих процессов // Сборник докладов конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика», Санкт-Петербург, 19 – 21 октября 2005.-Т.II, с. 292–295.
6. *Поляков К.Ю.* Теория автоматического управления для чайников Часть II. Управление при случайных возмущениях. Санкт-Петербург, 2009.. URL: http://www.infoterra.ru/oty/books/files/tau-2_dlya_chainikov.pdf. 59 с
7. *Бессекерский В.А, Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования, «Наука», 1966. 992 с.

Шпаков Владимир Михайлович — к.т.н., доц.; старший научный сотрудник лаборатории интегрированных систем автоматизации СПИИРАН. Область научных интересов: автоматическое управление, искусственный интеллект, логическое программирование, экспертные системы, поддержка принятия решений. Число научных публикаций — 58. vlad@iias.spb.su; ЛИСА СПИИРАН, 14-я линия В.О, д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-8071, факс +7(812)328-4450.

Shpakov Vladimir Michajlovich — Ph.D., Assoc. Prof.; senior researcher, laboratory of integrated systems for automation, SPIIRAS. Research interests: automatic control, artificial intelligence, logic programming, expert systems, decision making support. The number of publications: — 58. vlad@iias.spb.su; SPIIRAS, 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-8071, fax +7(812)328-4450.

Поддержка исследований. В публикации представлены результаты исследований, поддержанные грантом РФФИ 12-01-00015-а, рук. В.М. Шпаков.

Рекомендовано лабораторией интегрированных систем автоматизации, заведующий лабораторией Смирнов А.В., д.т.н., проф.
Статья поступила в редакцию 07.06.2013.

РЕФЕРАТ

Шпаков В.М. **Транзитивный подход к реализации и оценке случайных процессов.**

Статья посвящена рассмотрению возможностей использования основанного на транзитивной модели формализма спецификации гибридных процессов для разработки методов реализации случайных процессов и методов оценки числовых характеристик, корреляционных функций и спектральных плотностей этих процессов. Отмечается актуальность имитационного моделирования динамических систем, находящихся под воздействием случайных процессов.

Транзитивный формализм спецификации процессов основан на использовании правил трансформации состояний процессов. Он является языком, ориентированным на эффективную реализацию процессов, и в этом отношении является языком более высокого уровня, чем универсальные алгоритмические языки программирования. Одним из достоинств спецификации процессов с помощью правил является простота и удобство модификации получаемых спецификаций. В статье приводится краткое описание указанного формализма спецификации процессов. В его основе находится математическая модель гибридного автомата, функции перехода которого задаются с помощью продукционных правил, определяющих транзитивное отношение между текущими и следующими состояниями дискретно-событийных и непрерывных процессов.

За счет использования в исполнительных частях правил процедур обращения к генераторам случайных чисел обеспечена возможность формирования ступенчатых случайных процессов с равномерным и нормальным распределениями вероятностей состояний. Показана возможность использования ступенчатого случайного процесса в качестве эквивалента белого шума для формирования с помощью фильтров случайных процессов с заданными статистическими характеристиками.

Фильтры, формирующие случайные процессы, чаще всего представляются в виде дробно-рациональных функций комплексной переменной. Такие функции достаточно просто реализуются с помощью трансформационных правил, специфицирующих элементарные динамические процессы. В статье на примере моделирования нерегулярной качки показана эффективность спецификации формирующих фильтров и реализации на их основе случайных процессов с заданными характеристиками.

Введение правил для оценки случайных процессов позволяет заметно расширить возможности формализации знаний экспертов при спецификации процессов управления. Наличие оценок статистических характеристик процессов позволяет находить оценки вероятности истинности (ложности) предикатов от состояний этих процессов. Это позволяет вычислять вероятности возникновения определенных ситуаций. Понятно, что существует потребность принимать необходимые решения и действия не только при возникновении некоторой ситуации, но и при определенной вероятности ее возникновения.

SUMMARY

Shpakov V.M. **Transitive approach to random processes implementation and estimation.**

The paper is devoted to consideration of methods for random processes implementation and estimation of their numerical characteristics, correlation functions and spectral distributions. Ability of use of formalism based on transitive process model for the methods development is investigated and analyzed. An urgency of simulation of dynamic systems which are influenced with random processes is noted.

The processes specification transitive formalism is based on use of the processes states transformation rules. It is a language which is oriented on effective realization of processes and in this regard it is a language of more level than universal algorithmic programming languages. One of advantages of processes specification with help of rules is ease and convenience of the produced specification modification and expansion. There is a short description of the indicated formalism of processes specification in the paper. In its base there is a hybrid automaton mathematic model which transformation functions are assigned with help of production rules determining transition relations between current and next states of the discrete-event and continuous processes.

At the expense of use in rule executable parts of procedures which access to random numbers generators an ability of random stepwise processes composing is provided. The processes may be with even or normal distributions of state probabilities. It is shown possibility of using the random stepwise processes as white noise counterpart for implementation with help of shaping filters of random processes with assigned statistical characteristics.

Most often the filters shaping random processes are presented as fractional rational functions of complex variable. Such functions rather simply and efficiently may be implemented with the help of transformation rules specifying elementary dynamical processes. By the example of irregular heaving simulation effectiveness of shaping filters specification and in terms of them random processes with assigned characteristics realization is shown in the paper.

Insertion of rules for random processes estimation enables distinctly to amplify capability of expert knowledge formalization when control processes specifying. The process statistical characteristics estimation availability enables to calculate probability truth (false) estimations of predicates of these process states. This enables to calculate probability of some situation origination. It is clear that there are requirements to take a decision or some actions not only at some situation origination but also at some probability of the situation origination.