УДК 681.3

А.Е. КОЧУРА, Л.В. ПОДКОЛЬЗИНА, Я.А. ИВАКИН, И.И. НИДЗИЕВ

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕГО РАЗРЕЖЕННОСТЬ МАТРИЦЫ

Кочура А.Е., Подкользина Л.В., Ивакин Я.А., Нидзиев И.И. **Разработка алгоритма решения систем линейных уравнений с варьируемыми параметрами, использующего разреженность матрицы.**

Аннотация. В статье проанализированы достоинства и недостатки прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности (БР). Предложен новый «прямой» метод (алгоритм) решения СЛАУ с варьируемыми параметрами для матриц БР на основе учета их разреженности и информации о решении базовой СЛАУ. Это позволяет существенно повысить быстродействие расчетных алгоритмов за счет уменьшения количества вычислительных операций; снизить требования к объемам оперативной памяти ЭВМ.

***Ключевые слова*:** системы линейных алгебраических уравнений, большая размерность, многовариантные расчеты, декомпозиция, технологии разреженных матриц, схема вариаций, диакоптика, уравнение Крона.

Kochura A.E., Podkolzina L.V., Ivakin Y.A., Nidziev I.I. **Development of algorithm of the decision of systems linear equations with the varied parameters, using the matrix sparseness.**

Abstract. Merits and demerits of straight and iterative methods for BD LAES are shown. In article is offered the new «direct» method (algorithm) for solution of BD LES with varied parameters. It effectively uses basic solution LAES and matrix sparseness information and allows in the tasks using BD LAES, which need to be solved repeatedly, significantly increase speed of settlement algorithms due to reduction of number of computing operations, to lower requirements for random access memory volumes of computers.

Keywords: systems of the linear equations, big dimension, multiple calculations, decomposition, technologies of the rarefied matrixes, the scheme of variations, diakoptics, the equation Krone.

1. Введение. В основе большого числа важных научно-прикладных и производственно-технических задач лежит решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Особый класс СЛАУ - системы с большими разреженными матрицами (БРМ). Математические модели, использующие СЛАУ с БРМ, применяются при изучении статического равновесия физических, технических, биологических, производственно-экономических [9] и других типах систем; при решении с помощью конечно-разностных методов или методов конечных элементов многочисленных задач из области математической физики, строительной механики, механики конструкций летательных и иных аппаратов; прогнозирования метеорологических и гидрогеологических [2] процессов; обеспечения работы графических процессоров [16] и пр. Актуальность проблематики решения СЛАУ с БРМ подчеркивается публикацией большого количества работ – как учебного характера [1], так и научного. Для последней группы стоит отметить как классические работы [4, 10], так и ряд современных [5, 6, 12]. В некоторых случаях для решения указанных задач необходимы многовариантные расчеты, в которых различаются лишь небольшое количество элементов матрицы СЛАУ. Целью данной статьи была разработка специальных алгоритмов для решения СЛАУ с БРМ именно такого класса задач.

Двумя основными группами методов решения СЛАУ являются «прямые» и «итерационные». Несмотря на то, что итерационные методы позволяют во многих случаях эффективно решать СЛАУ с БРМ с минимальным использованием оперативной памяти [17], на практике их применение все же остается достаточно ограниченным. Основные причины такого положения: сложности при выборе начального приближения «вектора решения»; медленная сходимость (а для некоторых вариантов прямых методов и отсутствие гарантированной сходимости) к решению; в общем случае - сложность определения целесообразного момента завершения итераций при немонотонной сходимости и пр. Поэтому в данной статье рассматриваются только прямые методы.

Такие методы для СЛАУ небольшой размерности уже давно хорошо разработаны [11] и реализованы в виде высококачественного программного обеспечения для современных ПЭВМ в виде автономных программ и пакетов прикладных программ. Для СЛАУ с БРМ существуют специальные коллекции матриц [19]; алгоритмы [21] и библиотеки программ [13, 20], в т.ч. позволяющие учесть характер расположения ненулевых коэффициентов в матрицах. Особо отметим алгоритмы, позволяющие эффективно организовать вычисления с различными правыми частями СЛАУ; алгоритмы для ленточных матриц [4, 10] и пр. Однако в большинстве типичных алгоритмов при изменении небольшого количества коэффициентов матрицы в СЛАУ с БРМ все вычисления приходится выполнять с самого начала. При этом для сокращения времени получения результатов может быть использование распараллеливание вычислений [3, 14, 18], в т.ч. и с применением «вычислительных кластеров».

Однако даже при использовании высокоскоростных вычислительных систем [6] многовариантные расчеты с варьируемыми параметрами матриц СЛАУ могут требовать слишком больших вычислительных затрат. Это особенно актуально для моделирования и, возможно, управления процессами, протекающими в реальном времени.

Например, для задач прогнозирования погоды в метеорологии и большого числа задач, связанных с оперативной обработкой информации. Также это актуально для больших задач вариантного планирования в производственно-экономической сфере, включая транспортные задачи большой размерности, распределения ресурсов и пр.

Все возможные случаи многовариантных расчетов СЛАУ допускают обобщенную формализацию в виде проблемы параметрического синтеза линейной модели в ограниченном пространстве варьируемых параметров. В рамках такой схематизации могут учитываться и возможные структурные вариации исследуемой системы.

Для значительной части практически важных случаев многовариантных расчетов, в которых используются СЛАУ с БРМ, количество варьируемых элементов матрицы СЛАУ значительно меньше размерности СЛАУ, т.е. на каждом шаге вариантного анализа системы осуществляется ее локальная параметрическая модификация. Для расчетов таких систем целесообразным, по критериям экономичности вычислительных схем, представляется использование таких алгоритмов, в которых максимально эффективно использовалось бы решение для базовой модели, соответствующей исходной СЛАУ с БРМ. В качестве такой модели может выступать некоторая начальная параметрически определенная модель исследуемой системы или ее модель на предыдущем шаге многовариантного вычислительного процесса.

2. Существующие подходы к решению параметрически возмущенных линейных систем. Расчетная модель параметрически возмущенной линейной системы, связанной с рассматриваемой моделью задачи, имеет вид:

$$\left(A_0 + \widetilde{A}\right)X = B\,, \qquad (1)$$

где A_0 – основная матрица; $\widetilde{A}$ - матрица вариаций коэффициентов базовой системы; X – вектор неизвестных; B – вектор свободных членов базовой (исходной) СЛАУ.

Примем, что матрица $\widetilde{A}$ имеет сильно разреженную структуру. Если использовать стандартные методы решения СЛАУ, то при различных ее «разложениях» разреженная структура матрицы «разрушается» и она становится в общем случае полностью заполненной ненулевыми коэффициентами:

$$\left(I + A_0^{-1}\,\widetilde{A}\right)X = X_0\,. \qquad (2)$$

Здесь $X_о$ – решение базовой СЛАУ; I – единичная матрица. Решение системы (2) даже менее экономично, чем новый расчет исходной СЛАУ с основной матрицей в виде $A_0+\widetilde{A}$, поскольку сопровождается дополнительной потерей вычислительного времени за счет операций вычисления $A_0^{-1}\,\widetilde{A}$.

Известные методы для СЛАУ с «ленточными» разреженными матрицами имеют достаточно ограниченную сферу применения, т.к. далеко не для всех задач матрицы имеют ленточную структуру. Кроме того, если ширина «ленты» по отношению к размерности матрицы достаточно велика, то преимущества «ленточных алгоритмов» по отношению к алгоритмам для «полных» матриц утрачиваются [11].

Известный путь рационального использования разреженного характера матрицы вариаций $\widetilde{A}$ связан с применением «преобразования Крона», модифицированного для СЛАУ общего (несимметричного) вида [7, 8]. Соответствующий алгоритм в общем случае требует описания схемы вариаций модифицируемой СЛАУ на основе двух неполяризованных матриц инциденций: матрицы S_1 на множестве заходящих ветвей схемы вариаций и матрицы S_2 на множестве исходящих ветвей этой схемы. Используемая терминология вытекает из сопоставления модели вида (1) и ассоциированного с ней глобального орграфа с кодом $\{n, m, P\}$. Здесь n – количество узлов орграфа; m – количество ветвей орграфа, P – m - компонентный вектор весовых коэффициентов ветвей.

Узлы орграфа отображают структурные переменные модели, а ветви – взаимосвязи этих переменных. Лексикографически упорядоченная нумерация узлов и ветвей глобального орграфа обусловливает взаимно однозначное соответствие между компонентами вектора P и множеством значений ненулевых элементов основной матрицы СЛАУ, используемой в модели. Для подграфа схемы вариаций компонентами кода $\{n, m, P\}$ будут служить: n – общее число узлов глобального орграфа; m - число варьируемых коэффициентов основной матрицы; P - вектор их вариаций.

С помощью матриц инциденций вариацию основной матрицы для модели по (1) можно определить формулой

$$\widetilde{A} = S_1\, D\, S_2^T\,, \tag{3}$$

где $D = diag(P)$.

Если ввести дополнительный m – компонентный вектор v:

$$v = D\, S_2^T\, X, \tag{4}$$

то уравнение (1) можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A_0\, X + S_1\, v = B\,; \\ v = D\, S_2^T\, X\,. \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Решение системы (5) получим в виде:

$$X = \left(I_n - A_0^{-1}\, S_1\, M_v^{-1}\, D\, S_2^T\right) X_0\,, \qquad (6)$$

где $M_v = I_m + D\, S_2^T\, A_0^{-1}\, S_1$; I_m – единичная матрица порядка m.

Выражение (6) представляет собой диакоптику Крона, модифицированную для системы уравнений общего вида. При отыскании решения $n-$ мерной варьируемой модели (1) по формуле (6) порядок обращаемой матрицы M_v равен числу m варьируемых коэффициентов, которое во многих задачах существенно меньше порядка (размерности) n СЛАУ для базовой модели. При этом в вычислительной схеме участвует не полная обратная матрица A_0^{-1} базовой модели, а только часть ее столбцов, соответствующих ненулевым строкам матрицы S_1. Их число равно количеству структурных переменных схемы вариаций. Матричный множитель $A_0^{-1}\, S_1$ может быть построен на основе матрицы S_1, в которой каждый $j-$ый столбец с «1» в позиции (i, j) заменяется $i-$ ым столбцом матрицы A_0^{-1}.

Практическая реализация алгоритма (6) построения решения СЛАУ для моделей с варьируемыми коэффициентами СЛАУ осуществляется в виде совокупности следующих матричных процедур (операций):

$$\left.\begin{aligned} M_v\, Z = D\, S_2^T\, X_0\,; \\ X^* = A_0^{-1}\, S_1\, Z\,; \\ X = X_0 - X^* \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Таким образом, решение в виде вектора X для «варьируемой» модели, описываемой уравнением вида (1) определяется как коррекция решения X_0 базовой СЛАУ. Для определения корректирующего вектора X^* необходимо решить СЛАУ с основной матрицей M_v порядка m. Из выражения (6) также следует, что обратная матрица $\left(A_0 + \widetilde{A}\right)^{-1}$ модифицированной СЛАУ имеет вид:

$$\left(A_0 + \widetilde{A}\right)^{-1} = A_0^{-1} - A_0^{-1} S_1 M_\nu^{-1} D S_2^T A_0^{-1} . \tag{8}$$

Зависимость (8) представляет собой обобщение известного тождества Шермана-Моррисона для обращения матрицы с диадным дополнением.

Если рассматривать расширенное фазовое пространство модели (1), соответствующее координатному вектору $X \oplus \nu$, то уравнение (1) можно представить в следующей блочно-структурированной форме:

$$\left(\left[\begin{array}{c|c} A_0 & 0_{nm} \\ \hline 0_{mn} & 0_{mm} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0_{nn} & S_1 \\ \hline D S_2^T & -I_m \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} X \\ \hline \nu \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} B \\ \hline 0_{m1} \end{array} \right], \tag{9}$$

где $0_{nm}, 0_{mn}, 0_{mm}$ – «нулевые» матрицы с размерностями соответственно $n \times m, m \times n, m \times m$; ν – m - компонентный вектор; 0_{m1} – «нулевой» вектор размерностью m.

В уравнении (9) матрица вариаций имеет существенно разреженную упорядоченную структуру так называемого $T_n^{(m)}$ – типа [2]. Важным свойством $T_n^{(m)}$ – структурированной матрицы вариаций является инвариантность ее формы относительно преобразований основной матрицы базовой СЛАУ. Осуществляя эквивалентное преобразование уравнения (9) с левым неособенным множителем L вида:

$$L = \left[\begin{array}{c|c} A_0^{-1} & 0_{nm} \\ \hline -D S_2^T A_0^{-1} & I_m \end{array} \right], \tag{10}$$

представим уравнение (9) следующим образом:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A_0^{-1} S_1 \\ \hline 0_{mn} & -I_m - D S_2^T A_0^{-1} S_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} X \\ \hline \nu \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} X_0 \\ \hline -D S_2^T A_0^{-1} B \end{array} \right]. \tag{11}$$

Преобразование модели (9) с множителем L объединяет операцию обращения базовой модели и прямую подстановку Гаусса, осуществляемую в основном фазовом пространстве рассматриваемой модели. Обратная подстановка в системе (11) приводит к формуле (6) для решения модифицируемой СЛАУ вида (1).

Преобразование согласно зависимостям (9)-(11) представляет собой интерпретацию обобщенного алгоритма Крона в виде $T_n^{(m)}$ – структуризации модифицируемой модели вида (1). Вычислительную эффективность такой структуризации можно оценить ее профильной характеристикой – шириной m окаймления в $T_n^{(m)}$ – формате матрицы вариаций. В алгоритме Крона профиль $T_n^{(m)}$ – структуры матрицы вариаций определяется числом варьируемых элементов основной матрицы исследуемой СЛАУ, что непосредственно вытекает из мультипликативной факторизации для матрицы вариаций в виде (3). При этом совершенно не учитываются особенности заполнения матрицы вариаций в каждом конкретном случае. В частности, такие важные характеристики разреженности матрицы $\widetilde{A}$, как локальные группировки элементов этой матрицы в пространстве ее строк и столбцов. Показательной в этом отношении является ситуация, когда матрица вариаций n – мерной СЛАУ состоит из n элементов, принадлежащих одной строке или столбцу. Применение в такой ситуации алгоритма (6) теряет смысл, так как приводит к необходимости обращения матрицы M_v того же порядка, что и у основной матрицы A_0 базовой модели.

3. Предлагаемые модификации существующих алгоритмов. Между тем ярко выраженный векторный характер группировки элементов матрицы вариаций в указанных случаях позволяет построить исключительно эффективную вычислительную схему для нахождения решения соответствующей модифицированной модели.

Примем, что в матрице вариаций $\widetilde{A}$ порядка n отличные от нуля элементы сгруппированы в i – ой строке, которую обозначим через R_i. Тогда матрицу вариаций можно представить в диадной форме:

$$\widetilde{A} = e_i\, R_i\,, \tag{12}$$

где e_i – единичный n – компонентный вектор с «1» в i – ой позиции. Такая факторизация матрицы вариаций позволяет осуществить $T_n^{(1)}$ – структуризацию модифицируемой СЛАУ с минимальным профилем $(m=1)$ в расширенном $(n+1)$ – мерном фазовом пространстве:

$$\left[\begin{array}{c:c} I_n & A_0^{-1}\, e_i \\ \hdashline R_i & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} X \\ \hdashline v \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} X_0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right], \tag{13}$$

где ν – скаляр, так как m=1.

Реализуя алгоритм Гаусса, решение для (13) получим в виде:

$$X = X_0 - \frac{R_i X_0}{1 + R_i h_i} h_i. \qquad (14)$$

В формуле (14) h_i – i – ый столбец матрицы A_0^{-1}. Таким образом, в рассматриваемом случае объем вычислений для алгоритма решения модифицированной модели n – го порядка с n варьируемыми элементами, полученного на основе $T_n^{(1)}$ – структуризации модели, определяется двумя скалярными произведениями. В вычислительном отношении это на два порядка экономичнее, чем прямое решение нового параметрического варианта исследуемой модели с основной матрицей $A_0 + \widetilde{A}$ или решение этого варианта по алгоритму Крона. Отличительной чертой методов, объединяемых названием «технологии разреженных матриц» (10), является эффективное использование разреженности обрабатываемых матриц с позиций экономии оперативной памяти ЭВМ и/или количества вычислительных операций. Граница между плотными и разреженными матрицами в вычислительных задачах достаточно «нечеткая», поскольку само понятие разреженной матрицы является эвристическим: матрица считается «разреженной», если есть возможность извлечь «вычислительную выгоду» из наличия в ней достаточно большого числа нулевых элементов. Такая возможность, а, следовательно, и само определение разреженности матрицы опирается на три взаимосвязанных фактора: структуру заполненности обрабатываемой матрицы; применяемые алгоритмы вычислений; доступность и возможности вычислительных средств.

При наличии достаточно большого числа нулевых коэффициентов в обрабатываемой матрице, т.е. при существенной степени ее разреженности, определяющим фактором для вычислительно эффективного использования этого обстоятельства является упорядоченность структуры заполнения матрицы. Как правило, способы преобразования для обеспечения определенным образом упорядоченной структуры заполнения матриц состоят в перестановке строк и столбцов [10].

Кроме того, такие перестановки могут быть полезны для повышения точности получаемых решений, особенно при ограниченном количестве знаков в мантиссах чисел, применяемых в расчетах.

Если структура заполнения матрицы изначально никак не упорядочена, то найти соответствующие матрицы перестановок очень трудно. Для этой цели приходится привлекать различные методы комбинаторики, теории графов, целочисленного программирования и т.п. Однако вычислительные затраты на предварительное преобразование разреженных матриц вполне окупаются, если сами матрицы имеют большие размеры, а задачи с ними решаются многократно. Известны примеры, когда удачное упорядочение основной матрицы СЛАУ большой размерности позволяло на несколько порядков уменьшить число выполняемых арифметических операций при решении системы и столь же эффективно сократить объем необходимой оперативной памяти [2].

$T_n^{(m)}$ – структуризация линейных моделей в расширенном фазовом пространстве представляет собой принципиально новый подход к проблеме использования разреженности обрабатываемых матриц. Главный смысл предлагаемой структуризации заключается не в упорядочении структуры заполнения матрицы, имеющей изначально разреженный характер, а в эквивалентном преобразовании исходной плотно заполненной матрицы в разреженную матрицу с унифицированной структурой заполнения. К сфере целесообразного применения $T_n^{(m)}$ – структуризации моделей, описываемых СЛАУ можно отнести: задачи расчета сложных систем по частям; составные модели систем агрегатно-модульного типа; многовариантные расчеты линейных моделей при структурно-параметрических изменениях исследуемых систем, включая их радикальную реконструкцию за счет расширения или сжатия основного структурного пространства. В задачах такого рода основная матрица представляется суммой двух матриц, одна из которых (стабильная) соответствует некоторой основной (базовой) системе, а вторая (в общем случае варьируемая) отражает взаимосвязи между различными частями основной системы или изменения (вариации) ее параметров. Во всех названных случаях матричная расчетная модель имеет вид типа (1).

Критерием эффективности $T_n^{(m)}$ – структуризации линейной модели служит профильная характеристика m. Обеспечение минимального профиля эквивалентной $T_n^{(m)}$ – модели осуществляется за счет целенаправленной декомпозиции варьируемой составляющей основной матрицы $\widetilde{A}$ расчетной модели в пространстве ее строк и столбцов. Минимальный профиль определяется минимальным числом кортежей ненулевых элементов, группируемых в пространстве строк и/или столбцов матрицы $\widetilde{A}$. Кортеж элементов, принадлежащих одной строке матрицы $\widetilde{A}$, может быть представлен в диадной форме (12). В эквивалентной модели такому кортежу соответствует одномерный профиль, как это следует из выражения (13). Аналогично можно показать, что кортеж элементов, принадлежащих одному столбцу матрицы $\widetilde{A}$, при $T_n^{(m)}$ – структуризации расчетной модели также порождает одномерную профильную составляющую в эквивалентной модели. Действительно, если ненулевые элементы матрицы $\widetilde{A}$ сгруппированы в одном столбце C_j, то эту матрицу можно представить в диадной форме:

$$\widetilde{A} = C_j\, e_j^T\ , \tag{15}$$

а $T_n^{(1)}$ – структурированный образ расчетной модели, то (1) примет следующий блочный вид:

$$\left[\begin{array}{c:c} I_n & A_0^{-1} C_j \\ \hdashline e_j^T & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X \\ \hdashline v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]. \tag{16}$$

Решение системы (16) выражается формулой:

$$X = X_0 - \frac{x_{0j}}{1 + g_j\, C_j} A_0^{-1}\, C_j\ , \tag{17}$$

где x_{0j} – j-ый элемент вектора X_0 ; g_j – j-ая строка матрицы A_0^{-1} .

В общем случае, когда эффективное использование особенностей структуры заполнения матрицы $\widetilde{A}$ предполагает смешанную группировку ее ненулевых элементов в виде отдельных строк и столбцов, применяется дуальная тактика диадной факторизации матрицы $\widetilde{A}$, базирующаяся на соотношениях вида (12) и (15).

Пусть $\widetilde{R}$, $\widetilde{C}$ – декомпозиционные матрицы вариаций, представляющие собой непересекающиеся совокупности ненулевых p строк и q столбцов матрицы $\widetilde{A}$ порядка n . Тогда матрицу вариаций $\widetilde{A}$ можно записать в следующей аддитивной форме:

$$\widetilde{A} = E_R\, \widetilde{R} + \widetilde{C}\, E_C^T\ , \tag{18}$$

где E_R и E_C – матрицы с размерами $n \times p$ и $n \times q$, составленные из единичных векторов, отвечающих глобальным номерам (в основном фазовом пространстве расчетной модели) соответственно строк матрицы $\widetilde{R}$ и столбцов матрицы $\widetilde{C}$. В рассматриваемом общем случае

$T_n^{(m)}$ – структурированную модель с профилем $m = p + q$ расчетной системы вида (1) можно представить следующим образом:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A_0^{-1} V \\ \hline H & -I_m \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X \\ \hline v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_0 \\ \hline 0_{m1} \end{array}\right], \tag{19}$$

где $v - (p + q)$ – компонентный вектор дополнительных переменных, а H , V – блочные матрицы вида:

$$H = \left[\begin{array}{c} \widetilde{R} \\ \hline E_C^T \end{array}\right]; \quad V = \left[\begin{array}{c|c} E_R & \widetilde{C} \end{array}\right]. \tag{20}$$

Выполняя прямую подстановку Гаусса в пределах основного фазового пространства расчетной модели, получим решение системы (19):

$$X = \left[I_n - A_0^{-1} V \left(I_m - H\, A_0^{-1} V \right)^{-1} H \right] X_0 \,. \tag{21}$$

Построение по формуле (21) решения варьируемой модели с локально плотной матрицей вариаций $\widetilde{A}$, содержащей в общем случае $p(n-q)+qn$ элементов, потребует решения вспомогательной СЛАУ порядка $(p+q) < n$. Преобразование по алгоритму Крона в этом случае совершенно теряет смысл, так как приводит к необходимости решать СЛАУ порядка $p(n-q)+q\,n$, который при $(p+q) > 1$ существенно превышает порядок исходной СЛАУ.

При $T_n^{(m)}$ – структуризации линейной модели (1) на основе аддитивно-диадной факторизации матрицы вариаций в виде (18) минимизация профиля m эквивалентной модели достигается за счет последовательного выбора из матрицы $\widetilde{A}$ ее строки или столбца с наиболее длинным на текущем шаге кортежем ненулевых элементов. Выбираемые строки и столбцы помещаются в соответствующую декомпозиционную матрицу вариаций $\widetilde{R}$ или $\widetilde{C}$. В общем случае одна из этих матриц может оказаться пустой.

Схема минимизации профиля $T_n^{(m)}$ – структурированного пространства расчетной модели (1) может быть рационально реализована с использованием сжатых матриц инциденций S_{1r}, S_{2r} . В матрицах этого вида участвуют только опорные узлы (структурные переменные) схемы вариаций: r_1 заходящих и r_2 исходящих узлов. На основе сжатых матриц инциденций для $(r_1 + r_2)-$ узловой схемы вариаций можно построить сжатую $r_1 \times r_2 -$ матрицу вариаций $\widetilde{A}_r$ в форме, аналогичной выражению (3):

$$\widetilde{A}_r = S_{1r}\, D\, S_{2r}^T \,. \qquad (22)$$

Глобальная матрица вариаций $\widetilde{A}$ порядка n может быть реконструирована на основе сжатой матрицы вариаций, если последняя сопровождается двумя лексикографически упорядоченными номерными кортежами N_{1r}, N_{2r}, содержащими соответственно r_1 и r_2 элементов. Элементами этих кортежей служат глобальные (в основном структурном пространстве расчетной модели) номера узлов подграфа схемы вариаций, инцидентных соответственно заходящим и исходящим ветвям. Глобальная матрица вариаций может быть получена как расширение сжатой матрицы вариаций за счет последовательного формирования у последней $n - r_1$ нулевых строк с номерами из множества N_1 и $n - r_2$ нулевых столбцов с номерами из множества N_2 :

$$N_1 = N \setminus N_{1r}\,; \quad N_2 = N \setminus N_{2r}\,; \quad N = (1, \ldots, n), \qquad (23)$$

где символ «\» обозначает разность множеств.

Декомпозиция матрицы вариаций в пространстве ее строк и столбцов по предложенной выше схеме последовательного выбора строк и столбцов с наиболее длинными на текущем шаге кортежами ненулевых элементов первоначально осуществляется на основе сжатой матрицы вариаций $\widetilde{A}_r$. В результате, в $p \times q -$ подпространстве матрицы $\widetilde{A}_r$ формируются сжатые декомпозиционные матрицы вариаций $\widetilde{R}_r \; и \; \widetilde{C}_r$ с размерами соответственно $p \times r_2 \; и \; r_1 \times q$. Полные декомпозиционные матрицы вариаций $\widetilde{R} \; и \; \widetilde{C}$, отвечающие основному фазовому пространству расчетной модели, реконструируются на основе своих сжатых образов $\widetilde{R}_r \; и \; \widetilde{C}_r$ за счет последовательного формирования: $n - r_2$ нулевых столбцов с номерами из множества N_2 - у матрицы $\widetilde{R}_r$; $n - r_1$ нулевых строк с номерами из множества N_1 - у матрицы $\widetilde{C}_r$.

В качестве элементарного иллюстративного примера использования предложенных зависимостей рассмотрим леонтьевскую балансовую модель “затраты-выпуск” для условной десятиотраслевой производственно-экономической системы. Технологическую матрицу A системы и вектор B конечной продукции примем в виде:

$$A = \begin{bmatrix} 0.0132 & 0.0227 & 0.0423 & 0.0232 & 0.0140 & 0.0332 & 0.0275 & 0.0651 & 0.0422 & 0.0827 \\ 0.0225 & 0.0305 & 0.0571 & 0.0721 & 0.0117 & 0.0653 & 0.0820 & 0.0129 & 0.0351 & 0.0425 \\ 0.0343 & 0.0173 & 0.0413 & 0.0637 & 0.0885 & 0.0231 & 0.0497 & 0.0147 & 0.0829 & 0.0665 \\ 0.0453 & 0.0235 & 0.0180 & 0.0382 & 0.0116 & 0.0281 & 0.0479 & 0.0836 & 0.0373 & 0.0426 \\ 0.0216 & 0.0565 & 0.0146 & 0.0456 & 0.0732 & 0.0847 & 0.0429 & 0.1203 & 0.0338 & 0.0503 \\ 0.0132 & 0.0427 & 0.0623 & 0.0362 & 0.0140 & 0.0732 & 0.0675 & 0.0851 & 0.0222 & 0.0127 \\ 0.0325 & 0.0705 & 0.0471 & 0.0221 & 0.0117 & 0.0553 & 0.0910 & 0.1329 & 0.0654 & 0.0225 \\ 0.0143 & 0.0273 & 0.0833 & 0.0437 & 0.0265 & 0.0131 & 0.0897 & 0.0647 & 0.0429 & 0.0165 \\ 0.0253 & 0.0033 & 0.0851 & 0.0662 & 0.0436 & 0.0181 & 0.0911 & 0.0481 & 0.0233 & 0.0173 \\ 0.0226 & 0.0345 & 0.0846 & 0.0256 & 0.0132 & 0.0457 & 0.0729 & 0.0343 & 0.0438 & 0.0963 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2.73 & 3.38 & 3.45 & 2.47 & 3.49 & 3.06 & 3.75 & 3.21 & 3.27 & 4.04 \end{pmatrix}^T .$$

Для матрицы Леонтьева $L_m = I - A$ и оператора Леонтьева $L_0 = (I - A)^{-1}$ получены следующие выражения:

$$L_m = \begin{bmatrix} 0.9868 & -0.0227 & -0.0423 & -0.0232 & -0.0140 & -0.0332 & -0.0275 & -0.0651 & -0.0422 & -0.0827 \\ -0.0225 & 0.9695 & -0.0571 & -0.0721 & -0.0117 & -0.0653 & -0.0820 & -0.0129 & -0.0351 & -0.0425 \\ -0.0343 & -0.0173 & 0.9587 & -0.0637 & -0.0885 & -0.0231 & -0.0497 & -0.0147 & -0.0829 & -0.0665 \\ -0.0453 & -0.0235 & -0.0180 & 0.9618 & -0.0116 & -0.0281 & -0.0479 & -0.0836 & -0.0373 & -0.0426 \\ -0.0216 & -0.0565 & -0.0146 & -0.0456 & 0.9268 & -0.0847 & -0.0429 & -0.1203 & -0.0338 & -0.0503 \\ -0.0132 & -0.0427 & -0.0623 & -0.0362 & -0.0140 & 0.9268 & -0.0675 & -0.0851 & -0.0222 & -0.0127 \\ -0.0325 & -0.0705 & -0.0471 & -0.0221 & -0.0117 & -0.0553 & 0.9090 & -0.1329 & -0.0654 & -0.0225 \\ -0.0143 & -0.0273 & -0.0833 & -0.0437 & -0.0265 & -0.0131 & -0.0897 & 0.9353 & -0.0429 & -0.0165 \\ -0.0253 & -0.0033 & -0.0851 & -0.0662 & -0.0436 & -0.0181 & -0.0911 & -0.0481 & 0.9767 & -0.0173 \\ -0.0226 & -0.0345 & -0.0846 & -0.0256 & -0.0132 & -0.0457 & -0.0729 & -0.0343 & -0.0438 & 0.9037 \end{bmatrix},$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1.0297 & 0.0442 & 0.0828 & 0.0521 & 0.0346 & 0.0598 & 0.0753 & 0.1067 & 0.0724 & 0.1128 \\ 0.0435 & 1.0580 & 0.0995 & 0.1054 & 0.0344 & 0.0991 & 0.1366 & 0.0679 & 0.0713 & 0.0753 \\ 0.0573 & 0.0472 & 1.0884 & 0.1022 & 0.1184 & 0.0617 & 0.1094 & 0.0774 & 0.1214 & 0.1063 \\ 0.0618 & 0.0459 & 0.0577 & 1.0666 & 0.0303 & 0.0544 & 0.0961 & 0.1297 & 0.0675 & 0.0708 \\ 0.0449 & 0.0914 & 0.0708 & 0.0885 & 1.1023 & 0.1285 & 0.1132 & 0.1901 & 0.0756 & 0.0887 \\ 0.0327 & 0.0699 & 0.1064 & 0.0708 & 0.0380 & 1.1059 & 0.1237 & 0.1389 & 0.0584 & 0.0418 \\ 0.0568 & 0.1043 & 0.1066 & 0.0669 & 0.0411 & 0.0953 & 1.1653 & 0.2005 & 0.1109 & 0.0595 \\ 0.0351 & 0.0540 & 0.1256 & 0.0784 & 0.0532 & 0.0438 & 0.1450 & 1.1187 & 0.0809 & 0.0479 \\ 0.0464 & 0.0308 & 0.1249 & 0.0994 & 0.0705 & 0.0497 & 0.1440 & 0.1050 & 1.0614 & 0.0500 \\ 0.0450 & 0.0640 & 0.1352 & 0.0632 & 0.0409 & 0.0822 & 0.1345 & 0.0897 & 0.0853 & 1.1367 \end{bmatrix}.$$

Вектор X_0 валовой продукции условных отраслей, обеспечивающий равновесное функционирование рассматриваемой системы получен в виде:

$$X_0 = L_0 B = (\ 4.9963 \quad 5.9898 \quad 6.4103 \quad 4.7135 \quad 6.7748 \quad 5.6533 \quad 7.0921 \quad 5.8181 \quad 5.8549 \quad 7.0193)^T \cdot$$

Один из вариантов глобального управления системой рассматриваемого вида связан с прогнозированием необходимой для поддержания равновесия системы коррекции вектора валовой продукции X_0 при технологической модернизации отдельных отраслей. На модельном уровне указанная модернизация приводит к изменению значений коэффициентов технологической матрицы системы, принадлежащих строке и столбцу матрицы, соответствующих модернизируемой условной отрасли. Причем, возможные изменения в общем случае имеют многовариантный характер, как в отношении модернизируемых отраслей, так и в отношении вариаций отдельных технологических коэффициентов.

В такой ситуации повторяемый расчетный блок предполагает определение равновесного вектора X_{var} валовых выпусков условных отраслей при одновременной вариации коэффициентов какой-либо строки технологической матрицы системы и одноименного столбца. Это соответствует рассмотренному в статье случаю векторной группировки варьируемых коэффициентов.

Предположим, что варьируются коэффициенты третьей строки и третьего столбца технологической матрицы анализируемой системы и рассмотрим один шаг в общем случае многовариантного процесса. Пусть на данном шаге вектор-строка $\widetilde{R}_3$ вариаций коэффициентов третьей строки технологической матрицы A и вектор-столбец $\widetilde{C}_3$ вариаций коэффициентов третьего столбца этой матрицы имеют вид:

$$\widetilde{R}_3 = -(0.0137 \quad 0.0069 \quad 0.0165 \quad 0.0255 \quad 0.0354 \quad 0.0092 \quad 0.0199 \quad 0.0059 \quad 0.0332 \quad 0.0266),$$

$$\widetilde{C}_3 = -(0.0190 \quad 0.0257 \quad 0.0186 \quad 0.0081 \quad 0.0066 \quad 0.0280 \quad 0.0212 \quad 0.0375 \quad 0.0383 \quad 0.0381)^T \cdot$$

Следуя общей зависимости (21), определим значение X_{var} по формуле:

$$X_{\text{var}} = \left(I - L_0 V S^{-1} H\right) X_0 =$$
$$= (\ 4.7183 \quad 5.6559 \quad 5.0108 \quad 4.5197 \quad 6.5369 \quad 5.2961 \quad 6.7343 \quad 5.3963 \quad 5.4357 \quad 6.5653)^T .$$

Участвующие в этой формуле матричные компоненты в соответствии с выражениями (20) получены в виде:

$$H = \begin{bmatrix} 0.0137 & 0.0069 & 0.0165 & 0.0255 & 0.0354 & 0.0092 & 0.0199 & 0.0059 & 0.0332 & 0.0266 \\ 0 & 0 & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0190 & 0.0257 & 0.0186 & 0.0081 & 0.0066 & 0.0280 & 0.0212 & 0.0375 & 0.0383 & 0.0381 \end{bmatrix}^T,$$

$$S = E_2 + \mathrm{H}\,\mathrm{L}_0\mathrm{V} = \begin{bmatrix} 1.0354 & 0.0085 \\ 1.0884 & 1.0398 \end{bmatrix}.$$

При вычислении вектора X_{var} потребовалась операция обращения лишь матрицы S второго порядка.

Прямой метод расчета вектора X_{var} потребует построения нового оператора Леонтьева L_0^*, что будет связано с необходимостью обращения новой матрицы Леонтьева десятого порядка:

$$L_0^* = (L_m^*)^{-1} = [I - (A - V\,H)]^{-1}.$$

Матрицу L_m^* и оператор L_0^* Леонтьева новой системы можно получить в виде:

$$L_m^* = \begin{bmatrix} 0.9868 & -0.0227 & -0.0233 & -0.0232 & -0.0140 & -0.0332 & -0.0275 & -0.0651 & -0.0422 & -0.0827 \\ -0.0225 & 0.9695 & -0.0314 & -0.0721 & -0.0117 & -0.0653 & -0.0820 & -0.0129 & -0.0351 & -0.0425 \\ -0.0206 & -0.0104 & 0.9938 & -0.0382 & -0.0531 & -0.0139 & -0.0298 & -0.0088 & -0.0497 & -0.0399 \\ -0.0453 & -0.0235 & -0.0099 & 0.9618 & -0.0116 & -0.0281 & -0.0479 & -0.0836 & -0.0373 & -0.0426 \\ -0.0216 & -0.0565 & -0.0080 & -0.0456 & 0.9268 & -0.0847 & -0.0429 & -0.1203 & -0.0338 & -0.0503 \\ -0.0132 & -0.0427 & -0.0343 & -0.0362 & -0.0140 & 0.9268 & -0.0675 & -0.0851 & -0.0222 & -0.0127 \\ -0.0325 & -0.0705 & -0.0259 & -0.0221 & -0.0117 & -0.0553 & 0.9090 & -0.1329 & -0.0654 & -0.0225 \\ -0.0143 & -0.0273 & -0.0458 & -0.0437 & -0.0265 & -0.0131 & -0.0897 & 0.9353 & -0.0429 & -0.0165 \\ -0.0253 & -0.0033 & -0.0468 & -0.0662 & -0.0436 & -0.0181 & -0.0911 & -0.0481 & 0.9767 & -0.0173 \\ -0.0226 & -0.0345 & -0.0465 & -0.0256 & -0.0132 & -0.0457 & -0.0729 & -0.0343 & -0.0438 & 0.9037 \end{bmatrix},$$

$$L_0^* = \begin{bmatrix} 1.0267 & 0.0418 & 0.0427 & 0.0467 & 0.0284 & 0.0565 & 0.0696 & 0.1026 & 0.0661 & 0.1072 \\ 0.0399 & 1.0550 & 0.0513 & 0.0990 & 0.0269 & 0.0953 & 0.1297 & 0.0630 & 0.0637 & 0.0686 \\ 0.0322 & 0.0265 & 1.0198 & 0.0574 & 0.0666 & 0.0347 & 0.0615 & 0.0435 & 0.0683 & 0.0598 \\ 0.0597 & 0.0442 & 0.0297 & 1.0628 & 0.0260 & 0.0521 & 0.0921 & 0.1269 & 0.0631 & 0.0670 \\ 0.0423 & 0.0892 & 0.0365 & 0.0839 & 1.0970 & 0.1258 & 0.1082 & 0.1866 & 0.0701 & 0.0839 \\ 0.0288 & 0.0667 & 0.0548 & 0.0639 & 0.0300 & 1.1017 & 0.1163 & 0.1336 & 0.0502 & 0.0347 \\ 0.0529 & 0.1011 & 0.0549 & 0.0600 & 0.0331 & 0.0911 & 1.1579 & 0.1952 & 0.1027 & 0.0523 \\ 0.0305 & 0.0503 & 0.0647 & 0.0702 & 0.0437 & 0.0389 & 0.1363 & 1.1125 & 0.0713 & 0.0394 \\ 0.0419 & 0.0270 & 0.0643 & 0.0913 & 0.0611 & 0.0448 & 0.1353 & 0.0988 & 1.0518 & 0.0416 \\ 0.0401 & 0.0600 & 0.0697 & 0.0544 & 0.0307 & 0.0769 & 0.1251 & 0.0831 & 0.0749 & 1.1275 \end{bmatrix}.$$

Значение вектора X_{var}, полученное прямым методом:

$$X_{\text{var}} = L_0^* B = (4.7183 \quad 5.6559 \quad 5.0108 \quad 4.5197 \quad 6.5369 \quad 5.2961 \quad 6.7343 \quad 5.3963 \quad 5.4357 \quad 6.5653)^T,$$

подтверждает результат вычислений по компактной схеме.

Для большой системы порядка n в аналогичной расчетной ситуации определение вектора X_{var} по формуле (21) будет связано с обращением матрицы также второго порядка. Прямой же метод расчета потребует обращения матрицы порядка n.

4. Заключение. В статье предложен способ структуризации систем линейных уравнений с варьируемыми коэффициентами, обеспечивающий разреженный характер обрабатываемых матриц и, как следствие, существенное повышение вычислительной эффективности расчетных алгоритмов по сравнению с прямыми методами расчета больших линейных систем.

Практически важной особенностью выполняемой структуризации является минимальная профильная характеристика (количество кортежей варьируемых коэффициентов) разреженности обрабатываемых матриц при векторных вариациях коэффициентов уравнений. Это радикально отличает предложенный метод от известного диакоптического алгоритма Крона, в котором величина профиля получаемой разреженности расчетной матрицы определяется количеством одновременно варьируемых параметров.

Для сложных схем вариации коэффициентов уравнений предложен декомпозиционный подход, использующий сжатые матрицы вариаций коэффициентов и обеспечивающий минимизацию профиля $T_n^{(m)}$ – структурированного пространства разреженной расчетной системы.

Литература

1. *Блатов И. А., Китаева Е. В.* Численные методы для разреженных матриц // Самара: Самарский гос. университет. 2010. 48 с.
2. *Брумштейн Ю.М.* Использование псеводогидродинамической постановки в задачах фильтрации со свободной поверхностью // Естественные науки, Астрахань: Изд.дом «Астраханский университет». 2004. № 8. С. 125-128.
3. *Бутюгин Д.С., Ильин В.П., Перевозкин Д.В.* Методы параллельного решения СЛАУ на системах с распределенной памятью в библиотеке Krylov // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2012. № 47 (306). С. 22-36.
4. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений // М.: Мир. 1984. 333 с.
5. *Игнатьев А.В., Ромашкин В.Н.* Анализ эффективности методов решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений // Интернет-Вестник ВолгГАСУ. 2008. № 3(6). С. 5.

6. *Ильин В.П.* Проблемы высокопроизводительных технологий решения больших разреженных СЛАУ // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2009. Т. 10. № 1. С. 141-147.
7. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям – диакоптика: Перевод с английского // М.: Наука. 1972. 544 с.
8. *Кочура А.Е.* Декомпозиция и технология разреженных матриц в современных вычислительных проблемах // Труды Международной научно-методической конференции «Математика в вузе». Псков. 1997.
9. *Солнцева М.О., Кухаренко Б.Г.* Применение методов кластеризации узлов на графах с разреженными матрицами смежности в задачах логистики // Труды Московского физико-технического института. 2013. Т. 5. № 3 (19). С. 75-83.
10. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц: Перевод с английского // М.: Мир. 1988. 410 с.
11. *Уилкинсон Дж.Х., Райнш С.* Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра // М.: Машиностроение. 1976. 390 с.
12. *Эварт Т.Е., Лазарева А.Б.* Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами // Приволжский научный вестник. 2013. № 12-2 (28). С. 91-92.
13. *Юлдашев А.В., Гатиятуллин М.З.* Сравнительное исследование эффективности ряда библиотек реализующих алгоритмы решения разреженных матриц // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. 2012. № 4 (22). С. 130-134.
14. *Alaghband G.* Parallel sparse matrix solution and performance // Parallel Computing. 1995. vol. 21. no. 9. pp. 1407-1430.
15. *Borutzky W.* Bond Graph Methodology: Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models // Springer. 2009. 662 p.
16. *Dehnavi M.M., Fernández D.M., Giannacopoulos D.* Finite-element sparse matrix vector multiplication on graphic processing units // IEEE Transactions on Magnetics. 2010. vol. 46. no. 8. C. 2982-2985.
17. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. SIAM. 2003. 528 p.
18. *Sasaoka T., Kawabata H., Kitamura T.* A matlab-based code generator for parallel sparse matrix computations utilizing PSBLAS // IEICE Transactions on Information and Systems. 2007. vol. E90-D. no. 1. P. 2.
19. *Davis T.A., Hu Y.* The university of Florida sparse matrix collection ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS) // November 2011. vol. 38. Issue 1. Article no. 1.
20. *Davis T.A.* Direct Methods for Sparse Linear Systems. SIAM, 2006. 217 p.
21. *Tran T.M., Gruber R., Appert K., Wuthrich S.* A direct parallel sparse matrix solver // Computer Physics Communications. 1996. vol. 96. no. 2-3. pp. 118-128.

References

1. Blatov I. A., Kitaeva E. V. *Chislennye metody dlja razrezhennyh matric* [Numerical methods for sparse matrices]. Samara: Samarskij gos. universitet. 2010. 48 p. (In Russ.).
2. Brumshtejn Ju.M. [Using pseudo hydrodynamic approach to filtering problems with a free surface]. *Estestvennye nauki – Natural Sciences*. Astrahan':Izd.dom «Astrahanskij universitet». 2004. no 8. pp. 125-128. (In Russ.).
3. Butjugin D.S., Il'in V.P., Perevozkin D.V. [Methods of parallel solving of LAES on distributed memory systems in a library Krylov]. *Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Vychislitel'naja matematika i informatika – Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2012. no. 47(306). pp. 22-36. (In Russ.).

4. Dzhordzh A., Lju Dzh. *Chislennoe reshenie bol'shih razrezhennyh sistem uravnenij* [Numerical solution of large sparse systems of equations]. M.:Mir. 1984. 333 p. (In Russ.).
5. Ignat'ev A.V., Romashkin V.N. [Analysis of the effectiveness of methods for solving large sparse systems of linear algebraic equations]. *Internet-Vestnik VolgGASU – Scientific and Technical Multi-Topic Internet Journal of VSUACE*. 2008. no. 3(6). pp. 5. (In Russ.).
6. Il'in V.P. [Problems of highly productive technology of solution of large sparse LAES]. *Vychislitel'nye metody i programmirovanie: novye vychislitel'nye tehnologii – Numerical methods and programming: new computing technologies*. 2009. vol. 10. no. 1. pp. 141-147. (In Russ.).
7. Kron G. Diakoptics: The Piecewise Solution of Large Scale Systems, MacDonald Publishing. 1963. 166 p. [Russ. ed.: Banah L.Ja., Vlasova A.V., Pavlova I.A., Perminova M.D., Potemkina B.A., Sineva A.V. Issledovanie slozhnyh sistem po chastjam – diakoptika: Perevod s anglijskogo. M.: Nauka. 1972. 544 p.]
8. Kochura A.E. [Decomposition and technology of sparse matrix in modern computing problems]. *Trudy Mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoj konferencii «Matematika v vuze»* [Proceedings of the International Scientific Conference "Mathematics in the University"]. Pskov. 1997. (In Russ.).
9. Solnceva M.O., Kuharenko B.G. [Application of clustering methods nodes on graphs with sparse matrices of adjacency in problems of logistics]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tehnicheskogo institute – Proceedings of MIPT*. 2013. vol. 5. no. 3(19). pp. 75-83. (In Russ.).
10. Pissanecki S. *Tehnologija razrezhennyh matric: Perevod s anglijskogo* [Sparse Matrix Technology: Translated from English]. M.: Mir. 1988. 410 p. (In Russ.).
11. Uilkinson Dzh.H., Rajnsh S. *Spravochnik algoritmov na jazyke Algol. Linejnaja algebra* [Reference book of algorithms in Algol. Linear algebra]. M.:Mashinostroenie, 1976. 390 p. (In Russ.).
12. Jevart T.E., Lazareva A.B. [An algorithm for solving systems of linear algebraic equations with sparse matrices]. *Privolzhskij nauchnyj vestnik – Privolzhsky scientific bulletin*. 2013. no. 12-2(28). pp. 91-92. (In Russ.).
13. Juldashev A.V., Gatijatullin M.Z. [Comparative research of the effectiveness of a number of libraries implementing algorithms for solving sparse matrices]. *Vektor nauki Tol'jattinskogo gosudarstvennogo universiteta – Vector of science TSU*. 2012. no. 4 (22). pp. 130-134. (In Russ.).
14. Alaghband G. Parallel sparse matrix solution and performance. Parallel Computing. 1995. vol. 21. no 9. pp. 1407-1430.
15. Borutzky W. Bond Graph Methodology: Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models. Springer. 2009. 662 p.
16. Dehnavi M.M., Fernández D.M., Giannacopoulos D. Finite-element sparse matrix vector multiplication on graphic processing units. IEEE Transactions on Magnetics. 2010. vol. 46. no 8. pp. 2982-2985.
17. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM. 2003. 528 p.
18. Sasaoka T., Kawabata H., Kitamura T. A matlab-based code generator for parallel sparse matrix computations utilizing PSBLAS. IEICE Transactions on Information and Systems. 2007. vol. E90-D. no. 1. P. 2.
19. Davis T.A., Hu Y. The university of Florida sparse matrix collection ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). November 2011. vol. 38. Issue 1. Article no 1.
20. Davis T.A. Direct Methods for Sparse Linear Systems. SIAM, 2006. 217 p.
21. Tran T.M., Gruber R., Appert K., Wuthrich S. A direct parallel sparse matrix solver. Computer Physics Communications. 1996. vol. 96. no 2-3. pp. 118-128.

Кочура Александр Евгеньевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет (СПбГПУ). Область научных интересов: технологии разреженных матриц. Число научных публикаций — 189. kochura36@mail.ru; 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 34, +7 -911-961-47-90.

Kochura Alexander Evgenyevich — Ph.D., Dr.Sci., professor, St.Petersburg State Polytechnical University. Research interests: technologies of the rarefied matrixes. The number of publications — 189. kochura36@mail.ru; 34, Polytechnical St. Petersburg, 195251, Russia; +7 -911-961-47-90.

Подкользина Людмила Викторовна — к-т пед. наук, доцент, старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет (СПбГПУ). Область научных интересов**:** системы линейных алгебраических уравнений. Число научных публикаций — 36. texnolog@zavod-vtuz.ru; 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 34, +7-921- 944-88-54.

Podkolzina Lyudmila Viktorovna — Ph.D., associate professor, senior teacher, St.Petersburg State Polytechnical University. Research interests: technologies of the rarefied matrixes. The number of publications — 36. texnolog@zavod-vtuz.ru; 34, Polytechnical St. Petersburg, 195251, Russia; +7-921- 944-88-54.

Ивакин Ян Альбертович — д-р техн. наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов**:** интеллектуализация ГИС. Число научных публикаций —117. ivakin@oogis.ru; 199178, Санкт-Петербург, 14 линия, 39, +7-911-284-36-20.

Ivakin Yan Albertovich — Ph.D., Dr.Sci., associate professor, leading researcher, St. Petersburg institute for informatics and automation of Russian Academy of Sciences. Research interests: Intelegent of GIS. The number of publications — 117. ivakin@oogis.ru; 39, 14th line. St. Petersburg, 195251, Russia; +7-911-284-36-20.

Нидзиев Иван Иванович — к-т техн. наук, докторант, Военный учебно-научный центр Военно-морского флота «Военно-морская академия им. Н.Г.Кузнецова». Область научных интересов: многовариантные расчеты. Число научных публикаций — 29. ivan_005@mail.ru; 198903, Санкт-Петербург, Петродворец, ул. Разводная, 15; +7-921-952-37-04.

Nidziyev Ivan Ivanovich — Ph.D., Doctoral candidate, Military scientific training center of navy of the N.G. Kuznetsov Naval Academy. Research interests: multiple calculations. The number of publications — 29. ivan_005@mail.ru; 15, Razvodnaya str. St. Petersburg, Petrodvorets, 198903, Russia; +7-921-952-37-04.

РЕФЕРАТ

Кочура А.Е., Подкользина Л.В., Ивакин Я.А., Нидзиев И.И. **Разработка алгоритма решения систем линейных уравнений с варьируемыми параметрами, использующего разреженность матрицы.**

Многократное решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности (БР) необходимо для целого ряда задач в сфере экономики, моделирования климата, машиностроительных расчетов и пр. Проанализированы достоинства и недостатки прямых и итерационных методов решения СЛАУ БР. В статье предложен новый «прямой» метод (алгоритм) решения СЛАУ с варьируемыми параметрами для матриц БР. В разработанном методе с учетом разреженности матрицы используется информация о решении базовой СЛАУ. Это позволяет в задачах, описываемых СЛАУ с БР, которые необходимо решать многократно, существенно повысить быстродействие расчетных алгоритмов за счет уменьшения количества вычислительных операций; снизить требования к объемам оперативной памяти ЭВМ. Авторы статьи детально описывают применяемые расчетные схемы, приводят все необходимые матричные уравнения.

SUMMARY

Kochura A.E., Podkolzina L.V., Ivakin Y.A., Nidziev I.I. **Development of algorithm of the decision of systems linear equations with the varied parameters, using the matrix sparseness.**

The repeated decision of linear algebraic equations systems (LAES) with big dimension (BD) is necessary for a number of tasks in spheres of economy, climate modeling, calculations in machine-building and so forth. Merits and demerits of straight and iterative methods for BD LAES are shown. In article is offered the new «direct» method (algorithm) for solution of BD LES with varied parameters. For offered method effectively used basic solution LAES and matrix sparseness information. It allows in the tasks using BD LAES, which need to be solved repeatedly, significantly increase speed of settlement algorithms due to reduction of number of computing operations, to lower requirements for random access memory volumes of computers. Authors of article describe in detail applied settlement schemes, give all necessary matrix equations.