УДК519.8

В.Н. Калинин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ

Калинин В.Н. **Математическая модель информационного взаимодействия космического аппарата с поверхностью Земли.**
Аннотация. В статье рассматривается математическая модель информационного взаимодействия космического аппарата с поверхностью Земли. В основе построения модели лежит предложенная автором концепция активного подвижного объекта как сложной подвижной системы, предназначенной для информационного, энергетического или вещественного взаимодействия с окружающей физической средой или с другими подобными системами. Показано, что соответствующая модель может быть представлена в виде интегрального оператора Фредгольма, отображающего множество элементов гильбертова пространства управлений (класса допустимых управляющих воздействий) в гильбертово пространство информационных состояний. Исследованы свойства этого оператора и соответствующего множества достижимости в пространстве информационных состояний. Рассмотрен упрощенный вариант предложенной математической модели для взаимодействия с дискретной средой (изолированными источниками информации).
Ключевые слова: космическая кибернетика, космический аппарат, информационное взаимодействие, активный подвижный объект, пространство информационных состояний, множество информационной достижимости, гильбертово пространство, интегральный оператор Фредгольма, выпуклость, слабая компактность, управляемость, оптимальное терминальное управление.

Kalinin V.N. **Mathematical model of informational interaction of the spacecraft with a surface of the Earth.**
Abstract. In the article the mathematical model of informational interaction of the spacecraft with a surface of the Earth is considered. In a basis of construction of model lies proposed of the author the concept of active movable object as the complicated movable system intended for informational, energy or material interaction with an ambient physical environment or with other similar systems. It is shown that the corresponding model can be presented in the form of Fredholm integral operator mapping set of elements of a Hilbert space of controls (a class of admissible control actions) in a Hilbert space of information states. Investigated the properties of this operator and the corresponding reachability sets in space of information states. Considered a simplified variant of the proposed mathematical model for interaction with the discrete environment (the isolated sources of information).
Keywords: space cybernetics, spacecraft, informational interaction, active movable object, space of information states, set of information approachability, Hilbert space, Fredholm integral operator, convexity, weak compactness, controllability, optimal terminal control.

1. Введение. Одной из центральных проблем в современной космической кибернетике [10] является *проблема управления космическим аппаратом* (в дальнейшем сокращенно КА). В основе постановки этой проблемы и ее многочисленных вариантов лежит разработка *математической модели* КА, отражающей целевые и системные аспекты его функционирования и причинно-следственные связи между внешними воздействиями, приложенными к аппарату, и процессами изменения его состояния во времени.

Космический аппарат представляет собой *динамическую систему*, выполняющую различные и взаимосвязанные функции и относящуюся к классу *активных подвижных объектов* (АПО), теория управления которыми была предложена в работах [7–9,12,14,16–20]. Исходя из концепции АПО, функционирование КА можно представить совокупностью *четырех составляющих,* включающей в свой состав: перемещение основания КА в пространстве (механическое движение), изменение состояния бортового ресурса, изменение состояния размещенных на его борту приборов и, наконец, самое главное – осуществление *информационного взаимодействия*(далее сокращенно ИВ) КА с окружающей физической средой (КА как АПО 1-го рода) или другими АПО (КА как АПО 2-го рода) – это *целевая задача* и *основной атрибут* КА. Подобная трактовка КА позволяет отнести его к классу так называемых сложных систем (т. е. систем, элементы которых сами являются системами).

В соответствии с *концепцией активного подвижного объекта* структурная модель КА как АПО и как объекта управления может быть представлена схемой, изображенной на рисунке 1. Здесь показан основной компонент этой модели – *подсистема информационного взаимодействия* и три вспомогательных компонента – *подсистема механического движения* КА, *подсистема бортовой аппаратуры* КА и *подсистема бортового ресурса* КА, необходимого для функционирования всех остальных подсистем.

На схеме также отображены взаимосвязи между подсистемами и соответствующие входные (управляющие и возмущающие) воздействия и состояния подсистем.

Из этой схемы следует, что общая математическая модель информационного взаимодействия в данном случае должна включать в свой состав модели всех *четырех* указанных составляющих, так как выполнение целевой задачи КА – задачи осуществления информационного взаимодействия с окружающей физической средой и другими АПО (наземными или космическими) возможно только при согласованном функционировании всех рассмотренных четырех подсистем. Поэтому любая математическая модель процесса информационного взаимодействия КА с окружающей физической средой будет представлять собой некоторую комбинацию *четырех* взаимосвязанных частных моделей указанных подсистем [13].

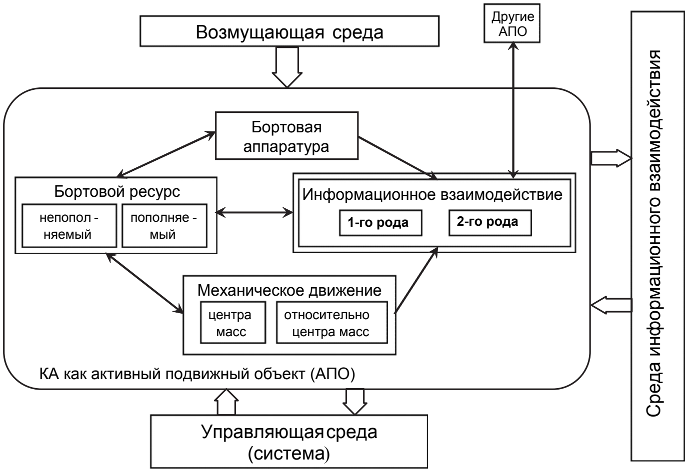

Рис. 1. Общая структурная схема КА как активного подвижного объекта

Кроме того, в соответствии с *системным подходом* исследование системы должно предполагать расширенное понимание *среды*, в которую "погружена" исследуемая система, т. е. других систем, влияющих на функционирование системы или подверженных влиянию с ее стороны. В общем случае понятие *среды* применительно к КА как информационному АПО предполагает рассмотрение трех *составляющих*. Это:

– *управляющая среда* (управляющая система), вырабатывающая целенаправленное воздействие на все подсистемы КА с целью обеспечения его желательного функционирования;

– *среда информационного взаимодействия* (окружающая физическая среда или другие активные подвижные объекты);

– *возмущающая среда*, формирующая воздействие на систему, не зависящее от управляющей среды.

Для строгой постановки и конструктивного решения задач управления КА в первую очередь следует построить формальные, математические модели КА как объекта управления, т. е., в соответствии с вышеизложенным представлением его в виде информационного АПО, построить математические модели его подсистем: математическую модель движения, математическую модель бортовой аппаратуры, математическую модель бортового ресурса и математическую модель информационного взаимодействия с учетом существующей между ними взаимосвязи.

Отметим, что в настоящее время наиболее разработаны модели механического движения КА. Значительно меньшее внимание в современных космических исследованиях уделяется моделированию процессов информационного взаимодействия КА с окружающей физический средой и соответствующим задачам управления. Анализ отечественных и зарубежных публикаций (например, [1, 5, 25, 26] и др.) показывает, что математические модели указанных информационных процессов, к сожалению, до настоящего времени остаются за пределами внимания исследователей. Поэтому рассматриваемая в настоящей статье задача построения и исследования свойств математической модели информационной подсистемы КА как объекта управления представляется весьма актуальной как в теоретическом, так и в прикладном отношении.

Оставляя в стороне морфологический анализ разнообразия возможных вариантов математических моделей указанных составляющих общей модели КА как субъекта информационного взаимодействия с окружающей физической средой и их комбинаций и предполагая, что *возмущающие воздействия* на рассматриваемые информационные процессы *отсутствуют*, перейдем к построению математической модели основной составляющей КА как информационного АПО – подсистемы информационного взаимодействия, приняв относительно других компонентов ряд упрощающих предположений.

2. Общая двухмерная математическая модель информационного взаимодействия КА с областью на поверхности Земли. Примем следующие упрощающие предположения, сохраняющие, тем не менее, характерные математические черты и особенности функционирования КА как информационного АПО.

a) КА совершает *неуправляемый орбитальный полет* вокруг Земли. При этом будем предполагать, что гравитационное поле Земли является центральным и другие (возмущающие) силовые воздействия на КА отсутствуют.

b) *Информационное взаимодействие* с поверхностью Земли осуществляется с помощью одного прибора, жестко закрепленного в корпусе КА, так что соответствующая диаграмма направленности ИВ относительно корпуса КА *неподвижна*.

c) Ось диаграммы направленности в каждый рассматриваемый момент времени ориентирована строго по *местной вертикали* (направлена точно в подспутниковую точку), ошибка ориентации равна нулю (вариант *идеальной ориентации*).

d) Множество информационного взаимодействия представляет собой заданную *ограниченную замкнутую область* на поверхности Земли.

е) Запаздыванием информационных сигналов вследствие конечной скорости их распространения можно пренебречь.

Будем рассматривать исследуемые процессы информационного взаимодействия на некотором заданном интервале времени:

$$\sigma = [t_0, t_f] \subset [0, \infty),\ t_f > t_0, \tag{1}$$

где t_0 – начальный, t_f – конечный моменты времени.

При указанных выше допущениях центр масс КА в соответствии с законами Кеплера будет совершать плоское движение по эллиптической орбите, один из фокусов которой совпадает с центром Земли. Будем считать это движение заданным и представленным *кинематической моделью* вида:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in \sigma, \tag{2}$$

в которой $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий центр Земли с центром масс КА, а $\vec{r}(\cdot)$ – соответствующее заданное инъективное отображение: $\sigma \to R^3$ (рисунок 2). Будем рассматривать этот радиус-вектор в *относительной экваториальной геоцентрической декартовой системе координат*, которая жестко связана с Землей [13], представив его в координатном виде как:

$$\vec{r} = \left\| x_г \ y_г \ z_г \right\|^T, \tag{3}$$

где соответствующие координаты представляют собой непрерывно дифференцируемые функции времени, являющиеся по условиям рассматриваемой задачи заданными для всех значений $t \in \sigma$. При этом центр масс КА, которому на рисунке 2 соответствует точка A, перемещается из некоторого начального положения A_0 в конечное A_f. На рисунке 2 показана также трасса полета КА (геометрическое место подспутниковых точек A' пересечения радиус-вектора центра масс КА с поверхностью Земли) и ее отрезок $A'_0A'_f$, который отвечает рассматриваемому интервалу времени $\sigma = [t_0, t_f]$.

Перейдем теперь к рассмотрению множества информационного взаимодействия, которое представляет собой *ограниченную замкнутую область* на поверхности Земли, обозначенную на рисунке 2 через S. Отметим, что в выбранной системе координат эта область является неподвижной. Далее, обозначим суммарное количество информации, полученное от всех точек этого множества к моменту времени $t \in \sigma$, через $q(t)$. Изменение этого объема во времени определим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dq}{dt} = u^{(в)},\ q(t_0) = 0, \tag{4}$$

где $u^{(в)} = u^{(в)}(t)$ - интенсивность (скорость) информационного взаимодействия, рассматриваемая в дальнейшем как соответствующее управляющее воздействие.

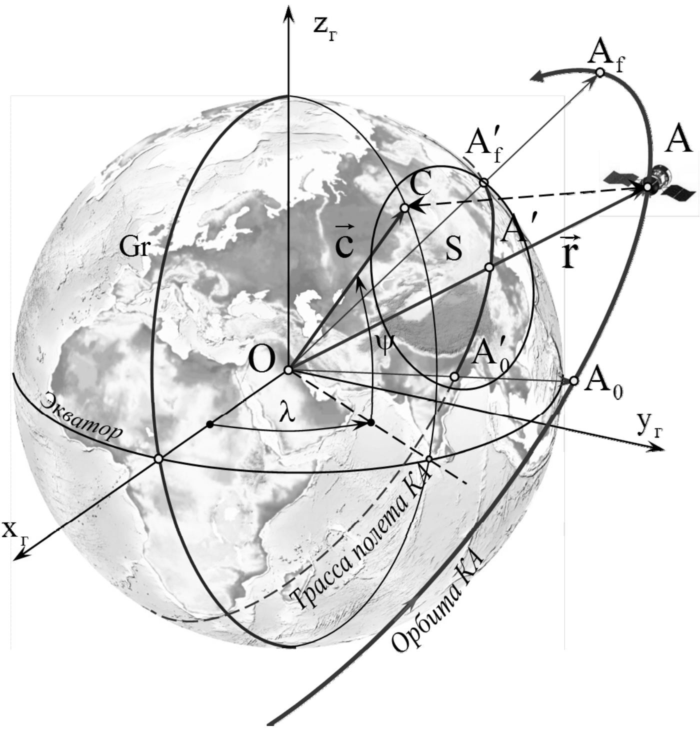

Рис. 2. Геометрическая иллюстрация информационного взаимодействия

Это уравнение описывает поступление информации от множества S в целом. Однако в прикладных задачах важно знать не столько общий объем полученной информации, сколько ее распределение по множеству S. Для характеристики этого распределения будем характеризовать положение каждой точки множества $C \in S$ радиус-вектором $\vec{c}$, соединяющим центр Земли с этой точкой. Рассмотрим бесконечно малый отрезок времени $[t, t+dt]$. Отвечающее этому отрезку времени количество информации $u^{(в)}(t)dt$ определенным образом распределяется по множеству S. Для характеристики этого распределения введем *ограниченную кусочно-непрерывную неотрицательную функцию распределения* $\mu_0(\vec{c}, \vec{r}, t)$, определенную для всех $C \in S$, $t \in \sigma$ и рассматриваемых значений вектора $\vec{r}$ и удовлетворяющую следующему условию нормировки: при любых допустимых значениях $\vec{r}, t$:

$$\iint\limits_S \mu_0(\vec{c}, \vec{r}, t) dS_C = 1, \tag{5}$$

где

$$\vec{c} = \left\| x_{Cг} \ y_{Cг} \ z_{Cг} \right\|^T, \tag{6}$$

$x_{Cг}, y_{Cг}, z_{Cг}$ – декартовы координаты точки C, а dS_C – элемент площади поверхности S в этой точке. Следует заметить, что именно эта функция определяет *диаграмму направленности информационного взаимодействия*.

С учетом функции распределения $\mu_0(\vec{c}, \vec{r}, t)$ на единицу площади dS_C за время dt придется количество информации, равное $\mu_0(\vec{c}, \vec{r}, t) dS_c \cdot u^{(в)} dt$, а в течение интервала времени $[t_0, t]$ это количество составит величину:

$$dq(C, t) = dS_C \int\limits_{t_0}^{t} \mu_0[\vec{c}, \vec{r}(\tau), \tau] u^{(в)}(\tau) d\tau, \tag{7}$$

так что *поверхностная плотность* накопленной к моменту времени t информации, отнесенная к точке C, будет равна:

$$\frac{dq(C, t)}{dS_C} = \int\limits_{t_0}^{t} \mu_0[\vec{c}, \vec{r}(\tau), \tau] u^{(в)}(\tau) d\tau. \tag{8}$$

Так как множество информационного взаимодействия в данном случае представляет собой область, лежащую на сферической поверхности Земли, то для характеристики положения точки C в пространстве удобно вместо декартовых координат $x_{Cг}, y_{Cг}, z_{Cг}$ использовать сферические координаты – географические долготу λ и широту ψ этой точки, в совокупности образующие двухмерный вектор:

$$\vec{\rho} = \|\lambda \ \psi\|^{T}. \tag{9}$$

В этом случае вектор $\vec{c}$ для любой точки $C \in S$ может быть представлен биекцией:

$$\vec{c} = \vec{k}_2(\vec{\rho}), \tag{10}$$

$$x_{Cг} = R_3 \cos\psi \cos\lambda, \ y_{Cг} = R_3 \cos\psi \sin\lambda, \ z_{Cг} = R_3 \sin\psi, \tag{11}$$

R_3 – радиус Земли. При этом область S взаимно однозначно отображается в область Q, расположенную в прямоугольнике $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ плоскости R^2 переменных λ и ψ. С учетом этого представим поверхностную плотность информации (8), отвечающую данным значениям $\vec{\rho}$ и t, в виде:

$$\gamma(\vec{\rho}, t) = \int_{t_0}^{t} M(\vec{\rho}, \tau) u^{(в)}(\tau) d\tau, \tag{12}$$

где $\vec{\rho} \in Q, \ t \in \sigma$, $\gamma(\vec{\rho}, t) = \dfrac{dq(C, t)}{dS_C}$, а

$$M(\vec{\rho}, \tau) = \mu_0[\vec{k}_2(\vec{\rho}), \vec{r}(\tau), \tau], \tag{13}$$

$\vec{k}_2(\vec{\rho})$ и $\vec{r}(\tau)$ – заданные функции своих аргументов.

Отметим, что из условия нормировки (5) следует, что для любого $t \in \sigma$:

$$\iint_Q \gamma(\vec{\rho}, t) b(\vec{\rho}) d\lambda d\psi = \int_{t_0}^{t} u^{(в)}(\tau) d\tau = q(t),$$

$$b(\vec{\rho}) = \sqrt{\det\left[\left(\frac{\partial \vec{k}_2}{\partial \vec{\rho}}\right)^{T} \left(\frac{\partial \vec{k}_2}{\partial \vec{\rho}}\right)\right]} = R_3^2 \cos\psi. \tag{14}$$

Функция $\gamma(\bullet,t):Q\to R^1$ для любого $t\in\sigma$ характеризует соответствующее текущее *состояние информационного взаимодействия*, или, более кратко, *информационное состояние*, эволюция которого (*движение*) под влиянием управляющего воздействия $u^{(в)}(t)$ полностью определяется соотношением (12), которое представляет собой динамическую модель подсистемы информационного взаимодействия.

Уравнение (12) является соответствующим *уравнением информационного состояния* в рассматриваемой задаче информационного взаимодействия КА с поверхностью Земли. С математической точки зрения оно представляет собой *линейный интегральный оператор* с ядром $M(\vec{\rho},\tau)$, которое определяется формулой (13). Аналитическое представление этого ядра имеет весьма сложный вид, однако, всегда можно указать алгоритм вычислений его значений, который может быть легко реализован на современных ЭВМ. Примеры таких алгоритмов приведены в работе [13].

Определенное таким образом *информационное состояние* является элементом функционального пространства вещественных функций, определенных на множестве Q. Обозначим это пространство через $X^{(в)}(Q)$ и будем называть его *пространством информационных состояний*. Движение рассматриваемой динамической системы (12) в этом пространстве можно представить в виде абстрактной функции:

$$x^{(в)}(t)=\gamma(\bullet,t). \tag{15}$$

Очевидно, что интегральное соотношение (12) эквивалентно дифференциальному уравнению в функциональном пространстве $X^{(в)}(Q)$ следующего вида:

$$\frac{dx^{(в)}}{dt}=\frac{\partial\gamma(\bullet,t)}{\partial t}=M(\bullet,t)u^{(в)}, \tag{16}$$

при начальном условии

$$x^{(в)}(t_0)=\gamma(\bullet,t_0)=0. \tag{17}$$

Чтобы завершить построение рассматриваемой математической модели, определим соответствующий класс допустимых управляющих воздействий следующим соотношением:

$$U_\sigma^{(в)}=\left\{u_\sigma^{(в)}=u^{(в)}(\bullet):\sigma\to R^1\,\middle|\,(\forall\tau\in\sigma)(0\le u^{(в)}\le a);S_u^{(в)}\right\}, \tag{18}$$

где a – заданное положительное число (максимальная интенсивность взаимодействия), $S_u^{(в)}$ – теоретико-функциональные условия, накладываемые на управляющее воздействие (непрерывность, кусочная непрерывность, измеримость по Лебегу и т. п.)

Будем называть построенную математическую модель процесса информационного взаимодействия (12)–(18) *общей двухмерной моделью информационного взаимодействия* КА *с областью на поверхности Земли*. Основная особенность этой модели заключается в том, что, как уже отмечалось, пространство состояний $X^{(в)}(Q)$, в котором рассматривается исследуемый информационный процесс, является функциональным, бесконечномерным. Это обстоятельство требует для анализа соответствующих процессов целевого функционирования КА привлечения соответствующих понятий и методов функционального анализа. Рассмотрим кратко основные результаты подобного исследования (более подробно см. в [13]).

3. Основные свойства двухмерной динамической модели информационного взаимодействия КА с областью на поверхности Земли (качественный анализ). Исследуем основные свойства построенной выше двухмерной математической модели процесса информационного взаимодействия. Рассмотрим *два аспекта* соответствующего качественного анализа.

3.1. Множество информационной достижимости и его топологическая характеристика. Рассмотрим множество элементов пространства информационных состояний, отвечающее классу допустимых управлений (18) и определяемое выражением:

$$G(U_\sigma^{(в)}, t_1) = \left\{ x^{(в)}(t_1) \,\middle|\, x^{(в)}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} M(\bullet, \tau) u^{(в)}(\tau) d\tau; u^{(в)}(\bullet) \in U_\sigma^{(в)} \right\}, \quad (19)$$

т. е. множество, которое образовано *всеми* состояниями в пространстве информационных состояний $X^{(в)}(Q)$, которые могут быть достигнуты из нулевого начального состояния к моменту времени $t_1 \in \sigma$ при использовании *всех* допустимых управлений из класса $U_\sigma^{(в)}$. Будем называть это множество *множеством достижимости в пространстве информационных состояний* или, более кратко, *множеством информационной достижимости*. Исследуем основные свойства этого множества, рассмотрев следующие *три* вопроса.

а) Топологическая структура класса допустимых управлений.

Рассмотрим *класс допустимых управлений* (18), полагая, что теоретико-функциональное условие $S_u^{(в)}$ есть условие измеримости по Лебегу. Введем в этом классе метрическую топологию путем погружения его в гильбертово функциональное пространство $L^2(\sigma)$ всех измеримых вещественных функций, определенных и суммируемых с квадратом модуля на интервале σ. Из определения класса допустимых управлений $U_\sigma^{(в)}$ следует, что этот класс в соответствующей $L^2(\sigma)$-топологии, т. е. в метрике, порожденной нормой:

$$\|u_\sigma\|_{L^2} = \left\{ \int_{t_0}^{t_f} |u(\tau)|^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

(далее все интегралы понимаются в смысле Лебега) является *ограниченным* и *замкнутым*. Так как множество $[0, a]$ выпукло, то класс $U_\sigma^{(в)}$ также является *выпуклым*, а это, в силу теоремы Мазура (стр. 59 [2], стр.113 [22]), влечет за собой *замкнутость* $U_\sigma^{(в)}$ *и в слабой* $L^2(\sigma)$-*топологии*. Далее, так как класс $U_\sigma^{(в)}$ ограничен в метрической топологии, то вследствие рефлексивности $L^2(\sigma)$ он *относительно слабо компактен* ([4], стр. 81), а, следовательно, является *компактом в слабой* $L^2(\sigma)$ - *топологии*([4], стр. 461).

Таким образом, рассматриваемый *класс допустимых управлений* представляет собой *выпуклый слабый компакт* в функциональном пространстве $L^2(\sigma)$.

b) Свойства интегрального оператора в уравнении информационного состояния.

Из уравнения информационного взаимодействия (12) следует, что информационное состояние, достигнутое в момент времени t_1 является результатом преобразования соответствующего допустимого управляющего воздействия с помощью *линейного интегрального оператора Фредгольма:*

$$\gamma(\vec{\rho}, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} M(\vec{\rho}, \tau) u^{(в)}(\tau) d\tau, \tag{21}$$

с ядром $M(\vec{\rho},\tau)$, а *множество информационной достижимости* (19) является образом *класса допустимых управлений* при соответствующем отображении: $U_{\sigma}^{(в)} \to X^{(в)}(Q)$. Рассмотрим основные свойства этого оператора.

С этой целью уточним математическую структуру пространства состояний $X^{(в)}(Q)$, а именно, будем рассматривать его как функциональное пространство, образованное всеми измеримыми по Лебегу вещественными функциями векторного аргумента $f(\vec{\rho})$, определенными на Q (напомним, что Q ограниченное и замкнутое множество в R^2, т. е. компакт), суммируемыми с квадратом модуля. В этом случае $X^{(в)}(Q)$ становится гильбертовым пространством $L^2(Q)$, метрика в котором порождена соответствующей квадратичной нормой (здесь $m(\cdot)$ – мера Лебега на плоскости):

$$\|f(\cdot)\|_{L^2(Q)} = \left\{\iint\limits_{Q} |f(\vec{\rho})|^2 \, dm(\vec{\rho})\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

При принятых выше предположениях относительно функции $\mu_0(\vec{c},\vec{r},t)$ ядро интегрального оператора $M(\vec{\rho},\tau)$ является ограниченным и кусочно-непрерывным на $Q\times\sigma \subset R^3$. Последнее означает, что существует такое конечное разбиение $Q\times\sigma$ на k дизъюнктных односвязных подмножеств $B_i \subset Q\times\sigma$, т.е. удовлетворяющих условиям:

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = Q\times\sigma,\ B_i \cap B_j = \varnothing \text{ при } i \neq j,\ i,j=1,...,k, \qquad (23)$$

что при этом функция $M(\vec{\rho},\tau)$ непрерывна во всех внутренних точках множеств B_i. При этом функция $M(\vec{\rho},\tau)$ измерима на $Q\times\sigma$ по Лебегу (как функция, непрерывная почти всюду на этом множестве), а так как она ограничена, то и интегрируема с квадратом модуля.

Отсюда следует ([22], стр. 324, 419), что рассматриваемый интегральный оператор Фредгольма (21), действующий из $L^2(\sigma)$ в $L^2(Q)$, является *вполне непрерывным*, а, следовательно, вследствие линейности и *усиленно непрерывным* ([2], стр. 61) (т. е. преобразующим всякую слабо сходящуюся последовательность из $L^p(\sigma)$ в сильно сходящуюся в $L^2(Q)$).

<u>*c) Топологическая структура множества информационной достижимости.*</u>

Из вышеизложенного следует, что, так как класс допустимых управлений $U_\sigma^{(в)}$ является *выпуклым и компактным* в слабой $L^2(\sigma)$ - топологии, то *множество информационной достижимости* $G\left(U_\sigma^{(в)}, t_1\right)$ как его *усиленно непрерывный линейный образ* выпуклого слабого компакта является *выпуклым компактом в гильбертовом пространстве* $L^2(Q)$. При этом с ростом t_1 это множество расширяется (можно показать, что это происходит непрерывно по t_1). Отсюда, в частности, следует, что в указанной топологии оно является *ограниченным и замкнутым*.

3.2. Проблема управляемости динамической системы информационного взаимодействия. Рассмотрим теперь вопрос об *управляемости* (в смысле Калмана [21]) динамической системы информационного взаимодействия, движение которой в пространстве информационных состояний $X^{(в)}(Q)$ задано интегральным оператором (12). С этой целью, следуя Калману, несколько ослабим ограничения на допустимые управляющие воздействия, а именно, вместо класса $U_\sigma^{(в)}$ рассмотрим более широкий класс:

$$\tilde{U}_\sigma^{(в)} = \left\{u_\sigma^{(в)} = u^{(в)}(\bullet) : \sigma \to R^1 \middle| (\forall\tau \in \sigma)(u^{(в)} \geq 0); S_u^{(в)}\right\}, \tag{24}$$

который включает измеримые по Лебегу неотрицательные и ограниченные почти всюду на σ функции $u_\sigma^{(в)} : \sigma \to R^1$. Рассмотрим некоторое заданное принадлежащее конусу неотрицательных элементов $L^2(Q)$ информационное состояние:

$$x_3^{(в)} = f_3(\bullet) \in X^{(в)}(Q), \tag{25}$$

где $f_3(\bullet)$ – некоторая заданная функция $Q \to R^1$ и будем говорить, что система (12) *управляема относительно этого состояния*, если в указанном расширенном классе допустимых управлений $\tilde{U}_\sigma^{(в)}$ существует управление, удовлетворяющее уравнению:

$$\int_{t_0}^{t_f} M(\vec{\rho},\tau)u^{(\text{в})}(\tau)d\tau = f_3(\vec{\rho}),\ \vec{\rho}\in Q\subset R^2, \quad (26)$$

которое является *линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода* относительно $u^{(\text{в})}(\tau)$. Если такое управление существует для *любого* неотрицательного $x_3^{(\text{в})} = f_3(\cdot)$, то будем называть систему (12) *полностью управляемой.*

Таким образом, исследование управляемости в данном случае тесно связано с анализом разрешимости интегрального уравнения (26) относительно функции $u^{(\text{в})}(\cdot)\in \tilde{U}_\sigma^{(\text{в})}$. К сожалению, оператор (12) не является сюръективным и поэтому интегральное уравнение (26) при некоторых функциях $f_3(\vec{\rho})$ оказывается неразрешимым [3]. Это означает, что в общем случае ответ на вопрос о *полной управляемости* для рассматриваемого процесса управления информационным взаимодействием оказывается *отрицательным*. Для некоторых финальных функций $f_3(\vec{\rho})$ решение может существовать, т. е. имеет место *частичная управляемость* – соответствующая краевая задача для некоторых финальных состояний может быть разрешимой. Однако выяснение вопроса о том, для каких $f_3(\vec{\rho})$ решение существует, а для каких нет, а также практическое нахождение в последнем случае соответствующего управляющего воздействия представляет собой весьма сложную математическую задачу. Один из возможных методов ее исследования и нахождения соответствующего управления методом Пикара в виде бесконечного ряда приведен в работе [13].

Следует отметить, что даже в тех случаях, когда решение уравнения (26) существует и единственно, сколь угодно малое изменение функции $f_3(\vec{\rho})$ может привести к существенным изменениям решения, и даже сделать его несуществующим. В подобных случаях говорят, что исследуемая задача является некорректно поставленной [3]. Таким нежелательным свойством обладает и рассматриваемое интегральное уравнение Фредгольма первого рода. В настоящее время разработан ряд методов решения некорректных задач, которые позволяют при определенных условиях преодолеть трудности, свойственные некорректно поставленным задачам, в том числе и задаче нахождения решения интегрального уравнения (26).

Вместе с тем, отметим, что проведенный выше качественный анализ топологической структуры множеств информационной достижимости (19) позволяет сделать крайне важный в прикладном отношении вывод о существовании *приближенного решения уравнения* (26). Так как множество информационной достижимости *выпукло* и *компактно* в $L^2(Q)$, то в нем для любого заданного элемента $f_3(\bullet) \in L^2(Q)$ существует *единственное* достижимое информационное состояние, определяемое оператором (12), которое либо совпадает с $f_3(\bullet)$, либо является "ближайшим" к нему в метрике $L^2(Q)$. Отсюда следует, что в классе $U_\sigma^{(в)}$ *существует* и соответствующее управление (возможно, не единственное), *оптимальное в смысле абсолютного минимума функционала,* характеризующего «расстояние» в метрике $L^2(Q)$ между заданным и достижимыми состояниями:

$$J(u_\sigma^{(в)}) = \left\| \int_{t_0}^{t_f} M(\bullet, \tau) u^{(в)}(\tau) d\tau - f_3(\bullet) \right\|_{L^2(Q)} . \qquad (27)$$

Таким образом, доказано, что решение задачи наилучшей в метрической топологии $L^2(Q)$ аппроксимации решения уравнения (26), т. е. задачи нахождения наилучшего среднеквадратичного приближения достигаемого информационного состояния к заданному (решения соответствующей задачи оптимального терминального управления) при указанных выше предположениях *существует*. Достигаемый при этом минимум функционала (27), очевидно, будет монотонно невозрастающей функцией от значения максимальной интенсивности взаимодействия – константы a в определении класса допустимых управлений (18).

4. Математическая модель информационного взаимодействия КА с дискретной средой на поверхности Земли. В ряде прикладных задач множество информационного взаимодействия S можно считать конечным, представив его в виде совокупности (может быть, весьма большой, но конечной) заданных точек на поверхности Земли. В этом случае рассматриваемая модель информационного взаимодействия (12) существенно упрощается. В самом деле, если множество S конечно, то множество Q в плоскости переменных λ и ψ можно представить в виде $Q = \{\vec{a}_i\}$, где $\vec{a}_i, i = 1,...,n$ — заданные векторы, принимающие значения из прямоугольника $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. В этом случае указанная модель приобретает следующий более простой вид:

$$\gamma(\vec{a}_i, t) = \int_{t_0}^{t} M(\vec{a}_i, \tau) u^{(в)}(\tau) d\tau, \ i = 1, ..., n, \tag{28}$$

или, в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \gamma(\vec{a}_i, t)}{\partial t} = M(\vec{a}_i, t) u^{(в)}, \ \ \gamma(\vec{a}_i, t_0) = 0, \ \ i = 1, ..., n, \tag{29}$$

так что текущее информационное состояние здесь характеризуется не функцией координат, а конечным набором n вещественных чисел. Это означает, что пространство состояний $X^{(в)}(Q)$ при этом оказывается не функциональным, а конечномерным ($X^{(в)}(Q) = R^n$), что приводит к значительному упрощению модели (вследствие перехода к конечномерной топологии) и позволяет применить для ее исследования хорошо разработанные методы теории конечномерных дифференциальных динамических систем. Вместе с тем, следует отметить, что модель вида (28) может быть полезна и при исследовании континуальной модели вида (12), если рассматривать ее как конечномерную аппроксимацию последней. В этом случае в качестве конечного множества $\{\vec{a}_i\}$ можно выбрать так называемую ε-сеть континуального множества Q, которая для любого заданного $\varepsilon > 0$ определяется как конечное подмножество $Q_\varepsilon \subset Q$, удовлетворяющее условию:

$$(\forall \vec{\rho} \in Q)(\exists \vec{a} \in Q_\varepsilon)(|\vec{\rho} - \vec{a}| < \varepsilon). \tag{30}$$

Так как множество Qкомпактно, то такая аппроксимирующая сеть всегда может быть построена. Конечно, полученное таким образом решение исходной континуальной задачи будет приближенным, и вопрос о его точности требует специального исследования (особенно с учетом того, что континуальная модель (12) приводит к некорректно поставленным задачам, что уже отмечалось выше).

Класс допустимых управлений будем по-прежнему определять формулой (18). Построенную таким образом математическую модель (28), (29), (18) будем называть *моделью информационного взаимодействия КА с дискретной средой на поверхности Земли.*

Рассмотрим соответствующие конечномерные уравнения более подробно. Будем считать начальное состояние нулевым и зададим требуемое финальное информационное состояние (краевые условия на правом конце траектории в пространстве состояний) в виде:

$$\gamma(\vec{a}_i, t_f) = f_{3i} = f_3(\vec{a}_i), \quad i=1,...,n, \tag{31}$$

где $\vec{a}_i$ – заданные точки множества Q, а f_{3i} – заданные положительные числа, характеризующие финальное состояние взаимодействия. Введем обозначения:

$$z_i = \gamma(\vec{a}_i, t), \quad z_{3i} = f_3(\vec{a}_i), \quad i=1,...,n, \tag{32}$$

и рассмотрим соответствующие n-мерные вектор-столбцы:

$$\vec{z} = \left\| z_1 ... z_n \right\|^T, \quad \vec{z}_3 = \left\| z_{31} ... z_{3n} \right\|^T. \tag{33}$$

В этом случае уравнение состояния информационного взаимодействия приобретает следующий вид:

– в интегральной форме (исходя из (28)):

$$\vec{z}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{b}(\tau) u^{(в)}(\tau) d\tau. \tag{34}$$

– в дифференциальной форме (исходя из (29)):

$$\dot{\vec{z}} = \vec{b}(t) u^{(в)}, \quad \vec{z}(t_0) = \vec{0}, \tag{35}$$

где $\vec{b}(t)$ – заданная неотрицательная n-мерная векторная функция, определенная на интервале времени $\sigma = [t_0, t_f]$. соотношениями:

$$\vec{b}(t) = \left\| b_1(t) ... b_n(t) \right\|^T, \ b_i(t) = M(\vec{a}_i, t), \ i=1,...n. \tag{36}$$

В этом случае исследование *множества информационной достижимости:*

$$G(U_\sigma^{(в)}, t_1) = \left\{ \vec{z}(t_1) \middle| \vec{z}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{b}(\tau) u^{(в)}(\tau) d\tau; \ u^{(в)}(\bullet) \in U_\sigma^{(в)} \right\} \subset R^n, \tag{37}$$

существенно упрощается. Известно, что, если элементы вектора $\vec{b}(t)$ суть ограниченные кусочно-непрерывные функции, определенные на σ, то (см., напр., [24], стр. 78) множество достижимости $G\left(U_\sigma^{(в)}, t_1\right)$ является *ограниченным, замкнутым и выпуклым* и при этом непрерывно зависит от t_1.

Конечномерный характер уравнений (35) позволяет дать исчерпывающий ответ и на вопрос об *управляемости* соответствующей модели информационного взаимодействия с дискретной средой, т. е. о существовании в расширенном классе управлений $\tilde{U}_{\sigma}^{(в)}$ (24) управляющего воздействия, удовлетворяющего уравнению:

$$\int_{t_0}^{t_f} \vec{b}(\tau) u^{(в)}(\tau) d\tau = \vec{z}_з, \qquad (38)$$

являющемуся дискретным аналогом интегрального уравнения (26). Сформулируем соответствующие критерии полной управляемости (как известно, линейная дифференциальная система может быть либо полностью управляемой, либо полностью неуправляемой): для того, чтобы для любого конечного t_f и любого ограниченного неотрицательного вектора $\vec{z}_з \in R^n$ существовало управление $u_{\sigma} \in \tilde{U}_{\sigma}^{(в)}$, переводящее систему (35) из нулевого начального состояния в состояние $\vec{z}_з$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий [21]:

Интегральный критерий полной управляемости:

$$\det K(t_0, t_f) \neq 0,\ K(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \vec{b}(\tau) \vec{b}^T(\tau) d\tau, \qquad (39)$$

(указанный определитель называется определителем Грама для функций $b_1(t),...,b_n(t)$, он отличен от нуля тогда и только тогда, когда эти функции линейно независимы (т. е. не существует такого ненулевого вектора $\vec{a} \in R^n$, что $\vec{a}^T \vec{b}(t) \equiv 0$), при этом квадратная матрица $K(t_0, t_f)$ является симметричной и положительно-определенной);

Дифференциальный критерий полной управляемости:
существует такое $\tau \geq t_0$, что:

$$\operatorname{rang} \left\| S_1(\tau) ... S_n(\tau) \right\| = n, \qquad (40)$$

где

$$S_1(t) = \vec{b}(t), S_{i+1} = -\dot{S}_i, i = 1, ..., n-1, \qquad (41)$$

(здесь предполагается, что векторная функция $\vec{b}(t)$ имеет, по крайней мере, $n-1$ непрерывную производную).

Отметим, что если система (35) полностью управляема, то соответствующее управление, переводящее ее из нулевого начального состояния в заданное состояние $\vec{z}_3$ на интервале времени σ, имеет следующий вид:

$$u^{(в)}(\tau) = \vec{b}^{T}(\tau) K^{-1}(t_0, t_f) \vec{z}_3. \tag{42}$$

В справедливости соотношения (42) легко убедиться прямой подстановкой (42) в (38) с учетом условия полной управляемости (39).

Соответствующий (42) алгоритм вычисления программного управления, обеспечивающего выполнение заданных краевых условий, весьма прост. Для определения $u^{(в)}(\tau)$ в данном случае необходимо вычислить $(n \times n)$- матрицу $K(t_0, t_f)$, найти ее детерминант (определитель Грама) и, если он не равен нулю, вычислить обратную к ней матрицу $K^{-1}(t_0, t_f)$, и, наконец, получить искомое управление как скалярное произведение векторной функции $\vec{b}(t)$ на постоянный вектор, равный $K^{-1}(t_0, t_f)\vec{z}_3$. Полученное таким образом решение краевой задачи (38), очевидно, не является единственным, однако, оно обладает замечательным свойством – в сравнении со всеми другими решениями уравнения (38) оно имеет наименьшую норму в пространстве функций, интегрируемых с квадратом [23], т. е. одновременно с выполнением условия (39) доставляет минимум функционалу:

$$\left\| u_{\sigma}^{(в)} \right\|^2 = \int_{t_0}^{t_f} [u^{(в)}(\tau)]^2 d\tau. \tag{43}$$

5. Заключение. Построение адекватных и корректных математических моделей КА как активного подвижного объекта является основой успешного исследования процессов целевого функционирования КА с точки зрения *четырех фундаментальных проблем системных исследований* – проблем моделирования, анализа свойств, наблюдения (по Калману) и проблемы выбора (параметров или управляющего воздействия) в условиях различных возмущений [6,11,15]. Концептуальная системно-кибернетическая трактовка КА как активного подвижного объекта отражает наиболее существенные стороны его функционирования в космическом полете, а соответствующие математические модели КА характеризуют его как сложную неоднородную динамическую систему, в составе которой центральное место занимает подсистема информационного взаимодействия с окружающей физической средой. В настоящей статье предложены два варианта математического описания этой подсистемы, которые могут быть использованы при постановке и решении соответствующих задач оптимального управления космическими аппаратами, лежащих в основе современной космической кибернетики.

Литература

1. Всероссийская открытая конференция “Современные проблемы дистанционного зондирования Земли” (10-12.11.2012) // ИКИ РАН. 2013. 80 с.
2. *Вайнберг М.М.* Функциональный анализ // М.: Просвещение, 1979. 128 с.
3. *Васильева А.Б., Тихонов А.Н.* Интегральные уравнения // М.: Физматлит, 2002. 160 с.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.,* Линейные операторы. Общая теория // М.: Изд. иностр. лит. 1962. Ч. 1. 895 с.
5. Журнал “Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса”. 2004-2014. URL: http://jr.rse.cosmos.ru.
6. *Калинин В.Н.* Морфологический анализ проблематики системных исследований // Труды СПИИРАН. 2013. Вып. 1(24). С. 89–107.
7. *Калинин В.Н.* О задачах оптимального управления активным подвижным объектом // Динамика систем: сб. Горький, 1975. Вып.8. С.99–108.
8. *Калинин В.Н.* О задаче оптимального управления активными подвижными объектами // Дифференциальные уравнения. 1981. № 12. С.2136–2143.
9. *Калинин В.Н.* О теории управления активными подвижными объектами // Известия вузов. Приборостроение. 1981. № 6. С.26–31.
10. *Калинин В.Н.* Современная космическая кибернетика – методологические основы и направления исследований // Информация и космос. 2007. № 3. С.7–16.
11. *Калинин В.Н.* Теоретические основы системных исследований: авторский курс // СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского. 2011. 2013. 280 с.
12. *Калинин В.Н.* Теоретические основы управления активными подвижными объектами // Министерство обороны СССР. 1974. 130 с.
13. *Калинин В.Н.* Теоретические основы управления космическим аппаратом на основе концепции активного подвижного объекта // СПб.: ВИКУ им. А.Ф. Можайского. 1999. 190 с.
14. *Калинин В.Н.* Теоретические основы управления подвижными объектами и операциями их обслуживания // Л.: ВИКИ им. А.Ф. Можайского. 1989. 224 с.
15. *Калинин В.Н.* Четыре фундаментальные проблемы системных исследований // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2012. Вып. 633. С.62–73.
16. *Калинин В.Н., Култашёв С.Б.* Состояние информационного взаимодействия первого рода активного подвижного объекта // Известия вузов. Приборостроение. 1987. № 2. С.12–16.
17. *Калинин В.Н., Охтилев М.Ю., Соколов Б.В.* Мультиагентная интерпретация концепции активного подвижного объекта // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2011. № 1. С.122–126.
18. *Калинин В.Н., Соколов Б.В.* Динамическая модель процесса переналадки приборов активного подвижного объекта // Дифференциальные уравнения. 1987. №9. С. 1626–1629.
19. *Калинин В.Н., Соколов Б.В.* Многомодельное описание процессов управления космическими средствами // Теория и системы управления. 1995. №1. С.149–156.
20. *Калинин В.Н., Соколов Б.В.* Оптимальное планирование процесса взаимодействия активных подвижных объектов // Дифференциальные уравнения. 1985. №5. С. 752–757.

21. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем // М.: Мир, 1971. 300 с.
22. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ // М.: Наука, 1977. 764 с.
23. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением // М.: Наука, 1971. 476 с.
24. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления // М.: Наука, 1972. 574 с.
25. Тезисы докладов Второй международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы создания космических систем дистанционного зондирования Земли” (15.05.2014) // М.:ОАО “Корпорация ”ВНИИЭМ”. 2014. 143 с.
26. 19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace. September 2–6, 2013. Wurzburg, Germany. URL: http://www.ifac-papersonline.net/Automatic Control in Aerospace/19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace 2013 /rss.html.

References

1. *Vserossijskaja otkrytaja konferecija “Sovremennye problem distantsionnogo zondirovaniya Zemli”* [The All-Russia open conference “Modern problems of remote sounding of the Earth”] (10-12.11.2012), Space Research Institute the RAS. 2013. 80 p. (In Russ).
2. Vajnberg M.M. *Funkcional'nyj analiz* [Functional analysis]. M.: Prosveshhenie, 1979. 128 p. (In Russ.).
3. Vasilyeva A.B. Tikhonov A.N. *Integral'nye uravnenija* [Integrated equations]. M.: Fizmatlit, 2002. 160 p. (In Russ.).
4. Danford N., Shvarc Dzh. *Linejnye operatory. Obshhaja teorija* [Linear operators. Generaltheory]. M.: Izd. inostr. lit., 1962. Part 1. 895 p. (In Russ.).
5. Zhurnal “Sovremennye problem distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa” [Journal “Current problems in remote sensing of the earth from space”]. 2004–2014. Space Research Institute RAS. (In Russ). Available at: http://jr.rse.cosmos.ru. (In Russ.).
6. Kalinin V.N. [Morphological analysis of a perspective of system researches]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2013. vol. 1(24). pp. 89–107. (In Russ.).
7. Kalinin V.N. [About problems of optimum control of active mobile object]. *Dinamika system – Dynamics of systems*. Gor'kij. 1975. Issue 8. pp. 99–108. (In Russ.).
8. Kalinin V.N. [About a problem of optimum control of active mobile objects]. *Differencial'nye uravnenija – Differential equations*. 1981. no. 12. pp. 2136–2143. (In Russ.).
9. Kalinin V.N. [About the theory of management of active mobile objects]. *Izv. vyssh. uchebn. zavedenij: Priborostroenie – Proceedings of the higher educational institution: Instrumentation*. 1981. no. 6. pp. 26–31. (In Russ.).
10. Kalinin V.N. [Modern space cybernetics – methodological bases and the directions of researches]. *Informacija i kosmos — Information and space.* 2007. no 3. pp. 7–16. (In Russ.).
11. Kalinin V.N. *Teoreticheskie osnovy sistemnyh issledovanij: avtorskij kurs* [Theoretical bases of system researches: author's course]. SPb.: VKA im. A.F. Mozhajskogo, 2011, 2013. 280 p. (In Russ.).
12. Kalinin V.N. *Teoreticheskie osnovy upravlenija aktivnymi podvizhnymi ob’ektami* [Theoretical bases of management of active mobile objects]. Ministerstvo oborony USSR. 1974. 130 p. (In Russ.).
13. Kalinin V.N. *Teoreticheskie osnovy upravlenija kosmicheskim apparatom na osnove koncepcii aktivnogo podvizhnogo ob’ekta* [Theoretical bases of management of the spacecraft on the basis of the active mobile object concept]. SPb.:VIKUim. A.F. Mozhajskogo, 1999. 190 p. (In Russ.).
14. Kalinin V.N. *Teoreticheskie osnovy upravlenija podvizhnymi ob’ektami i operacijami ih obsluzhivanija* [Theoretical bases of management of mobile objects and operations of their service]. L.: VIKI im. A.F. Mozhajskogo, 1989. 224 p. (In Russ.).

15. Kalinin V.N. [Four fundamental problems of system researches]. *Trudy Voenno-kosmicheskoj akademii imeni A.F. Mozhajskogo – Proceedings of the Military-space academy named after A.F. Mozhajskiy*. SPb.: VKAim. A.F. Mozhajskogo. 2012. vol. 633. pp.62–73. (In Russ.).
16. Kalinin V.N., Kultashjov S.B. [Condition of information exchange of the first sort of active mobile object]. *Izv. vyssh. uchebn. zavedenij: Priborostroenie – Proceedings of the higher educational institution: Instrumentation*. 1987. no. 2. pp. 12–16. (In Russ.).
17. Kalinin V.N., Okhtilev M.Ju., Sokolov B.V. [Multiagentnaya interpretation of the concept of active mobile object]. *Izvestija Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAS – News of the Kabardino-Balkarian Russian Academy of Sciences scientific center*. 2011. no. 1. pp. 122–126. (In Russ.).
18. Kalinin V.N., Sokolov B.V. [Dynamic model of process of readjustment of devices of active mobile object] *Differencial'nye uravnenija – Differential equations*. 1987. no. 9. pp. 1626–1629. (In Russ.).
19. Kalinin V.N., Sokolov B.V. [Multimodel description of management of space means]. *Teorija I sistemy upravlenija – Theory and control systems*. 1995. no. 1. pp. 149–156. (In Russ.).
20. Kalinin V.N., Sokolov B.V. [Optimum planning of process of interaction of active mobile objects]. *Differencial'nye uravnenija – Differential equations*. 1985. no. 5. pp. 752–757. (In Russ.).
21. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Ocherki po matematicheskoj teorii system* [Book about the mathematical theory of systems]. M.: Mir. 1971. 300 p. (In Russ.).
22. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funkcional'nyj analiz* [Functional analysis]. M.: Nauka. 1977. 764 p. (In Russ.).
23. Krasovsky N.N. *Teorija upravlenija dvizheniem* [The theory of traffic control]. M.: Nauka. 1971. 476 p. (In Russ).
24. Li E.B. Markus L. *Osnovy teorii optimal'nogo upravlenija* [The basis of the theory of optimum control]. M.: Nauka. 1972. 574 p. (In Russ.).
25. *Tesisy dokladov Vtoroj mezhdunarodnoj nauchno-technicheskoj konferencii “Aktualnye problem sozdanij kosmicheskich system distantsionnogo zondirovaniya Zemli”* [Theses of reports of the Second international technological conference “Actual problems of creation of space systems of remote sounding of the Earth”] (15.05.2014). M.: Corporation" VNIIJeM ". 2014. 143 p. (In Russ).
26. 19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace. September 2–6, 2013. Wurzburg, Germany. Available at: http://www.ifac-papersonline.net/Automatic Control in Aerospace/19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace 2013 /rss.html.

Калинин Владимир Николаевич — д-р техн. наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ; профессор Военно-космической академии им. А.Ф.Можайского. Область научных интересов: теория системных исследований, космическая кибернетика и информатика, теория оптимального управления динамическими системами, автоматизированные системы управления, подготовка инженерных кадров и новые информационно-дидактические технологии в высшем образовании. Число научных публикаций — 170, kvn.112@mail.ru, ВКА им. А.Ф.Можайского, Ждановская ул., д.13, Санкт-Петербург, 197198; р. т. +7 (812) 347-9508.

Kalinin Vladimir Nikolaevich — Ph.D., Dr. Sci., professor, Honored Scientists of the Russian Federation; Professor of Military-space academy. Research interests: the theory of system researches, space cybernetics and computer science, the theory of optimum control of the dynamic systems, the automated control systems, preparation of the engineering staff and new information-didactic technologies in higher education. Number of scientific publications — 170, kvn.112@mail.ru, Military-space academy, Gdanovskaya str., 13, St. Petersburg, 197198; office phone +7 (812) 347-9508.

РЕФЕРАТ

Калинин В.Н. **Математическая модель информационного взаимодействия космического аппарата с поверхностью Земли.**

В статье рассматривается математическая модель информационного взаимодействия космического аппарата с ограниченной замкнутой областью на поверхности Земли. В основе построения модели лежит предложенная автором концепция активного подвижного объекта как сложной подвижной системы, предназначенной для информационного, энергетического или вещественного взаимодействия с окружающей физической средой или с другими подобными системами. При этом предполагается, что космический аппарат совершает неуправляемый полет по орбите вокруг Земли, информационное взаимодействие с областью на поверхности Земли осуществляется с помощью одного прибора, жестко закрепленного в корпусе космического аппарата, а ось соответствующей диаграммы направленности информационного взаимодействия ориентирована строго по местной вертикали.

Показано, что в этом случае модель информационного взаимодействия может быть представлена в виде интегрального оператора Фредгольма, отображающего класс допустимых управляющих воздействий в пространство информационных состояний. Под управляющим воздействием здесь понимается интенсивность (скорость) поступления информации, под информационным состоянием – распределение поверхностной плотности полученной информации по множеству информационного взаимодействия.

В классе допустимых управлений и пространстве информационных состояний вводится соответствующая топология гильбертова пространства измеримых по Лебегу и суммируемых с квадратом модуля вещественных функций. Сформулированы математические условия, при выполнении которых класс допустимых управлений представляет собой слабый выпуклый компакт, а оператор является вполне непрерывным, показано, что соответствующее множество информационной достижимости при этом выпукло и компактно в соответствующей метрической топологии.

Рассмотрен вопрос об управляемости построенной модели информационного взаимодействия, т. е. о возможности достижения заданного финального информационного состояния. Показано, что в общем случае ответ на этот вопрос связан с разрешимостью соответствующего интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода и является отрицательным. В связи с этим рассмотрена задача терминального управления, оптимального в смысле наименьшего отклонения достигнутого информационного состояния от заданного в соответствующей метрике, и доказано существование ее решения.

В статье приведен упрощенный вариант предложенной математической модели для случая информационного взаимодействия с дискретной средой (изолированными источниками информации). Исследована топологическая структура множеств достижимости и вопросы управляемости. Для класса допустимых управляющих воздействий, ограниченных почти всюду, предложен аналитический алгоритм соответствующего финитного управления.

SUMMARY

Kalinin V.N. **Mathematical model of informational interaction of the spacecraft with a surface of the Earth.**

In article the mathematical model of informational interaction of the spacecraft with the limited closed area on Earth surface is considered. In a basis of construction of the model is proposed by the author of the conception of active movable object as a complex movable system designed for the informational, energy or material interaction with the physical environment or with other similar systems. This assumes that the spacecraft makes unmanaged flight in the Earth orbit, informational interaction with the region on the surface of the Earth by using one device, rigidly fixed in the body of the spacecraft, and the axis corresponding to the pattern of informational interaction is focused strictly on the local vertical.

It is shown that in this case the model of informational interaction can be represented as the integral Fredholm operator, which displays a class of admissible control actions in the space informational states. Under the control action is understood here intensity (speed) of receipt of information, under informational state — distribution of superficial density of received information on a set of informational interaction.

In the class of admissible controls and space informational states is introduced corresponding topology of the Hilbert space of Lebesgue-measurable and summable with square module of real functions. Formulated mathematical conditions under which the class of admissible controls is a weak convex compact and the operator is completely continuous, it is proved that the corresponding lot of informational reachabilities convex compact in the corresponding metric topology.

Considered the question about the controllability built models of information interaction, i.e. the possibility of achieving a given final informational status. It is shown that in the general case, the answer to this question is connected with resolvability integral Fredholm equation of the 1-st kind and is negative. In this regard, considered appropriate terminal control problem, optimal in the sense of least deviation in the appropriate metrics, and prove the existence of its solution.

The article provides a simplified version of the proposed mathematical model for the case of information interaction with discrete environment (isolated sources of information).Investigated the topological structure of the relevant sets of reachability and controllability questions. For the class of admissible control actions bounded almost everywhere, an analytical algorithm corresponding finite control.