

О.И. СМОКТИЙ

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИРОДНЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ЗЕРКАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Смоктий О.И. Усовершенствование методов численного моделирования полей излучения природных сред на основе принципа зеркальной симметрии.

Аннотация. Фундаментальное свойство пространственно-угловой симметрии полей излучения плоского однородного слоя конечной оптической толщины используется для усовершенствования численно-аналитических методов и упрощения соответствующих алгоритмов классической теории переноса излучения. Вводится новое понятие этой теории (фотометрические инварианты), с помощью которого формулируется принцип зеркального отображения (симметрии) полей излучения природных сред. Для применения этого принципа модифицируется основная краевая задача теории переноса излучения для плоских однородных сред в терминах введенных величин. Упрощения алгоритмов численного моделирования скалярных полей излучения таких сред проведено для хорошо известных методов сферических гармоник, дискретных ординат, а также методов Гаусса-Зайделя, Кейза и Ханта-Гранта. Показано, что использование фотометрических инвариантов скалярных полей излучения существенно повышает эффективность их численного моделирования.

Ключевые слова: теория переноса излучения, принцип зеркального отображения, пространственно-угловая симметрия, фотометрические инварианты, краевая задача, ранг системы алгебраических уравнений, численно-аналитические методы, модификация алгоритмов.

Smokty O. I. Improvements of the Environment Radiation Fields Modeling Numerical Methods on the Basis of Mirror Symmetry Principle.

Abstract: Fundamental properties of the angular-spatial symmetry of radiation fields in the uniform slab of a finite optical thickness are used for improvement of the numerical methods and algorithms of the classical radiative transfer theory. A new notion of so called photometrical invariants is introduced. The basic boundary-value problem of the radiative transfer theory is reformulated in new terms for the subsequent simplification of algorithms of numerical modeling methods such as spherical harmonics, discrete ordinates, Gauss-Seidel, Case and Hunt-Grant methods. This simplification leads to two-fold decrease of the ranks of linear algebraic equations with simultaneous reduction of numerical modeling intervals connected with angular and spatial variables.

Keywords: mirror reflection principle, photometrical invariants, boundary-value problem, numerical algorithms, rank of linear equations system, iteration, spherical harmonics, discrete ordinates, Gauss-Seidel, Case and Hunt-Grant methods.

1. Введение. До недавнего времени численное моделирование пространственно-углового распределения скалярных полей излучения на границах и внутри плоского однородного слоя конечной оптической толщины τ_0 проводились в рамках традиционных представлений об их симметрии, используемых в классической теории многократного рассеяния фотонов [1–4]. При этом строгое разделение угловых переменных для интенсивностей восходящего и нисходящего

излучения, а также исследование их пространственно-углового распределения проводилось на уровне только одной произвольно выбранной, но фиксированной текущей оптической глубины τ [3]. В этом случае пространственно-угловая симметрия внутренних полей излучения протяженного однородного плоского слоя не рассматривалась вообще [1–4]. Это обусловлено тем, что для внутренних полей излучения известны только локальные свойства угловой симметрии, определяемые в элементарном объеме среды для такого важного оптического параметра, как индикатриса рассеяния $P(\cos\gamma)$, где γ - угол рассеяния. Поэтому суть нерешенной проблемы в этой области состоит в том, каким образом и на основе каких новых структурных элементов теории многократного рассеяния света распространить указанное выше локальное свойство угловой симметрии на всю протяженную среду. При традиционном подходе исключения составляют внешние границы плоского однородного слоя ($\tau=0$ и $\tau=\tau_0$), где угловая симметрия коэффициентов диффузного отражения ρ и пропускания σ определяется известной теоремой оптической обратимости (симметрии) радиационных полей при взаимной замене положений источника и приемника излучения [5]. Однако, как было впервые показано в [6], проблема пространственно-угловой симметрии внешних и внутренних полей излучения не ограничивается ее традиционным классическим рассмотрением [3]. Оказалось, что внутренние поля излучения в силу оптической однородности рассматриваемого плоского слоя обладают скрытым фундаментальным свойством пространственно-угловой (зеркальной) симметрии относительно его геометрической (оптической) оси симметрии ($\frac{1}{2}\tau_0$). В соответствии с принципом зеркального отображения (симметрии) полей скалярного и поляризованного излучения, сформулированным в [7–9], для выявления их латентных свойств необходимо ввести новые объекты теории переноса излучения – фотометрические инварианты – и исследовать в соответствии с этим принципом их пространственно-угловую структуру на симметричных уровнях τ и $(\tau_0 - \tau)$ в зеркальных направлениях визирования η и $-\eta$. При этом с математической точки зрения наличие введенных структур определяется только пространственной оптической однородностью плоского слоя и свойствами их зеркальной пространственно-угловой симметрии при линейных групповых преобразованиях типа сдвига по оптической глубине ($\tau \Rightarrow \tau_0 - \tau$) и вращения линии визирования ($\theta \Rightarrow \pi - \theta$). С физической точки зрения преимущество введения фотометрических инвариантов становится очевидным при симметризации внешних и внутренних первичных энергетических источников однородного слоя относительно его середины ($\frac{1}{2}\tau_0$). В частном случае внешних границ рассматриваемого слоя ($\tau=0$ и $\tau=\tau_0$) значение пространственной симметризации положений первичных

энергетических источников, например Солнца, продемонстрировано в [10].

Настоящая работа посвящена применению принципа зеркального отображения и использованию свойств пространственно-угловой (зеркальной) симметрии фотометрических инвариантов для усовершенствования алгоритмов и повышения эффективности методов численного моделирования скалярных полей излучения в плоском однородном слое конечной оптической толщины. В качестве примеров рассмотрены известные методы классической теории переноса излучения: методы сферических гармоник, дискретных ординат, Гаусса-Зайделя, Кейза и Ханта-Гранта [11].

2. Принцип зеркального отображения в теории переноса скалярного излучения. В качестве модели природной среды рассмотрим протяженный плоский однородный слой конечной оптической толщины τ_0 , в котором происходят процессы многократного рассеяния и истинного поглощения излучения (рисунок 1-А). Распределение и мощность первичных внешних и внутренних энергетических источников в среде будем считать произвольными. Обозначим через $I(\tau, \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0, \tau_0)$ интенсивность излучения на оптической глубине τ в направлении визирования $\theta = \arccos \eta$ при азимуте φ и угле $\theta_0 = \arccos \zeta$, отсчитываемом в направлении от первичного энергетического источника, например Солнца, к внешней нормали слоя в сторону его нижней границы ($\tau = \tau_0$). Азимут этого направления φ_0 будем считать равным нулю. Требуется найти на произвольной оптической глубине τ пространственно-угловое распределение интенсивности излучения $I(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ в слое, включая его верхнюю $\tau = 0$ и нижнюю $\tau = \tau_0$ границы. Для простоты последующего рассмотрения будем считать, что на уровне нижней границы ($\tau = \tau_0$) отсутствует отражающее дно. Данное ограничение не имеет принципиального значения, поскольку наличие отражающего дна можно учесть, если известно поле излучения при его отсутствии [3].

При традиционном рассмотрении поставленной выше задачи [1-3], как правило, фиксируется только один текущий оптический уровень τ с последующим определением функции источника $B(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ и интенсивности излучения $I(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ в восходящих ($\eta < 0$) и нисходящих ($\eta > 0$) направлениях визирования. При таком подходе структура пространственного и углового распределения внутренних полей излучения не позволяет непосредственно выявить скрытые свойства их зеркальной симметрии и установить соответствующие неявные соотношения инвариантности на произвольных оптических

глубинах τ . Для того, чтобы выявить наличие таких свойств и инвариантных соотношений, необходимо в соответствии с принципом зеркального отображения [7] "расщепить" в исходном поле излучения (рисунок 1-А) произвольно выбранный оптический уровень τ на два уровня, симметричных относительно середины однородного слоя ($\frac{1}{2}\tau_0$) и аналогичную операцию провести для поля излучения, зеркального по отношению к исходному (рисунок 1-В). Затем на каждом из полученных зеркально симметричных уровней $[\tau, (\tau_0 - \tau)]$ и $[\tau_*, (\tau_0 - \tau)_*]$ следует рассмотреть интенсивности восходящего и нисходящего излучения в зеркальных направлениях визуирования ($\eta, -\eta$) и ($\eta_*, -\eta_*$).

Объединяя далее исходное (А) и зеркальное (В) поля излучения в одно симметризованное поле излучения (рисунок 2), приходим к инвариантной трактовке проблемы пространственно-углового распределения исходного поля скалярного излучения в системе координат рисунку 1-А.

В результате указанного объединения вводятся новые базовые конструкции теории многократного рассеяния света – фотометрические инварианты $I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$, имеющие смысл псевдоинтенсивностей для исходного поля излучения [6]:

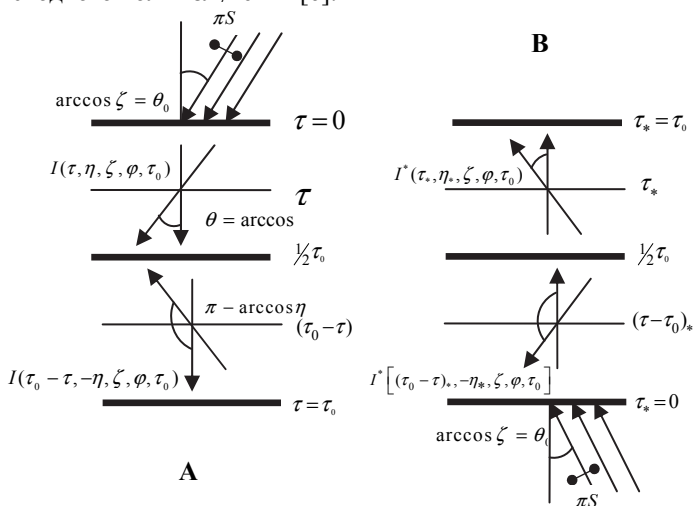


Рис. 1. Исходное (А) и зеркальное (В) поля излучения в плоском однородном слое конечной оптической толщины τ_0 .

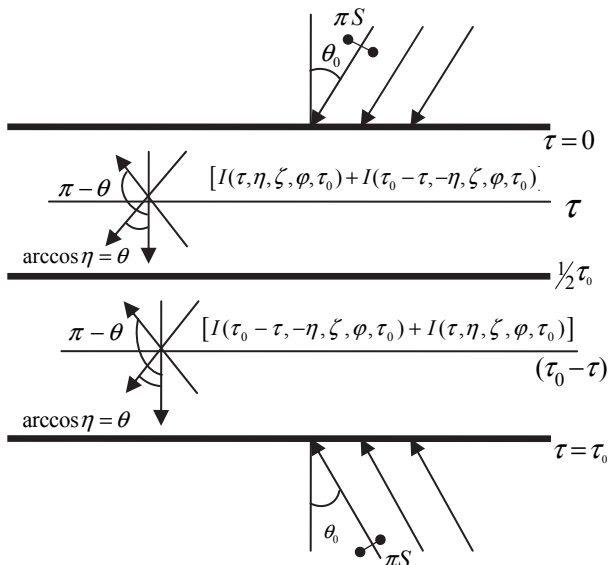


Рис. 2. Объединенное исходное (А) и зеркальное (В) поля скалярного излучения плоского однородного слоя конечной оптической толщины в системе координат рис.1-А.

В результате указанного объединения вводятся новые базовые конструкции теории многократного рассеяния света – фотометрические инварианты $I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$, имеющие смысл псевдоинтенсивностей для исходного поля излучения [6]:

$$I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = I(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) \pm I(\tau_0 - \tau, -\eta, \zeta, \varphi, \tau_0). \quad (1)$$

Построенные таким образом фотометрические величины (1) позволяют в явной математической форме выразить скрытое фундаментальное свойство пространственно-угловой симметрии внутренних полей излучения плоского однородного слоя конечной оптической толщины τ_0 . Именно, величина фотометрических инвариантов (1) не меняется, если два произвольных оптических уровня τ и $\tau = \tau_0$, зеркально-симметричных относительно середины слоя ($\frac{1}{2}\tau_0$), взаимно заменяются в них при одновременной замене исходного направления визирования η на зеркально-симметричное $-\eta$. Это основное содержание принципа зеркального отображения (симметрии) в теории переноса скалярного излучения, которое в математической форме выражается в виде следующего инвариантного соотношения:

$$I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = \pm I^\pm(\tau_0 - \tau, -\eta, \zeta, \varphi, \tau_0). \quad (2)$$

Таким образом, соотношение инвариантности (2) показывает, что симметризация оптических уровней, направлений визирования и положений первичных энергетических источников исходного поля излучения относительно оптического уровня ($\frac{1}{2}\tau_0$) эквивалентна группе линейных преобразований фотометрических инвариантов $I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ при пространственного сдвига по оптической глубине ($\tau \Rightarrow \tau_0 - \tau$) и угловом вращении направлений визирования ($\eta \Rightarrow -\eta$). Что касается формального физического содержания принципа зеркального отображения, то оно выражается в равенстве псевдоинтенсивностей $I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ в симметризованном поле излучения (рисунок 2) на одинаковых оптических расстояниях от середины слоя $\frac{1}{2}\tau_0$ в зеркальных направлениях визирования η и $-\eta$. В этом случае, на каждом фиксированном оптическом уровне τ псевдоинтенсивности $I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ равны соответственно сумме или разности интенсивностей исходного поля излучения $I(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ и его зеркального отображения $I^*(\tau_*, \eta_*, \zeta_*, \varphi_*, \tau_{0*})$:

$$I(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) \pm I^*(\tau_*, \eta_*, \zeta_*, \varphi_*, \tau_{0*}) = I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0), \quad (3)$$

где $\tau_* = \tau_0 - \tau$, $\eta_* = -\eta$, $\zeta_* = \zeta$, $\varphi_* = \varphi$, $\tau_{0*} = \tau_0$. Таким образом, в случае пространственной оптической однородности рассматриваемого слоя величина интенсивности I^* зеркального поля излучения может быть непосредственно выражена через соответствующую величину интенсивности исходного поля излучения с помощью следующего соотношения эквивалентности:

$$I^*(\tau_*, \eta_*, \zeta_*, \varphi_*, \tau_{0*}) = I(\tau_0 - \tau, -\eta, \zeta, \varphi, \tau_0). \quad (4)$$

При этом, если известны фотометрические инварианты $I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$, то соотношения (3)–(4) позволяют посредством находить интенсивности исходного поля излучения $I(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ в восходящих ($-\eta$) и нисходящих (η) направлениях визирования по формулам:

$$I(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = \frac{I^+(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) + I^-(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)}{2}. \quad (5)$$

$$I(\tau_0 - \tau, -\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = \frac{I^+(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) - I^-(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)}{2}. \quad (6)$$

Покажем теперь, как проведение линейных трансформаций ($\tau \Rightarrow \tau_0 - \tau$) и ($\eta \Rightarrow -\eta$) для фотометрических

инвариантов $I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ позволяет модифицировать основную краевую задачу теории переноса скалярного излучения и затем усовершенствовать ее численно-аналитические методы.

3. Симметризация основной краевой задачи теории переноса скалярного излучения. Традиционная форма основной краевой задачи для нахождения интенсивностей скалярного излучения $I(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ имеет вид [3]:

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)}{d\tau} = -I(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) + \frac{\Lambda}{4\pi} + \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 I(\tau, \eta', \zeta, \varphi - \varphi' \tau_0) P(\eta, \eta', \varphi') d\eta' + g(\tau, \eta, \varphi) \quad (7)$$

$$\tau \in [0, \tau_0], \quad \eta \in [-1, +1], \quad \zeta \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

при граничных условиях:

$$I(0, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = I(\tau_0, -\eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = 0, \quad \eta > 0. \quad (8)$$

Рассмотрим далее зеркально-симметричные уровни (τ, τ_*) и соответствующие направления визирования (η, η_*) , адекватные рис. 1 – В и принципу зеркального отображения (рисунок 2). Проводя указанные выше линейные преобразования $\tau \Rightarrow \tau_0 - \tau = \tau_*$ и $\eta \Rightarrow -\eta = \eta_*$, получаем для интенсивностей $I^*(\tau_*, \eta_*, \zeta_*, \varphi_*, \tau_{0,*})$ зеркального поля излучения вместо (7)-(8) следующую краевую задачу:

$$\eta_* \frac{dI^*(\tau_*, \eta_*, \zeta_*, \varphi_*, \tau_{0,*})}{d\tau_*} = -I^*(\tau_*, \eta_*, \zeta_*, \varphi_*, \tau_{0,*}) + \frac{\Lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 I^*(\tau_*, \eta', \varphi', \zeta_*, \tau_{0,*}) P(\eta_*, \eta', \varphi - \varphi') d\eta' + g^*(\tau_*, \eta_*, \varphi_*) \quad (9)$$

$$\tau_* \in [0, \tau_0], \quad \eta_* \in [-1, +1], \quad \zeta_* \in [0, 1], \quad \varphi_* \in [0, 2\pi],$$

при граничных условиях:

$$I^*(0, -\eta_*, \zeta_*, \varphi_*, \tau_{0,*}) = I^*(\tau_{0,*}, \eta_*, \zeta_*, \varphi_*, \tau_{0,*}) = 0, \quad \eta_* > 0. \quad (10)$$

Отметим, что при получении уравнения переноса (9) ключевое значение имеет свойство зеркальной угловой симметрии для индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma) = P(\eta, \eta', \varphi - \varphi')$ и $P_*(\cos \gamma_*) = P(\eta_*, \eta', \varphi_* - \varphi')$. В нашем случае указанное локальное свойство имеет вид:

$$P(\eta, \eta', \varphi - \varphi') = P(-\eta, -\eta', \varphi - \varphi') = P(\eta_*, \eta', \varphi_* - \varphi') = P(-\eta_*, -\eta', \varphi_* - \varphi'). \quad (11)$$

Фундаментальное свойство (11) является следствием теоремы обратимости оптических процессов в природных средах [5]. Принимая во внимание указанную выше корреляционную связь исходного и зеркального полей излучения, на основе объединения (7)-(8) и (9)-(10), получаем в результате симметризованную краевую задачу для нахождения фотометрических инвариантов $I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$:

$$\begin{aligned} \eta \frac{dI^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)}{d\tau} = & -I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) + \\ & + \frac{\Lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 I^\pm(\tau, \eta', \zeta, \varphi', \tau_0) P(\eta, \eta', \varphi - \varphi') d\eta' + \\ & + g^\pm(\tau, \eta, \varphi), \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad \eta \in [-1, +1], \quad \zeta \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (12)$$

при граничных условиях:

$$I^\pm(0, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = I^\pm(\tau_0, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) = 0. \quad (13)$$

Для первичных энергетических источников $g(\tau, \eta, \varphi)$ их инварианты $g^\pm(\tau, \eta, \varphi)$ имеют вид:

$$g^\pm(\tau, \eta, \varphi) = g(\tau, \eta, \varphi) \pm g(\tau_0 - \tau, -\eta, \varphi). \quad (14)$$

Важно подчеркнуть, что в результате проведенной модификации основной краевой задачи (7)-(8) мы получили две эквивалентные симметризованные краевые задачи (12)-(13) для независимого нахождения фотометрических инвариантов $I^+(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ и $I^-(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$. При этом в каждой из них текущие переменные τ и η изменяются в более узких областях определения, именно в $D_1 = \{\tau \in [0, \frac{1}{2}\tau_0] \cap \eta \in [-1, 1]\}$ или альтернативно в $D_2 = \{\tau \in [0, \tau_0] \cap \eta \in [0, 1]\}$. Для сравнения, в классическом симметризованном варианте исходной краевой задачи (7) - (8) имеем $D = \{\tau \in [0, \tau_0] \cap \eta \in [-1, 1]\}$.

Таким образом, на основе симметризованных регулярных решений модифицированной краевой задачи (12)-(13) с помощью индикатрисы рассеяния $P(\eta, \eta', \varphi - \varphi')$, играющий для поля восходящего и нисходящего излучения роль своеобразного «зеркала» в элементарном объеме среды на каждом из его оптических уровнях τ , удастся распространить локальное свойство угловой симметрии (11) на весь протяженный однородный слой конечной оптической толщины τ_0 . В результате такого расширения обеспечивается бóльшая эффективность используемым на практике методов и алгоритмов теории переноса

излучения с точки зрения сокращения объемов расчетного времени и оперативной памяти ЭВМ, необходимых для численного моделирования полей излучения природных сред. Дополнительным преимуществом при этом является наличие более узких интервалов для текущих переменных и возможность их более высокой пространственно-угловой дискретизации. Кроме того, как будет показано ниже, ранг соответствующих систем линейных алгебраических уравнений, а также общее число неизвестных функций и коэффициентов, необходимых для решения симметризованной краевой задачи (12)-(13), оказывается в два раза меньше, чем при классической трактовке исходной краевой задачи (7)-(8).

4. Усовершенствование численно-аналитических методов теории переноса излучения. Как следует из предыдущего рассмотрения, значение принципа зеркального отображения с прикладной точки зрения состоит в том, что его применение в теории переноса излучения позволяет провести модификацию методов и алгоритмов численного моделирования полей излучения природных сред. Ниже это базовое положение будет рассмотрено на примерах модификации методов сферических гармоник, дискретных ординат, а также методов Гаусса-Зайделя, Кейза и Ханта-Гранта [11].

Метод сферических гармоник. С целью упрощения дальнейшего анализа проведем модификацию этого метода [12] при использовании азимутальных гармоник $P^m(\eta, \zeta)$ заданной индикатрисы рассеяния $P(\eta, \zeta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} P(\eta, \zeta, \varphi) &= \sum_{n=0}^N x_n P_n(\cos \gamma) = \\ &= P^0(\eta, \zeta) + 2 \sum_{m=1}^M P^m(\eta, \zeta) \cos m\varphi, \end{aligned} \quad (15)$$

и соответствующих азимутальных гармоник $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ для фотометрических инвариантов $I^+(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$:

$$\begin{aligned} I^+(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0) &= I_*^0(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^M I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогичное разложение в виде отрезка ряда Фурье используем для первичных энергетических источников $g(\tau, \eta, \varphi)$, в качестве которых в дальнейшем будем рассматривать Солнце:

$$\begin{aligned} g_{\pm}^m(\tau, \eta, \tau_0) &\equiv g_{\pm}^0(\tau, \eta, \tau_0) + 2 \sum_{m=1}^L g_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) \cos m\varphi = \\ &= \frac{\Delta S}{4} \{ P^m(\eta, \zeta) \exp(-\tau / \zeta) + P^m(-\eta, \zeta) \exp[-(\tau_0 - \tau) / \zeta] \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя классическую схему метода сферических гармоник для фотометрических инвариантов (16), получаем:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = \sum_{n=m}^N (2n+1) A_{n,\pm}^m(\tau) P_n^m(\eta), \quad (18)$$

$$A_{n,\pm}^m(\tau) = A_n^m(\tau) \pm (-1)^{n+m} A_n^m(\tau_0 - \tau), \quad m=0,1,\dots,M; \quad n=m, m+1,\dots,N, \quad (19)$$

где $N = 2p + m - 1 \geq M$ - общее число неизвестных функций, p - целые числа, M - число азимутальных гармоник искомого фотометрических инвариантов, $P_n^m(\eta)$ - присоединенные полиномы Лежандра. Отметим, что в противоположность классическому алгоритму рассматриваемого метода, неизвестные функциональные коэффициенты $A_{n,\pm}^m(\tau)$ находятся не из $2p$ граничных условий (13), а только из p условий следующего вида:

$$\int_0^1 I_{\pm}^m(0, \eta) P_{m+2j-1}^m(\eta) d\eta = 0, \quad \int_0^1 I_{\pm}^m(\tau_0, -\eta) P_{m+2j-1}^m(\eta) d\eta = 0, \quad (20)$$

$$j = 1, \dots, p, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Далее согласно стандартному алгоритму рассматриваемого метода для функций $A_{n,\pm}^m(\tau)$ имеем следующее базовое представление:

$$A_{n,\pm}^m(\tau) = \sum_{i=1}^p \left[k_{i,\pm}^m g_n^m(v_i^m) e^{v_i^m \tau} \pm k_{i,\pm}^m g_n^m(-v_i^m) e^{-v_i^m \tau} \right] +$$

$$+ h_n^m e^{-\tau/\zeta} \pm f_n^m e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}}, \quad m = 0, 1, \dots, M; \quad n = m, m+1, \dots, N,$$

где h_n^m и f_n^m - неизвестные коэффициенты, v_i^m - характеристические корни, а коэффициенты $k_{n,\pm}^m$ определяются из граничных условий (20) в форме Маршака [12]. Отметим, что в данном методе в соответствии с его классической схемой для каждого множества $2p$ величин с индексом i нахождение неизвестных функций g_n^m , $m = 0, 1, \dots, M$, $n = m, m+1, \dots, N$ сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений ранга $2p$:

$$(n-m)g_{n-1}^m(v_i^m)v_i^m + z_n g_n^m(v_i^m) + (n+m+1)g_{n+1}^m(v_i^m)v_i^m = 0, \quad (22)$$

$$i = \pm 1, \dots, \pm p, \quad n = m, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

где $g_{m-1}^m(v_i^m) = g_{N+1}^m(v_i^m) = 0$ и используются следующие обозначения:

$$z_n = 2n+1 - \Lambda x_n, \quad n \leq M, \quad z_n = 2n+1, \quad n > M. \quad (23)$$

Далее из условия разрешимости $\Delta(v_i^m) = 0$ систем линейных алгебраических уравнений (22):

$$\Delta(v_i^m) = \begin{vmatrix} z_n, & (2n+1)v_i^m, & 0, & 0, \dots & \dots, & 0 \\ v_i^m, & z_{n+1}, & (2n+2)v_i^m, & 0, \dots & \dots, & 0 \\ 0, & 2v_i^m, & z_{n+2}, & (2n+3)v_i^m, \dots & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & (N-n)v_i^m, & z_N & \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

находятся характеристические корни v_i^m . При этом для определителей Якоби $\Delta(v_i^m)$ и характеристических корней v_i^m выполняются следующие соотношения эквивалентности: $\Delta(-v_i^m) = \Delta(v_i^m)$, $v_{-i}^m = -v_i^m$, $i=1, \dots, p$. После нахождения величин g_n^m и v_i^m определяются значения $2p$ неизвестных коэффициентов $k_{i,\pm}^m$ из системы линейных алгебраических уравнений ранга $2p$:

$$\sum_{n=m}^N (2n+1) \left[h_n^m + \sum_{i=-p}^p k_{i,\pm}^m g_n^m(v_i^m) \right] \int_0^1 P_n^m(\eta) P_{m+2j-1}^m(\eta) d\eta = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{n=m}^N (2n+1) \left[h_n^m e^{-\frac{\tau_0}{\xi}} + \sum_{i=-p}^p k_{i,\pm}^m g_n^m(v_i^m) e^{v_i^m \tau_0} \right] (-1)^{n+m-1} \times \int_0^1 P_n^m(\eta) P_{m+2j-1}^m(\eta) d\eta = 0, \quad (26)$$

$j = 1, 2, \dots, p.$

Теперь воспользуемся для упрощения рассмотренных выше представлений свойством инвариантности (2), вытекающим из принципа зеркального отображения (рисунок 2). Их применение позволяет упростить в целом метод сферических гармоник на базе следующих соотношений эквивалентности:

$$A_n^m(\tau) = (-1)^{n+m} A_n^m(\tau_0 - \tau), \quad (27)$$

$$k_{i,\pm}^m g_n^m(v_i^m) = (-1)^{n+m} k_{-i,\pm}^m g_n^m(-v_i^m) e^{-v_i^m \tau_0}, \quad (28)$$

$$h_n^m = (-1)^{n+m} f_n^m, \quad (29)$$

$m=0, 1, \dots, M, \quad n=m, m+1, \dots, N, \quad i=1, 2, \dots, p.$

Подставляя затем соотношения (27)-(29) в (20), окончательно получаем для функциональных коэффициентов $A_{n,\pm}^m(\tau)$ представление:

$$\begin{aligned}
A_{n,\pm}^m(\tau) = & \sum_{i=1}^p k_{i,\pm}^m g_n^m(v_i^m) \left[e^{v_i^m \tau} \pm (-1)^{n+m} e^{-v_i^m(\tau_0 - \tau)} \right] + \\
& + h_n^m \left[e^{-\tau/\zeta} \pm (-1)^{n+m} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}} \right], \quad (30) \\
m = & 0, 1, \dots, M, \quad n = m, m+1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, p.
\end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений (30) для $A_{n,\pm}^m(\tau)$ в модифицированном виде содержит уже не $2p$, а только p неизвестных величин $k_{i,\pm}^m$ и $g_n^m(v_i^m)$. Кроме того, если в соответствии с классическим алгоритмом рассматриваемого метода коэффициенты $g_n^m(v_i^m)$ находятся из решений алгебраических систем ранга $2p$ для каждого из $2p$ значений характеристического корня v_i^m , то в случае инвариантной трактовки и проведенной выше модификации (12) - (13), это делается лишь p раз и только для положительных значений $v_i^m > 0$, $i = 1, 2, \dots, p$. При этом неизвестные коэффициенты h_n^m и f_n^m в (21) находятся при выполнении условия (29) по классической схеме метода сферических гармоник с использованием рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
\zeta z_n h_n - (n-m) h_{n-1} - (n+m-1) h_{n+1} = \zeta c_{nm}, \quad (31) \\
n = m, m+1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M,
\end{aligned}$$

где $h_{m-1} = h_{N+1} = 0$. Для коэффициентов z_n используются выражения (23), а c_{nm} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_{nm} = \begin{cases} \frac{\Lambda}{4} x_n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{\tau/\zeta}, & n \leq M, \\ 0, & n > M, \end{cases} \quad (32) \\
n = m, m+1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M.
\end{aligned}$$

Таким образом, применение принципа зеркального отображения в методе сферических гармоник оставляет число неизвестных функций $A_{n,\pm}^m(\tau)$ и коэффициентов h_n для решений системы уравнений (31) таким же, как и при использовании классического алгоритма этого метода [10]. Однако общее число неизвестных коэффициентов k_i^m и g_n^m в модифицированном представлении (30) в 2 раза меньше по сравнению с классической формулой (21).

Метод дискретных ординат. Для простоты дальнейшего рассмотрения и при этом, не уменьшая его общности, предположим, что индикатриса рассеяния $P(\cos \gamma)$ сферическая $P(\cos \gamma) = 1$ и $S = 1$. В этом случае в соответствии с методом дискретных ординат [2] представим аппроксимацию интегрального члена в уравнении переноса излучения (12) с помощью квадратур Гаусса в следующей дискретной форме:

$$\int_{-1}^{+1} I^{\pm}(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) d\eta \approx \sum_{j=-n}^n a_j^{\pm} I^{\pm}(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0) = \sum_{j=-n}^n a_j^{\pm} I_j^{\pm}, \quad (33)$$

где узлы – дискретные угловые величины $\eta_j, j = \pm 1, \dots, \pm n$ являются корнями полиномов Лежандра $P_{2n}(\eta_j) = 0$. При этом для весовых множителей a_j^{\pm} и узлов η_j выполняются следующие соотношения эквивалентности: $a_{-j}^{\pm} = a_j^{\pm}, \eta_{-j} = -\eta_j, j = 1, \dots, n$. Применяя классический алгоритм рассматриваемого метода, представим решение симметризованной краевой задачи (12)-(13) в виде:

$$I^{\pm}(\tau, \eta_i, \zeta, \tau_0) = \sum_{s=1}^n \left[\frac{\beta_s^{\pm}}{1 + k_{\pm, s} \eta_i} e^{-k_{\pm, s} \tau} \pm \frac{\beta_{-s}^{\pm}}{1 - k_{\pm, s} \eta_i} e^{k_{\pm, s} \tau} \right] + \\ + \alpha_i(\eta_i) e^{-\tau/\zeta} \pm \gamma_i(\eta_i) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}}, \quad i = \pm 1, \dots, \pm n, \quad s = 1, \dots, L, \quad (34)$$

где число различных и не равных нулю характеристических корней $\pm k_{\pm, s}, s = 1, 2, \dots, L$, определяемых из решений характеристического уравнения:

$$\frac{\Lambda}{2} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{\pm}}{1 - k_{\pm, s}^2 \eta_j^2} = 1, \quad (35)$$

равно $2L$. В (34) неизвестные коэффициенты β_s^{\pm} , общее число которых равно $2L$, находятся из системы линейных алгебраических уравнений ранга $2L$, получаемых из граничных условий симметризованной краевой задачи (12)-(13) при их представлении в дискретной форме для n угловых направлений визирования $0 \leq \eta_j \leq 1$. Последующее использование свойств инвариантности (2) в их дискретной форме:

$$I^{\pm}(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0) = \pm I^{\pm}(\tau_0 - \tau, -\eta_j, \zeta, \tau_0), \quad j = \pm 1, \dots, \pm n, \quad (36)$$

позволяет уменьшить вдвое ранг упомянутой выше системы уравнений и сократить в два раза число искоемых коэффициентов $\beta_s^{\pm}, s = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L$.

Действительно, на основе свойства инвариантности (36) получаем следующие базовые соотношения эквивалентности:

$$\alpha_i(-\eta) = \gamma_{-i}, \quad \beta_s^{\pm} = \beta_{-s}^{\pm} e^{k_s \tau_0}. \quad (37)$$

Если соотношения эквивалентности (37) использовать в (34) для определения фотометрических инвариантов $I^\pm(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$, то для этого необходимы уже не $2L$ неизвестных коэффициентов β_s^\pm , $s = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L$ и угловая дискретизация $2n$ направлений визирования η_j , $j = \pm 1, \dots, \pm n$, как это следует из классического алгоритма рассматриваемого метода, а только L коэффициентов β_s^\pm , $s = 1, 2, \dots, L$ и n направлений визирования η_j , $j = 1, \dots, n$. Это позволяет представить (34) в более простом виде:

$$I^\pm(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0) = \sum_{s=1}^L \beta_s^\pm \left[\frac{e^{-k_{\pm,s}\tau}}{1+k_{\pm,s}\eta_j} + \frac{e^{-k_{\pm,s}(\tau_0-\tau)}}{1-k_{\pm,s}\eta_j} \right] + \alpha_j e^{-\tau/\zeta} \pm \gamma_j e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\zeta}}. \quad (38)$$

Таким образом, применение принципа зеркального отображения уменьшает ранг линейных алгебраических систем, необходимых для нахождения коэффициентов β_s^\pm , в два раза по сравнению с классической схемой рассматриваемого метода. При этом вместо двух граничных условий $I(0, \eta_j, \zeta, \tau_0) = 0$ и $I(\tau_0, -\eta_j, \zeta, \tau_0) = 0$, $\eta_j \in [0, 1]$ для исходной краевой задачи (7)-(8) имеем в силу инвариантных соотношений (37) только одно, например, $I^\pm(0, \eta_j, \zeta, \tau_0) = 0$, $\eta_j \in [0, 1]$. Расписывая его для n угловых направлений визирования $\eta_j \in [0, 1]$, $j = 1, 2, \dots, n$, окончательно получаем искомую линейную систему алгебраических уравнений ранга n для нахождения неизвестных величин β_s^\pm :

$$\sum_{s=1}^L \beta_s^\pm \left[\frac{1}{1+k_s\eta_j} + \frac{e^{-k_{\pm,s}\tau_0}}{1-k_{\pm,s}\eta_j} \right] + \alpha_j(\eta_j) + \gamma_j(\eta_j) e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} = 0, \quad (39)$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Отметим, что в этом случае коэффициенты α_j и γ_j находятся согласно классической схеме метода дискретных ординат, но при обязательном использовании соотношений эквивалентности (37). Заметим также, что при численном моделировании полей излучения совместное использование принципа зеркального отображения [5] и метода дискретных ординат [2] для решений известных интегральных аналогов уравнения переноса излучения (7), таких, как линейные сингулярные интегральные уравнения [3], [5], приводит аналогичным образом к уменьшению два раза ранга адекватных им систем алгебраических уравнений и сужению интервалов изменения текущих переменных.

Действительно, используя [13], получаем после несложных преобразований линейные сингулярные интегральные уравнения для нахождения азимутальных гармоник $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ фотометрических инвариантов $I^{\pm}(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ [6]:

$$T^m(\zeta)I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = \frac{\Lambda}{2}\zeta \int_0^1 \frac{A^m(\zeta, \eta')}{\eta' - \zeta} I_{\pm}^m(\tau, \eta, \eta', \tau_0) d\eta' \mp$$

$$\mp \frac{\Lambda}{2}\zeta e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \int_0^1 \frac{A^m(\zeta, -\eta')}{\eta' + \zeta} I_{\pm}^m(\tau, \eta, \eta', \tau_0) d\eta' + f_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0), \quad (40)$$

$$\tau \in [0, \tau_0], \eta \in [0, 1], \zeta \in [0, 1], m = 0, 1, \dots, M,$$

где ядерные функции $A^m(\eta, \zeta)$ определены в [3].

Вклад однократного рассеяния в уравнениях (40) определяется функциями $f_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ согласно формулам:

$$f_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = f^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) \pm f^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \zeta, \tau_0), \quad \eta > 0, \quad (41)$$

где:

$$f^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = \begin{cases} \frac{\Lambda S}{4} A^m(\zeta, \eta) \frac{\zeta}{\zeta - \eta} \left[e^{-\frac{\tau}{\zeta}} - e^{-\frac{\tau}{\eta}} \right], \eta > 0, \\ \frac{\Lambda S}{4} A^m(\zeta, \eta) \frac{\zeta}{\zeta - \eta} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \left[1 - e^{-\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\eta}\right)(\tau_0 - \tau)} \right], \eta < 0. \end{cases} \quad (42)$$

Функции $T^m(\zeta)$ имеют следующий вид [3]:

$$T^m(\zeta) = 1 + \frac{\Lambda}{2}\zeta \int_0^1 \frac{A^m(\eta', \eta')}{\eta' - \zeta} d\eta', \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (43)$$

Главное преимущество линейных интегральных уравнений (40) по сравнению с другими уравнениями классической теории переноса излучения состоит в том, что они дают возможность непосредственно находить азимутальные гармоники фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ для величин $I^m(\tau^m, \eta, \zeta, \tau_0)$, минуя сложную процедуру предварительного нахождения аналогичных величин $B_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ для функций $B^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ при решении основной модифицированной краевой задачи (12) - (13). При этом наиболее важный аспект численного моделирования полей излучения на основе (40) состоит в следующем: искомые величины фотометрических инвариантов

$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ зависят только от одной текущей переменной – угла визирования η' , $\in [0, 1]$ тогда как другие переменные – оптическая глубина τ и зенитное расстояние Солнца $\arccos \zeta$, наряду с вероятностью выживания фотона Λ и оптической толщиной слоя τ_0 , образуют группу независимых параметров численного моделирования.

Применяя к интегральным членам уравнения (40) процедуру дискретизации (33) по угловой переменной η и полагая затем в них последовательно $\eta' = \eta'_j \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, N$, получаем вместо (40) две независимые системы линейных алгебраических уравнений ранга N для отдельного нахождения азимутальных гармоник $I_{\pm}^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0)$ и $I_{\pm}^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0)$:

$$\begin{aligned} T^m(\zeta) I_{\pm}^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0) &= \frac{\Lambda}{2} \zeta \sum_{j=1}^N \frac{a_j A^m(\zeta, \eta_j)}{\eta'_j - \zeta} I_{\pm}^m(\tau, \eta_j, \eta_j, \tau_0) \mp \\ &\mp \frac{\Lambda}{2} \zeta e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \sum_j^N a_j \frac{A^m(\zeta, -\eta'_j)}{\eta'_j + \zeta} I_{\pm}^m(\eta_j, \eta'_j, \tau_0) + f_{\pm}^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0), \end{aligned} \quad (44)$$

$$m = 0, 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, (\eta_j, \eta'_j) \in [0, 1],$$

где функции $f_{\pm}^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0)$ имеют следующий симметризованный дискретный вид:

$$f_{\pm}^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0) = f^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0) \pm f^m(\tau_0 - \tau - \eta_j, \zeta, \tau_0). \quad (45)$$

Необходимо подчеркнуть, что использование процедуры дискретизации (33) для численного определения азимутальных гармоник $I^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0)$ и $I^m(\tau_0 - \tau - \eta_j, \zeta, \tau_0), \eta_j > 0, m = 0, 1, \dots, M$ из первоначально сформулированных для них систем линейных интегральных уравнений [3] приводит к системам линейных алгебраических уравнений рангом в 2 раза большим $(2N)$, чем дают уравнения (44) для фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0)$. Кроме того, использование последних позволяет автоматически учитывать важные дополнительные соотношения, которым должны удовлетворять регулярные решения в (44) для устранения их возможной неединственности [3].

Метод Гаусса-Зайделя. В этом методе [11] на основе указанной выше инвариантной трактовки основной краевой задачи (7)-(8) и

использования свойства инвариантности (2) имеем для азимутальных гармоник I_{\pm}^m следующее исходное представление:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = \int_0^{\tau} B_{\pm}^m(\tau', \eta, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta}} \frac{d\tau'}{\eta}, \quad (46)$$

$$m = 0, 1, \dots, M, \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad \eta \in [0, 1],$$

где величины $B_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ являются азимутальными гармониками инвариантов $B_{\pm}(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0)$ для функции источников $B(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0)$ исходного поля излучения:

$$B_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = B^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) \pm B^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \zeta, \tau_0) =$$

$$\pm B^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \zeta, \tau_0), \quad \tau \in [0, \tau_0], \eta \in [0, 1], \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (47)$$

Следует подчеркнуть, что при классической трактовке рассматриваемого метода текущие переменные τ и η , в противоположность симметризованным представлениям (40)-(41), изменяются в более широкой области их определения, именно, $\tau \in [0, \tau_0]$ и $\eta \in [-1, 1]$. Используя (40), выражаем после очевидных преобразований величины $B_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ через $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ согласно точному интегральному соотношению:

$$B_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) =$$

$$= \frac{\Lambda}{2} \left[\int_0^1 P^m(\eta, \eta') I_{\pm}^m(\tau, \eta', \zeta, \tau_0) d\eta' \pm \int_0^1 P^m(-\eta, \eta') I_{\pm}^m(\tau_0 - \tau, \eta', \zeta, \tau_0) d\eta' \right] +$$

$$+ \frac{\Lambda}{4} \left[P^m(\eta, \zeta) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \pm P^m(-\eta, \zeta) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}} \right], \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Комбинируя затем алгоритм метода Гаусса-Зайделя в его классическом варианте с инвариантной трактовкой (40) решений симметризованной краевой задачи (12)-(13), получаем в случае произвольного, но фиксированного опорного оптического уровня $0 \leq \tau_1 < \tau$ базовое интегральное представление:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = I_{\pm}^m(\tau_1, \eta, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{(\tau-\tau_1)}{\eta}} + \int_{\tau_1}^{\tau} B_{\pm}^m(\tau', \eta, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{(\tau-\tau')}{\eta}} \frac{d\tau'}{\eta}, \quad (49)$$

$$m = 0, 1, \dots, M.$$

Используя соотношение (49) и трёхточечную модель дискретизации интегрального члена в нём по τ , строим для нахождения инвариантов I_{\pm}^m основную релаксационно-итерационную схему, адекватную классическому алгоритму рассматриваемого метода [11]:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = I_{\pm}^m(\tau_1, \eta, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{(\tau-\tau_1)}{\eta}} + \int_{\tau_1}^{\tau} B_{\pm}^m(\tau', \eta, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{(\tau-\tau')}{\eta}} \frac{d\tau'}{\eta}, m=0,1,\dots,M. \quad (50)$$

В итерационном процессе (50) дискретные величины τ_{i+1} вычисляются последовательно, начиная с $\tau=0$ и до $\tau=\tau_0$ при выполнении следующих соотношений:

$$I_{\pm,(n)}^m(\tau_1, \eta, \zeta, \tau_0) = 0, \quad \forall n \geq 0, \tau \in [0, \tau_0] \cap \eta \in [0, 1],$$

$$B_{\pm,(n)}^m(\tau_{i+1}, \eta, \zeta, \tau_0) =$$

$$= \frac{\Lambda}{2} \left[\int_0^1 P^m(\eta, \eta') I_{\pm,(n)}^m(\tau, \eta', \zeta, \tau_0) \pm \int_0^1 P^m(-\eta, \eta') I_{\pm,(n)}^m(\tau_0 - \tau, \eta', \zeta, \tau_0) d\eta' \right] + \quad (51)$$

$$+ \frac{\Lambda}{4} \left[P^m(\eta, \zeta) e^{-\tau/\zeta} \pm P^m(-\eta, \zeta) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \right], \quad i=1,\dots,N-2, \quad m=0,1,\dots,M.$$

Пространственная и угловая дискретизации интегральных членов (48) проводятся согласно квадратурным формулам Гаусса с использованием весовых функций W_k :

$$B_{\pm,(n)}^m(\tau, \eta_j, \zeta, \tau_0) = \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=1}^L W_k [P^m(\eta_j, \eta_k) I_{\pm,(n)}^m(\tau, \eta_k, \zeta, \tau_0) \pm P^m(-\eta_j, \eta_k) I_{\pm,(n)}^m(\tau_0 - \tau, \eta_k, \zeta, \tau_0)] + \quad (52)$$

$$+ \frac{\Lambda}{4} \left[P^m(\eta_j, \zeta) e^{-\tau/\zeta} \pm P^m(-\eta_j, \zeta) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\zeta}} \right], \quad m=0,1,\dots,M.$$

Для дальнейшего рассмотрения введем следующие обозначения:

$$I_{ij}^{\pm} = I^{\pm}(\tau_i, \eta_j), \quad i=0,1,\dots,N, \quad j=\pm 1,\dots,\pm L, \quad (53)$$

при использовании $\Delta\eta_k = \Delta\eta_{-k} = \Delta\eta$. Проводя затем дискретизацию интервалов текущих переменных $\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$ и $\Delta\eta = \eta_{j+1} - \eta_j$ в

соответствии с классическим итерационным алгоритмом метода Гаусса-Зайделя и используя ее для соответствующей аппроксимации интегральных членов в (48), получаем после несложных преобразований формулы (44) для восходящего ($\eta_j < 0$) и нисходящего излучения ($\eta_j > 0$) необходимые представления:

$$I_{i+2,j}^m = I_{i,j}^{\pm,m} e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} + \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=1}^L (P_{k,j}^m I_{i+1,k}^m + P_{k,-j}^m I_{i+1,-k}^m) \Delta\eta \left(1 - e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} \right) + f_{i+1,j}^m, \quad (54)$$

$$I_{i,-j}^m = I_{i+2,-j}^m e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} + \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=1}^L (P_{k,-j}^m I_{i+1,k}^m + P_{k,j}^m I_{i+1,-k}^m) \Delta\eta \left(1 - e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} \right) + f_{i+1,-j}^m, \quad (55)$$

$$i = 0, 1, \dots, N, j = 1, 2, \dots, L.,$$

где дискретные значения функций $f_{i+1,j}^m$ и $f_{i+1,-j}^m$ определяются согласно формулам:

$$f_{i+1,j}^m = \frac{\Lambda}{4} P^m(\eta_j, \zeta) e^{-\frac{\tau_j+1}{\zeta}}, f_{i+1,-j}^m = \frac{\Lambda}{4} P^m(-\eta_j, \zeta) e^{-\frac{\tau_j+1}{\zeta}}. \quad (56)$$

Таким образом, при использовании классической релаксационно-итерационной схемы [14] уравнения (54)-(55) образуют систему линейных алгебраических уравнений ранга $2(N \times M)$ относительно $2(N \times M)$ неизвестных величин $I_{i,j}^m$ и $I_{N-i,j}^m$. К этой системе следует добавить граничные условия: $I_{i,j}^m = 0$ и $I_{N-i,-j}^m = 0$.

Отметим, что в приведённой выше итерационной схеме оптические уровни с индексами i и $N-i$ являются симметричными относительно середины рассматриваемого слоя. Полагая в (55) $i = N-i-2$, находим для симметричного уровня $(i+2)$ представление итерационного алгоритма, основанного на формуле (52):

$$I_{N-i-2,-j}^m = I_{N-i,-j}^m e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} + \quad (57)$$

$$+ \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=1}^L (P_{k,-j}^m I_{N-i-1,k}^m + P_{k,j}^m I_{N-i-1,-k}^m) \Delta \eta \left(1 - e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} \right) + f_{N-i-1,-j}^m,$$

где:

$$P_{-k,-j}^m = P_{k,j}^m = \frac{1}{\Delta \eta_k \Delta \eta_k} \int P^m(\eta_j, \eta) d\eta'. \quad (58)$$

Введем теперь вместо зеркально симметричных функций $I_i^{\pm,j}$ и $I_{N-i}^{\pm,j}$ адекватные им величины на основе их линейных комбинаций:

$$V_{i,j,\pm}^m = I_{i,j}^m \pm I_{N-i,j}^m, \quad (59)$$

$$W_{i,j,\pm}^m = I_{i,-j}^m \pm I_{N-i,j}^m. \quad (60)$$

Тогда из (54)-(56) получаем для них следующие дискретные итерационные представления:

$$V_{i+2,j,\pm}^m = V_{i,j,\pm}^m e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} + \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=1}^L (P_{k,j}^m V_{i+1,k,\pm}^m \pm P_{k,-j}^m W_{i+1,k,\pm}^m) \Delta \eta \left(1 - e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} \right) +$$

$$+ f_{i+1,j}^m \pm f_{N-i-1}^m,$$

$$W_{i,j,\pm}^m = W_{i+2,j,\pm}^m e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} +$$

$$+ \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=1}^L (P_{k,j}^m W_{i+1,k}^{\pm} \pm P_{k,-j}^m V_{i+1,k}^{\pm}) \Delta \eta \left(1 - e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} \right) + \quad (62)$$

$$+ f_{i+1,j}^m \pm f_{N-i-1,j}^m.$$

Для дальнейшего усовершенствования метода Гаусса–Зайделя принципиальное значение имеют инвариантные свойства введенных величин (59)-(60) в виде соотношений эквивалентности:

$$V_{i,j,\pm}^m = \pm W_{N-i,j,\pm}^m, \quad (63)$$

при соответствующих граничных условиях:

$$V_{0,j}^{\pm} = 0, \quad W_{N,j}^{\pm} = 0. \quad (64)$$

Отметим, что в силу (58)-(60) величины $V_{N,j,\pm}^m$ и $W_{0,j,\pm}^m$ считаются известными. Подставляя далее соотношение (57) в (55), находим модифицированную итерационную схему для нахождения величин $V_{i,j,\pm}^m$ и $W_{i,j,\pm}^m$:

$$V_{i+2,j,\pm}^m = V_{i,j,\pm}^m e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} + f_{i+1,j}^m \pm f_{N-i-1,-j}^m + \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=1}^L (P_{k,j}^m V_{i+1,k,\pm}^m \pm P_{k,-j}^m V_{N-i-1,k,\pm}^m) \Delta\eta \left(1 - e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} \right), \quad (65)$$

$$W_{i+2,j,\pm}^m = W_{i,j,\pm}^m e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} + f_{i+1,-j}^m \pm f_{N-i-1,j,\pm}^m + \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=1}^L (P_{k,j}^m W_{i+1,k,\pm}^m \pm P_{k,-j}^m W_{N-i-1,k,\pm}^m) \Delta\eta \left(1 - e^{-\frac{2\Delta\tau}{\eta_j}} \right), \quad (66)$$

при выполнении граничных условий (64). Таким образом, мы получили системы линейных алгебраических уравнений (65)-(66) ранга $(N \times M)$ для нахождения $(N \times M)$ новых искомым величин $W_{i,j,\pm}^m$ и $V_{i+2,j,\pm}^m$, число которых в 2 раза меньше, чем при использовании классического аналога рассматриваемого метода. При этом базовый релаксационно-итерационный алгоритм численного решения симметризованной краевой задачи (12) - (13) остается без изменений: на каждом текущем n -ом итерационном шаге величины $I_{i+2,j}^m$ находится при использовании значений $I_{i,j}^m$ и $I_{i+1,j}^m$ в этой же итерации, а величина $I_{i+1,-k}^m$ находится из предыдущей $(n-1)$ -ой итерации. Аналогичным образом, на каждом текущем n -ом итерационном шаге величины $I_{i,-j}^m$ находится из значений $I_{i+2,-j}^m$ и $I_{i+1,-j}^m$ в той же итерации, а величина $I_{i+1,k}^m$ находится из предыдущей $(n-1)$ -ой итерации.

Отметим, что модификация указанного базового алгоритма, улучшающая в целом сходимость итерационного процесса при получении численных решений основных краевых задач теории

переноса излучения, проведена в [14]. Заметим также, что отсутствие анизотропного отражающего дна на уровне нижней границы слоя ($\tau = \tau_0$) не является принципиальным, поскольку учитывается согласно методике [3]. Кроме того дополнительным преимуществом, повышающим общую эффективность проведенной выше модификации, является возможность использования в процессе численного моделирования полей излучения более узких интервалов текущих пространственных и угловых переменных τ_i и η_j , именно: $\eta_j \in [0, 1]$ при $\tau_i \in [0, \tau_0]$ или альтернативно $\tau_i \in [0, \frac{1}{2}\tau_0]$ при $\eta_j \in [1, -1]$.

Метод Кейза. Согласно данному методу [15] представим регулярные решения исходной несимметризованной краевой задачи (7-8) в виде разложения азимутальных гармоник $I^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$ по полной и ортонормированной системе сингулярных собственных функций φ_v^m однородного уравнения переноса излучения (7):

$$I^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = \frac{\Lambda}{2} \left(\alpha_m \frac{e^{-k_m \tau}}{1 - k_m \eta} + \beta_m \frac{e^{k_m \tau}}{1 + k_m \eta} \right) + \int_0^1 A^m(\nu) \varphi_\nu^m(\eta) e^{-\tau/\nu} d\eta + \int_0^1 A^m(-\nu) \varphi_{-\nu}^m(\eta) e^{\tau/\nu} d\eta, \quad (67)$$

при этом выполняются следующие граничные условия:

$$I^m(0, \eta) = \delta(\eta - \zeta), \quad I^m(\tau_0, -\eta) = 0, \quad \eta > 0, \quad \zeta > 0, \quad (68)$$

$$m = 0, 1, \dots, M.$$

Величины $\pm k_m \in [0, 1]$ являются корнями соответствующего характеристического уравнения [14], а искомые коэффициенты α_m, β_m и функции $A^m(\pm\nu)$ подлежат определению. Согласно классической схеме рассматриваемого метода неизвестные коэффициенты α_m, β_m и функции $A^m(\pm\nu)$ находятся из граничных условий (68) и соотношений ортогональности для полной ортонормированной системы собственных функций $\{\varphi_\nu^m(\eta), \varphi_k^m(\eta)\}$ на отрезке $\eta \in [0, 1]$ при выполнении следующих равенств эквивалентности: $\varphi_{-\nu}^m(\eta) = \varphi_\nu^m(-\eta)$ и $\varphi_{-\nu}^m(-\eta) = \varphi_\nu^m(\eta)$.

Используя принцип зеркального отображения [5] и соответствующие фотометрические инварианты (1), имеем для них вместо (65) следующее представление:

$$\begin{aligned}
& I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) = \\
& = \frac{\Lambda}{2} \left[\left(\alpha_m \pm \beta_m e^{k_m \tau_0} \right) \frac{e^{-k_m \tau}}{1 - k_m \tau} + \left(\alpha_m e^{-k_m \tau_0} \pm \beta_m \right) \frac{e^{k_m \tau_0}}{1 + k_m \eta} \right] + \\
& \quad + \int_0^1 \left[A^m(v) + A^m(-v) e^{\tau_0/v} \right] \varphi_v(\eta) d\eta \pm \\
& \quad \pm \int_0^1 \left[A^m(v) e^{-\frac{\tau_0}{v}} + A^m(-v) \right] \varphi_{-v}(\eta) e^{\frac{\tau}{v}} dv.
\end{aligned} \tag{69}$$

Введем теперь новые величины γ_{\pm}^m и $A_{\pm}^m(v)$, использование которых приводит в целом к усовершенствованию метода Кейза и алгоритма его применения:

$$\gamma_{\pm}^m = \alpha_m \pm \beta_m e^{k_m \tau_0}, \tag{70}$$

$$A_{\pm}^m(v) = A^m(v) \pm A^m(-v) e^{\frac{\tau_0}{v}}. \tag{71}$$

Используя затем (68)-(69) вместо (67), окончательно получаем модифицированное представление для азимутальных гармоник $\hat{I}_{\pm}^m(\tau_n, \eta_k, \zeta_l, \tau_0)$:

$$\begin{aligned}
I_{\pm}^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0) &= \gamma_{\pm}^m \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{e^{-k_m \tau_0}}{1 - k_m \eta} \pm \frac{e^{-k_m(\tau_0 - \tau)}}{1 + k_m \eta} \right) + \\
& + \int_0^1 A_{\pm}^m(v) \left[\varphi_v^m(\eta) e^{-\frac{\tau}{v}} \pm \varphi_{-v}^m(\eta) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{v}} \right] dv,
\end{aligned} \tag{72}$$

только при одном граничном условии $\hat{I}_{\pm}^m(\tau_n, \eta_k, \zeta_l, \tau_0) = \delta(\eta - \zeta)$, $\eta > 0$.

Таким образом, использование симметризованной версии основной краевой задачи (12)-(13) вместо исходной (7)-(8) позволяет находить в рамках рассматриваемого метода две неизвестные величины γ_{\pm}^m и $A_{\pm}^m(v)$ вместо четырех $\alpha^m, \beta^m, A^m(v)$ и $A^m(-v)$, как это следует из применения классической схемы метода Кейза [11].

Метод Ханта-Гранта. Проведем теперь модификацию матричного метода Ханта-Гранта [16] на основе принципа зеркального отображения [7] и фотометрических инвариантов поля скалярного излучения (1)-(2). Рассмотрим согласно данному методу определение

азимутальных гармоник $I^m(\tau, \eta, \zeta, \tau_0)$, $m = 0, 1, \dots, M$ на произвольной оптической глубине $\tau \{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m+1} \} \in [0, \tau_0]$ плоского однородного слоя конечной оптической толщины τ_0 в направлении визирования $\arccos \eta \{ \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\kappa \} \in [-1, 1]$ при зенитном расстоянии Солнца $\arccos \zeta \{ \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l \} \in [0, 1]$ и при отсутствии отражающего дна на уровне его нижней границы $\tau = \tau_0$.

Введём далее матрицы интенсивностей нисходящего $\hat{I}_{(+)}^m(\eta > 0)$ и восходящего $\hat{I}_{(-)}^m(\eta < 0)$ излучений для текущих независимых переменных следующим образом (рисунок 3):

$$\hat{I}_{(+)}^m(\tau_n, \eta_k, \zeta_l, \tau_0) \begin{bmatrix} I^m(\tau_n, \eta_1, \zeta_l, \tau_0) \\ I^m(\tau_n, \eta_2, \zeta_l, \tau_0) \\ \vdots \\ I^m(\tau_n, \eta_\kappa, \zeta_l, \tau_0) \end{bmatrix}, \quad (73)$$

$$\hat{I}_{(-)}^m(\tau_n, -\eta_k, \zeta_l, \tau_0) \begin{bmatrix} I^m(\tau_n, -\eta_1, \zeta_l, \tau_0) \\ I^m(\tau_n, -\eta_2, \zeta_l, \tau_0) \\ \vdots \\ I^m(\tau_n, -\eta_\kappa, \zeta_l, \tau_0) \end{bmatrix}, \quad (74)$$

где $\tau_n \in [0, \tau_0]$, $n = \overline{(1, N+1)}$, $\eta_\kappa \in [0, 1]$, $\kappa = \overline{(1, K)}$, $\zeta_l \in [0, 1]$, $l = \overline{(1, L)}$, $m = \overline{(0, M)}$.

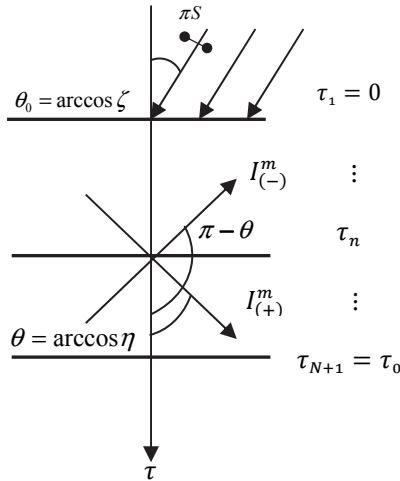


Рис. 3. Геометрия поля скалярного излучения в методе Ханта-Гранта для восходящих (-) и нисходящих (+) направлений визирования.

Опуская для простоты дальнейшего рассмотрения в используемых выше обозначениях зависимость матриц $\hat{I}_{(\pm)}^m(\tau_n, \eta_k, \zeta_l, \tau_0)$ от угловых переменных (η_k, ζ_l) и параметра τ_0 и указывая в них только зависимость от текущей оптической глубины τ_n , введём следующие обозначения:

$$\hat{I}_{(+)}^m(\tau_n, \eta_k, \zeta_l, \tau_0) = \hat{I}_{(+),n}^m, \hat{I}_{(-)}^m(\tau_n, -\eta_k, \zeta_l, \tau_0) = \hat{I}_{(-),n}^m, \quad (75)$$

$$\tau_n \in [\tau_1, \tau_2 \dots \tau_{N+1}], m = 0, 1, \dots, M.$$

При этом на внешних границах слоя $\tau_1 = 0$ и $\tau_{N+1} = \tau_0$ выполняются граничные условия:

$$\hat{I}_{(+),1}^m = 0, \hat{I}_{(-),N+1}^m = 0, m = 0, 1, \dots, M, \quad (76)$$

а матричные функции $\hat{I}_{(-),1}^m$ и $\hat{I}_{(+),N+1}^m$ считаются заданными.

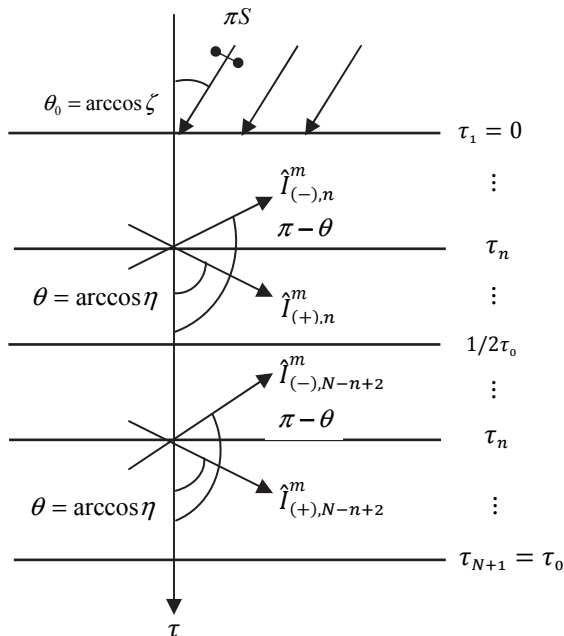


Рис. 4. Пространственно-угловая симметризация восходящих (-) и нисходящих (+) интенсивностей излучения в методе Ханта-Гранта на зеркально-симметричных оптических уровнях τ_n и τ_{N-n+2} в зеркальных направлениях визирования η_k и $-\eta_k$.

Вводя затем согласно [16] матричные линейные интегральные операторы $\hat{S}^m(\tau_n, \tau_{n+1}) = \hat{S}^m(n, n+1)$ и $\hat{\Sigma}^m(\tau_n, \tau_{n+1}) = \hat{\Sigma}^m(n, n+1)$, $m = \overline{(0, M)}$, $n = \overline{(1, N+1)}$, получаем, что в рассматриваемом методе решение исходной несимметризованной краевой задачи (7)-(8) сводится к нахождению матричных величин $\hat{I}_{(+),n}^m$ и $\hat{I}_{(-),n}^m$ из системы линейных интегральных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_{(+),n+1}^m \\ \hat{I}_{(-),n}^m \end{pmatrix} = \hat{S}_{(\pm)}^m(n, n+1) \begin{pmatrix} \hat{I}_{(+),n}^m \\ \hat{I}_{(-),n+1}^m \end{pmatrix} + \hat{\Sigma}_{(\pm)}^m(n, n+1), \quad (77)$$

$$m = 0, 1, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N+1.$$

При этом факторизация матричных линейных операторов $\hat{S}_{(\pm)}^m(n, n+1)$ трансформирует (77) в систему следующих уравнений:

$$\hat{I}_{(+),n+1}^m = \hat{t}^m(n+1, n) \hat{I}_{(+),n}^m + \hat{f}^m(n, n+1) \hat{I}_{(-),n+1}^m + \hat{\Sigma}_{(+)}^m(n+1, n), \quad (78)$$

$$\hat{I}_{(-),n}^m = \hat{f}^m(n+1, n) \hat{I}_{(+),n}^m + \hat{t}^m(n, n+1) \hat{I}_{(-),n+1}^m + \hat{\Sigma}_{(-)}^m(n, n+1), \quad (79)$$

где $m = \overline{(0, M)}$, $n = \overline{(1, N+1)}$, а вид симметричных операторов $\hat{t}^m = \hat{t}^m(n+1, n) = \hat{t}^m(n, n+1) = \hat{t}_0^m$ и $\hat{f}^m = \hat{f}^m(n+1, n) = \hat{f}_0^m$ определен в [16].

Таким образом, применение матричного метода Ханта-Гранта в его обычной трактовке приводит в итоге к решению алгебраической системы $2(N-1)$ матричных линейной уравнений относительно $2(N-1)$ искомым вектор-столбцов $\hat{I}_{(\pm),n}^m$ при граничных условиях (76) и заданных решениях $\hat{I}_{(-),1}^m$ и $\hat{I}_{(+),N+1}^m$ внешней задачи теории переноса излучения.

Используем теперь принцип зеркального отображения (7) и введённые выше фотометрические инварианты (1) применительно к рассматриваемому методу для зеркально-симметричных относительно середины слоя ($\frac{1}{2}\tau_0$) оптических уровней τ_n и τ_{N-n+2} , вводя при этом новые величины, обладающие свойством инвариантности в зеркально-симметричных направлениях визирования $(\eta_\kappa, -\eta_\kappa)$, $k = \overline{(1, K)}$:

$$\hat{V}_{n,(\pm)}^m = \hat{I}_{(+),n}^m \pm \hat{I}_{(-),N-n+2}^m, \quad (80)$$

$$\hat{W}_{n,(\pm)}^m = \hat{I}_{(-),n}^m \pm \hat{I}_{(+),N-n+2}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad n = \overline{(1, N+1)}, \quad (81)$$

при выполнении граничных условий $\hat{V}_{1,(\pm)}^m = 0$ и $\hat{W}_{N+1,(\pm)}^m = 0$. Отметим, что из соотношений (80)-(81) следует важное свойство эквивалентности введенных базовых величин $\hat{V}_{n,(\pm)}^m$ и $\hat{W}_{n,(\pm)}^m$, именно:

$$\hat{V}_{N-n+2,(\pm)}^m = \mp \hat{W}_{n,(\pm)}^m. \quad (82)$$

Используя данное соотношение инвариантности, получаем вместо (78)-(79) следующую систему матричных линейных уравнений для нахождения интенсивностей $\hat{I}_{(+),n}^m$ и $\hat{I}_{(-),N-n+2}^m$ на указанных выше зеркально-симметричных уровнях:

$$\hat{I}_{(+),n}^m = \hat{t}_0^m \hat{I}_{(+),n-1}^m + \hat{r}_0^m \hat{I}_{(-),n+1}^m + \hat{\Sigma}_{(+)}^m(n+1, n), \quad (83)$$

$$\hat{I}_{(-),N-n+2}^m = \hat{r}_0^m \hat{I}_{(+),N-n+2}^m + \hat{t}_0^m \hat{I}_{(-),N-n+2}^m + \hat{\Sigma}_{(-)}^m(N-n+3, N-n+2). \quad (84)$$

Складывая теперь (83) и (84), получаем согласно (80) - (81) для величин $\hat{V}_{n,(+)}^m$ соотношение:

$$\hat{V}_{n,(+)}^m = \hat{t}_0^m \hat{V}_{n-1,(+)}^m + \hat{r}_0^m \hat{W}_{n,(+)}^m + \hat{\Sigma}_{(+)}^m(n, n-1) + \hat{\Sigma}_{(-)}^m(N-3 + n, N-n+2). \quad (85)$$

Аналогично (83) - (84) для $\hat{I}_{(-),n}^m$ и $\hat{I}_{(+),N-n+2}^m$ находим:

$$\hat{I}_{(-),n}^m = \hat{r}_0^m \hat{I}_{(+),n}^m + \hat{t}_0^m \hat{I}_{(-),n+1}^m + \hat{\Sigma}_{(-)}^m(n+1, n), \quad (86)$$

$$\hat{I}_{(+),N-n+2}^m = \hat{t}_0^m \hat{I}_{(+),N-n+1}^m + \hat{r}_0^m \hat{I}_{(-),N-n+2}^m + \hat{\Sigma}_{(+)}^m(N-n+2, N-n+1). \quad (87)$$

Складывая далее (86) и (87), в соответствии с (81) находим для величин $\hat{W}_{(+),n}^m$ соотношение:

$$\hat{W}_{n,(+)}^m = \hat{t}_0^m \hat{W}_{n+1,(+)}^m + \hat{r}_0^m \hat{V}_{n,(+)}^m + \hat{\Sigma}_{(-)}^m(n+1, n) + \hat{\Sigma}_{(+)}^m(N-n+2, N-n+1). \quad (88)$$

Таким образом, в результате использования инвариантов (80)-(81) и их базового свойства (82) из соотношения (85) необходимо найти только $(N-1)$ неизвестных величин $\hat{V}_{2,(+)}, \hat{V}_{3,(+)}, \dots, \hat{V}_{N,(+)}$ при заданной величине $\hat{V}_{N+1,(+)}$ и выполнении граничного условия $\hat{V}_{1,(+)}^m = 0$. Аналогично из (86)-(87) и соотношения (88) при учёте (82) необходимо найти только $(N-1)$ искомым величин $\hat{W}_{2,(+)}, \hat{W}_{3,(+)}, \dots, \hat{W}_{N,(+)}$ при заданной величине $\hat{W}_{N+1,(+)}$ и выполнении граничного условия $\hat{W}_{N+1,(+)}^m = 0$. Отметим, что соотношения, подобные (85) и (88) получаются очевидным образом из (83)-(84) и (86)-(87) и для величин $\hat{V}_{n,(-)}^m$ и $\hat{W}_{n,(-)}^m$.

Следовательно, использование свойства эквивалентности (82), вытекающих из принципа зеркального отображения [7], позволяет получать системы матричных линейных уравнений для независимого

нахождения инвариантных величин $\hat{V}_{n,(\pm)}^m$ и $\hat{W}_{n,(\pm)}^m$, $m = 0, 1, \dots, M$ ранга не 2 ($N-1$), как в (78)-(79) при использовании классической версии метода Ханта-Гранта [16], а рангом в два раза меньше ($N-1$). Например, для нахождения величин $\hat{V}_{n,(\pm)}^m$ имеем системы уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{n,(\pm)}^m = & \hat{t}_0^m V_{n-1,(\pm)}^m \pm \hat{t}_0^m \hat{t}_0^m V_{N-n+1,(\pm)}^m + \hat{r}_0^m \hat{r}_0^m V_{n-1,(\pm)}^m \pm \\ & \hat{r}_0^m \hat{\Sigma}_{(-)}^m(n+1, n) + \hat{\Sigma}_{(+)}^m(N-n+2, N-n+1) + \\ & \hat{\Sigma}_{(+)}^m(n, n-1) + \hat{\Sigma}_{(-)}^m(N-n+3, N-n+2), \end{aligned} \quad (89)$$

где $n = 2, 3, \dots, N$.

Аналогичные системы уравнений при учете эквивалентного соотношения (80) справедливы и для величин $\hat{W}_{n,(\pm)}^m$.

Таким образом, использование принципа зеркального отображения (симметрии) [7] в традиционной схеме метода Ханта-Гранта [16] повышает его эффективность, уменьшая в два раза ранг основных систем матричных уравнений, необходимых для численного моделирования полей скалярного излучения в плоском однородном слое конечной оптической толщины τ_0 .

5. Заключение. Проведенное выше рассмотрение показало эффективность использования в теории переноса скалярного излучения принципа зеркального отображения [7]. При этом построение новых конструкций типа фотометрических инвариантов (1)-(2) позволяет модифицировать ее основные численно-аналитические методы и усовершенствовать алгоритмы их применения. В результате ранг систем линейных алгебраических уравнений и число неизвестных функций, необходимых для реализации указанных методов в процедурах численного моделирования полей излучения, уменьшаются вдвое по сравнению с классическими схемами, традиционно используемых в аналогичных исследованиях [11]. Кроме того, области определения текущих независимых переменных сужаются, например, $\{\tau_i \in [0, \tau_0]$ и $\eta_j \in [0, 1]\}$, или альтернативно $\{\tau_i \in [0, \frac{1}{2}\tau_0]$ и $\eta_j \in [-1, 1]\}$, вместо исходной области $\{\tau_i \in [0, \frac{1}{2}\tau_0]$ и $\eta_j \in [-1, 1]\}$.

В случае численного моделирования полей излучения природных сред, обладающих большой оптической толщиной $\tau_0 \gg 1$ (аэрозольные и облачные атмосферы Земли и планет, водные среды), или в случае сильно вытянутых индикатрисах рассеяния $P(\cos \gamma)$, когда в области малых углов $\gamma \approx 0^\circ$ выполняются условия $N \gg 1$ и $M \gg 1$, указанные обстоятельства обеспечивают большое преимущество в экономии информационно- вычислительных ресурсов ЭВМ (расчетное время, оперативная память и т.д.) Это существенно повышает общую эффективность прикладных исследований, связанных, например, с

решениями задач космической спектрофотометрии природных сред, атмосферной коррекцией и калибровкой спутниковых изображений Земли, а также с анализом больших объемов цифровой видеоинформации, получаемой в результате ее многоспектрального дистанционного зондирования [17].

В заключение следует также отметить, что проведенный выше анализ позволяет учитывать эффект поляризации многократно рассеянного излучения в плоском однородном слое конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$, ограниченном на уровне его нижней границы горизонтально-однородной подстилающей поверхности с произвольным законом отражения [9].

Литература

1. *Амбарцумян В.А.* Научные труды // Ереван. 1960. т. 1. 430 с.
2. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии // М.: ИЛ. 1953. 431 с.
3. *Соболев В.В.* Рассеяние света в атмосферах планет // М.: Наука. 1972. 335 с.
4. *Hulst H.C.* Multiple light scattering, Tables, formulas and applications // New-York: Academic Press. 1980. vol. 1-2. 739 p.
5. *Хюлст Г.С.* Рассеяние света малыми частицами // М.:ИЛ. 1961. 501 с.
6. *Смоктый О.И.* Моделирование полей излучения в задачах космической спектрофотометрии // Л.: Наука. 1986. 352 с.
7. *Smokty O.I.* Photometrical Invariants in the Radiative Transfer Theory // In: IGARSS'93. Kogakuin University. Tokyo. 1993. pp. 1960-1961.
8. *Smokty O.I.* Development of Radiative Transfer Theory on the Basis of Mirror Symmetry Principle // In: Current Problems in Atmospheric Radiation IRS2001. A. Deepak Publ. Co., Hampton. 2001. pp. 341-342.
9. *Smokty O.I.* Multiple Polarized Light Scattering in a Uniform Slab: New Invariant Constructions and Symmetry Relations // In: Current Problems in Atmospheric Radiation, IRS 2008. Amer. Inst. of Physics, New York. 2009. p. 97-100.
10. *Hovenier J.W.* A Unified Treatment of the Reflected and Transmitted Intensities of Homogeneous Plane-Parallel Atmosphere // In: Astron. and Astrophys. 1978. vol. 68. pp. 230-250.
11. Перенос излучения в рассеивающих и поглощающих средах. Стандартные методы расчета / под ред. Ж. Ленобль // Л.: Гидрометеоздат. 1990. 264 с.
12. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов // М.: ИЛ. 1960. 520 с.
13. *Mallikin T.M.* Radiative transfer in finite homogeneous atmospheres with anisotropic scattering: I. Linear singular equations // In: Astrophys J. 1964. vol. 139. pp. 379-396.
14. *Smokty O.I.* Applied Mathematical Problems of Satellite Data Fitting and Atmospheric Correction // In: Current Problems in Atmospheric Radiation, IRS 2000. A. Deepak Publ. Co., Hampton. 2001. pp. 433-437.
15. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса // М.: Мир. 1972. 384 с.
16. *Grant I.P., Hunt G.E.* Discrete Space Theory of Radiative Transfer Theory and its Application to Problems in Planetary Atmospheres // In: J. Atmos. Sci. 1969. vol. 26. pp. 963-972.
17. *Kondratyev K.Ya., Kozoderov V.V., Smokty O.I.* Remote Sensing of the Earth from Space: Atmospheric Correction // Springer-Verlag, Berlin-New York. 1992. 478 p.

References

1. Ambarzumian V.A. *Nauchnye trudy* [Scientific papers]. Erevan, Publ.Co., Acad. Sci., Armenia, 1961, vol. 1. 428p. (In Russ.).
2. Chandrasekhar S. *Perenos luchistoy jenergii* [Radiative transfer]. M.: IL. 1953. 431p. (In Russ.).

3. Sobolev V.V. *Rassejanie sveta v atmosferah planet* [Light Scattering in planetary atmosphere], M.: Nauka. 1972, 335p. (In Russ.).
4. Hulst H.C. Multiple light scattering: tables, formulas and applications. New-York: Academic press. 1980. vol. 1-2. 739p.
5. Hulst H.C. *Rassejanie sveta malymi chasticami* [Light scattering by small particles]. M.: IL. 1961. 501p. (In Russ.).
6. Smokty O.I. *Modelirovanie polej izlucheniya v zadachah kosmicheskoy spektrofotometrii* [Modeling of radiation fields in problems of space spectrophotometry]. Leningrad, Nauka. 1986. 352p. (In Russ.).
7. Smokty O.I. Photometrical invariants in the radiative transfer theory. In: IGARSS'93. Kogakuin University. Tokyo. 1993. pp.1969-1961.
8. Smokty O.I. Development of radiative transfer theory on the basis of mirror symmetry principle. In: Current Problems in atmospheric radiation IRS2001. A. Deepak Publ. Co. Hampton. 2001. pp. 341-342.
9. Smokty O.I. Multiple polarized light scattering in a uniform slab: new invariant constructions and symmetry relations. In: Current problems in atmospheric radiation, IRS2008. Amer. Inst. of Physics, New York. 2009. pp.97-100.
10. Hovenier J.W. A unified treatment of the reflected and transmitted intensities of homogeneous plane-parallel atmosphere. In Astron. and astrophys. 1978. vol. 68. pp. 230-250.
11. [Transfer in scattering and absorbing atmospheres: standard computational Procedures]. edited by Lenoble J. L.: Gidrometeoizdat, 1990. 264p. (In Russ.).
12. Davison B. *Teoriya perenosa nejtronov* [Neutron transport theory]. M.: IL. 1958. 520p. (In Russ.).
13. Mallikin T.M. Radiative transfer in finite homogeneous atmospheres with anisotropic scattering: I. Linear singular equations. In: Astrophys J. 1964. vol. 139. pp. 379-396.
14. Smokty O.I. Applied mathematical problems of satellite data fitration and atmospheric correction. In: Current problems in atmospheric radiation, IRS 2000. A. Deepak Publ Co., Hampton. 2001. pp.433-437.
15. Case K., Zweifel P. Linear transport theory, Addison -Wesley Publ. Co. Reading, Massachusetts. 1967. 384p. (In Russ.).
16. Grant I.P., Hunt G.E. Discrete Space Theory of Radiative Transfer Theory and its Application to Problems in Planetary Atmospheres. In: J. Atmos. Sci. 1969. vol. 26. pp. 963-972.
17. Kondratyev K.Ya., Kozoderov V.V., Smokty O.I Remote Sensing of the Earth from Space: Atmospheric Correction. Springer-Verlag, Berlin-New York. 1992. 478 p.

Смоктый Олег Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, академик Международной Академии Астронавтики (Франция), главный научный сотрудник лаборатории «Прикладная информатика» СПИИРАН. Область научных интересов: теория переноса излучения, моделирование полей излучения в задачах дистанционного зондирования Земли из космоса, космическая геоинформатика. Число научных публикаций — 270 научных трудов, в том числе 10 монографий, одного открытия и 6 изобретений. e-mail: soi@iias.spb.su СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ.

Smokty Oleg Ivanovich — Ph.D., Dr. Sci., professor, Honored scientist of Russian Federation, Full member of the International Academy of Astronautics, main researcher, Laboratory of Applied Informatics of SPIIRAS. Research interests: radiative transfer theory, radiation field modeling in problems of the Earth remote sensing from space, geoinformatics. The number of publications —270 scientific works, including 10 monographs, one discovery and 6 inventions. e-mail: soi@iias.spb.su, SPIIRAS, 14 line VO, 39, St. Petersburg, 199178, Russia.

Работа выполнена по Программе Фундаментальных исследований ОНИТ РАН и плану НИР СПИИРАН.

РЕФЕРАТ

Смоктый О.И. Усовершенствование методов численного моделирования полей излучения природных сред на основе принципа зеркальной симметрии.

Рассмотрена проблема численного моделирования полей излучения в плоском однородном слое конечной оптической толщины τ_0 , в котором происходят процессы многократного рассеяния солнечного излучения с индикатрисой рассеяния $P(\cos \Upsilon)$ и вероятностью выживания фотона при элементарном акте рассеяния, равной Λ . До недавнего времени все теоретические исследования и численное моделирование в области пространственно-углового распределения полей излучения на произвольной оптической глубине τ в таком слое проводились в рамках классических представлений теории переноса излучения [1] - [5] об их свойствах симметрии. При этом в ходе указанных исследований, во-первых, для аналитического описания полей излучения использовалась пара функций Амбарцумяна [1] или Chandrasekara [2]. Во-вторых, исследование пространственно-угловых свойств симметрии указанных полей излучения проводилось только для одного фиксированного оптического уровня с помощью индикатрисы рассеяния $P(\cos \Upsilon)$ и теоремы оптической взаимности [4], или на уровнях внешних границ слоя ($\tau = 0$) и ($\tau = \tau_0$) с помощью его коэффициентов яркости. Однако, как было показано автором [6]–[9], внутренние поля излучения плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$ обладают латентным скрытым свойством пространственно-угловой (зеркальной) симметрии, которое порождается только оптической однородностью указанного слоя. С математической точки зрения свойства зеркальной симметрии становятся очевидными, если ввести новые базовые элементы и конструкции полей излучения, именно фотометрические инварианты [6]. С физической точки зрения, свойства пространственно-угловой (зеркальной) симметрии наглядно проявляются при проведении симметризации положений внутренних и внешних переменных энергетических источников в слое, например, Солнца, относительно его середины (оптической оси симметрии) [10].

В настоящей работе рассмотрено применение принципа зеркального отражения [7] для усовершенствования численных методов моделирования полей скалярного излучения природных сред. Указанное рассмотрение проведено для таких известных и широко используемых на практике методов теории переноса излучения, как методы сферических гармоник [12], дискретных ординат [2], Гаусса - Зайделя [11], Кейза [15] и Ханта-Гранта [16].

SUMMARY

Smokty O. I. **Improvements of the Environment Radiation Fields Modeling Numerical Methods on the Basis of the Mirror Symmetry Principle.**

Until recently theoretical investigations and numerical modeling of the radiation fields angular spatial distribution in a uniform slab of a finite optical thickness have been carried out in the framework of traditional radiative transfer theory notions which cover the basic functions incending structure and properties of external and internal radiation fields symmetry [1 - 5]. Firstly, for the analytical description of radiation fields in the upward and downward directions the two classical basic functions are generally used: $\varphi(\eta, \tau_0)$ and $\psi(\eta, \tau_0)$ - Ambarzumian's functions, or $X(\eta, \tau_0)$ and $Y(\eta, \tau_0)$ - Chandrasekhar's functions. Secondly, the rigorous separation of angular variables in the brightness coefficients and investigation of their angular-spatial symmetry is carried out only for a unique fixed optical level in the slab. In this case, the symmetrical properties are usually considered in the sense of the optical reciprocity theorem, i.e. radiation fields do not change with the mutual translation of the detector's position and that of the radiation source. However, the problem of radiation fields angular and spatial symmetry is not limited to that. The radiation field in a uniform medium possesses the inner fundamental property of the angular spatial symmetry relative to the medium's natural optical axis of symmetry [6]. In the case of a uniform slab, the symmetry axis coincides with the geometrical middle of the slab. From the mathematical point of view, the above mentioned properties of symmetry give rise to new notions in the radiative transfer theory, namely new elements and constructions of the radiation field – so called photometrical invariants [7-9].

It should be noted such situations is determined only by the optical uniformity of the slab and by the mathematical properties of the adequate structure expressed by photometrical invariants. From the physical point of view the advantage of the introduced photometrical invariants becomes evident through symmetrization of independent radiation sources (e.g. the Sun), i.e. through their mirror images relative to the middle of the uniform slab. In a particular case of the uniform slab's external boundaries, the significance of the symmetrization of the Sun's radiation has been demonstrated in [10].

The present paper is devoted to the use of the main mathematical properties of the photometrical invariants for improving and simplification of the radiation modeling and numerical algorithms of the classical radiative transfer theory [11]. For example the following very known and widely applicable methods are considered : spherical harmonics [12] , discrete ordinates [2], Gauss-Seidel [11], Case [15] and Hunt-Grant [16].