УДК 621.382

П.С. Порецкий

РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Порецкий П.С. **Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики.**
Аннотация. Сообщение П.С.Порецкого, читанное 25 октября 1886г. на 60-м заседании секции физико-математических наук Общества Естествоиспытателей при Императорском Казанском Университете. Печатается в авторской редакции 1886 года (Порецкий П.С. Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики. - Собрание протоколов 60-го заседания секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете, Казань, 1886, С. 1-34.).
Ключевые слова: теория вероятностей, математическая логика.

Poreckii P.S. **Solving General Tasks in Probability Theory by Using Mathematical Logic.**
Abstract. Lecture of P.S. Poreckii hold on October, 25th 1886, at the 60th Meeting of Section for Physic and Mathematics of the Scientific Society of the Imperial Kazan University. It is published in the original edition of 1886 (Poretsky P.S. Solution of the general problems of probability theory with the help of mathematical logic. - The meeting protocols of the 60th meeting of the Section of Physics and Mathematics Society of Naturalists at Kazan University, Kazan, 1886, pp 1-34).
Keywords: theory of probabilities; mathematical logic.

В 1884 году я публиковал сочинение «О способах решения логических равенств», где изложена полная теория этих равенств.

Здесь я предполагаю применить эту теорию к решению следующей задачи Теории Вероятностей: определить вероятность сложного события, зависящего от данных простых событий, с помощью вероятностей всех или нескольких (произвольно избранных) из этих простых событий, а также вероятностей некоторых других сложных событий, предполагая, что данные события подчинены произвольному числу каких бы то ни было условий.

Очевидно, это есть самая общая задача относительно определения вероятностей событий. Сколько мне известно, в Теории Вероятностей нет способа решения этой задачи в общем виде. А потому решение ее с помощью Математической Логики не должно представляться излишним.

Решение этой задачи, данной Булем в его сочинении An investigation of the laws of thought, нельзя считать научным, как потому что оно основано на произвольной и чисто эмпирической теории логических равенств, так и потому, что самая идея о переходе от логических равенств к алгебраическим разработана у Буля неудачно. Таким образом, главная цель настоящей статьи – дать научную форму глубоко, но смутной и бездоказательной, идеи Буля о применимости Математич. Логики к Теории Вероятностей.

§1. Прежде всего возникает вопрос: возможно ли приложение учения о качественных символах (логических классах) к учению о символах количественных (вероятностях)? Отвечаем: возможно.

В самом деле, логическое равенство

$$f(a,b,c,\partial,...) = \varphi(a,b,c,\partial,...)$$

означает, что в пределах некоторого мира речи, все предметы, относящиеся к классу f, вполне тождественны с предметами класса φ, и что все отличие между классами f и φ заключается в различной классификации одних и тех же предметов. Если так, то *число* предметов, содержащихся в классах f и φ, должно быть одно и то же, т. е. напр.

$$N[f(a,b,c,\partial,...)] = N[\varphi(a,b,c,\partial,...)].$$

Вот чисто математическое равенство, прямо вытекающее из исходного логического. Отсюда уже легко перейти и к отношению между вероятностями. Если означим через $N(1)$ число всех предметов мира речи и назовем отношение $N(f)/N(1)$, т.е. вероятность класса f, символом $P(f)$, то понятно, что

$$P[f(a,b,c,\partial,...)] = P[\varphi(a,b,c,\partial,...)].$$

И так, если два класса логически равнозначны, то их вероятности равны между собою.

Отсюда открывается следующий общий путь для определения вероятностей: найти логическую связь между событием, которого вероятность ищется, и другими событиями, вероятности которых даны, а затем сделать *переход* от логического равенства между событиями к алгебраическому равенству между их вероятностями.

Построением правил для такого перехода от логического равенства к соответственному алгебраическому нам и предстоит теперь заняться.

§2. Пусть логические символы $a,b,c,...$ означают простые события. В таком случае, логические отрицания тех же символов, т.е.

$a_o, b_o, c_o, \ldots$, должны означать соответственно: всякое, в пределах мира речи, событие, только не a; всякое событие, кроме b, и т.д. Затем, логические суммы в роде $a+b, a+b_o$ и т.д. должны означать сложные события, состоящие: первое - в наступлении или a, или b; второе – в наступлении или a, или всякого события, кроме b, и т.д. Наконец, логические произведения вроде ab, ab_o и т.д. должны означать сложные события, состоящие: первое – в совпадении событий a и b, второе – в совпадение события a с каким угодно событием, кроме b, и т.д.

Понятно, что например, логическое выражение

$$a + b(c_o + \partial_o) + b_o \partial_o$$

означает сложное событие, которое наступает: во 1-х при наступлении события a; во 2-х, при совпадении события b или с событием не-c, или же с событием не-∂; и наконец, в 3-х, при совпадении события не-b с событием не-∂.

§3. Из Теории вероятностей известно, что вероятность ненаступления события равна единице (достоверности) без вероятности его наступления.

Если так, то

$$P(a_o) = 1 - P(a).$$

Точно также, например,

$$P(b_o) = 1 - P(b).$$

и пр.

§4. Далее, из Теории Вероятностей известно, что если два события несовместны, то вероятность, что случится то или другое из них, равна сумме их отдельных вероятностей. Поэтому, если логические классы m и n дисъюнкты, т.е. не имеют общих предметов, (причем $mn = 0$), то

$$P(m+n) = P(m) + P(n).$$

Это правило применимо к какому угодно числу несовместных одно с другим событий. Для возможности пользоваться этим правилом необходимо уметь каждый логический многочлен

$$A + B + C + D + \ldots$$

приводить к дисъюнктному виду, т.е. к виду

$$A + A_o B + A_o B_o C + A_o B_o C_o D + \ldots,$$

где A_o есть отрицание A, B_o – отрицание B и т.д. Оба написанные многочлена логически равнозначны, но отличаются тем, что к первому из них не применимо предыдущее правило, тогда как во второму применимо.

И так, каждое сложное событие, имеющее вид суммы, мы всегда можем выразить так, что его вероятность разобьется на сумму вероятностей других, более простых событий. Напр., вероятность

$$P(A+B+C+D),$$

будучи приведена к виду

$$P(A+A_oB+A_oB_oC+A_oB_oC_oD),$$

разбивается на сумму вероятностей:

$$P(A)+P(A_oB)+P(A_oB_oC)+P(A_oB_oC_oD).$$

§5. Затем, из Теории Вероятностей известно, что если два и более события суть независимы, то вероятность их совпадения равна произведению их отдельных вероятностей. Это означает, что если $a,b,c,...$ суть простые события, не связанные между собою никаким логическим отношением, то

$$P(abc...)=P(a)P(b)P(c)...$$

§6. Если так, то вероятность приведенного к дисъюнктному виду логического многочлена

$$A+A_oB+A_oB_oC+...,$$

не подчиненного никаким условиям, может быть изображена так:

$$P(A)+P(A_o)P(B)+P(A_o)P(B_o)P(C)+...,$$

т.е. получается из выражения многочлена простою заменой классов $A,B,C,...$ и их отрицаний вероятностями тех и других.

Отсюда видим, что абсолютная вероятность всякой отдельной логической функции

$$f(a,b,c,\partial,...),$$

приведенной предварительно к дисъюнктному виду, есть

$$f[P(a),P(b),P(c),...].$$

В первом из этих выражений f означает совокупность *логических* действий над качеств. символами $a,b,c,...$; во втором то же f означает совокупность *алгебраических* действий над количеств. символами $P(a),P(b),P(c),...$.

Пример. Если вероятности простых событий x и y суть $P(x)=p$, $P(y)=q$, то вероятность сложного события xy_o+x_oy, уже имеющего дисъюнктный вид, есть $p(1-q)+(1-p)q$. Вероятность же сложного события $x+y$, которое, по приведении к дисъюнктному виду, есть $x+x_o y$ или $y+y_o x$ выразится так: $p+(1-p)q$, или $q+(1-q)p$.

Так делается переход от выражения отдельной логической функции к выражению абсолютной её вероятности.

§ 7. Понятно теперь, что для перехода от логического равенства $f=\varphi$ к отношению между вероятностями входящих туда классов, надо привести обе функции f и φ к дисъюнкткому виду и затем заменить в обеих частях равенства все качественные символы $a,b,c,...$ символами количественными $P(a),P(b),...$

Для примера превратим логическое равенство

$$ab+c\partial=ac=b\partial$$

в отношение между вероятностями, принимая

$$P(a)=p,\ P(b)=q,\ P(c)=r,\ P(\partial)=s\ .$$

Надо привести к дисъюнктному виду обе части исходного равенства. Имеем:

$$ab+(ab)_o c\partial=ac+(ac)_o b\partial;$$
$$ab+(a_o+b_o)c\partial=ac+(a_o+c_o)b\partial;$$
$$ab+(a_o+ab_o)c\partial=ac+(a_o+ac_o)bd;$$
$$ab+a_o c\partial+ab_o c\partial=ac+a_o b\partial+ac_o bd.$$

В последнем равенстве обе части состоят из членов, дисъюнктных между собою, а потому, делая от него переход к отношению между вероятностями, получим:

$$pq+(1-p)rs+p(1-q)rs=pr+(1-p)qs+p(1-r)qs\ .$$

§ 8. Хотя, таким образом, при операциях над логическими равенствами мы можем в любой момент сделать переход к отношениям между вероятностями; однако, при решении задачи об определении вероятности одного события посредством вероятностей других событий, всего натуральнее поступать так: найти из всей совокупности данных логич. условий определение первого события с помощью остальных и уже затем сделать переход к вероятностям. Этого приема мы и будем держаться.

§ 9. Доселе мы вели речь об абсолютных вероятностях. Обращаемся к вероятностям относительным.

В Теории Вероятностей доказывается следующая истина: вероятность, что если событие ***A*** случится, то и событие ***B*** тоже случится, равна вероятности совпадения событий ***A*** и ***B***, разделенной на вероятность события ***A***, т. е. равна дроби $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

Поэтому, если $A = f(a,b,c,\partial,...)$, $B = \varphi(a,b,c,\partial,...)$, то искомая относительная вероятность получится, если в выражение произведения f и φ, приведенного к дисъюнктному виду, заменим $a,b,c,...$ их абсолютными вероятностями и полученный результат разделим на выражение функции f, приведенное к дисъюнктному виду, причем в нем надо также заменить все качественные символы количественными.

И так, искомая относит. вероятность будет:

$$\frac{[f(a,b,c,...)\varphi(a,b,c,\partial...)]}{[f(a,b,c,\partial...)]},$$

где заключение в прямые скобки означает упомянутую замену.

Для примера, полагая $P(x) = p, P(y) = q, P(z) = r$, найдем вероятность, что если случится событие

$$xy_o + x_o y,$$

т.е. одно из событий x и y , но не оба вместе, то случится также и событие

$$yz_o + y_o z,$$

т.е. одно из событий y и z , но не оба вместе.

В данном случае

$$f(x,y,z) = xy_o + x_o y, \quad \varphi(x,y,z) = yz_o + y_o z$$
$$f(x,y,z)\varphi(x,y,z) = xy_o z + x_o yz_o .$$

След. искомая относит. вероятность есть:

$$\frac{[f\varphi]}{[f]} = \frac{p(1-q)r + (1-p)q(1-r)}{p(1-q) + q(1-p)} .$$

§ 10. Предположим теперь, что даны относительные вероятности простых событий $a,b,c,...$, высчитанные так, чтобы удовлетворялся ряд условий

$$f'(a,b,c,...) = \varphi'(a,b,c,...), \; f'' = \varphi'', \; f''' = \varphi''',...,$$

и требуется найти абсолютные вероятности тех же простых событий.

Заметим, прежде всего, что каждое логическое равенство

$$f(a,b,c,...) = \varphi(a,b,c,...)$$

может быть тождественно заменено равенством

$$1 = f\varphi + f_o\,\varphi_o\,,$$

где 1 означает логический мир речи (в данном случае, мир всех событий, о которых идет речь), f_o и φ_0, суть отрицания f и φ.

Кроме того, известно, что вся совокупность данных условий вполне равнозначна с одним условием:

$$1 = (f'\varphi' + f'_o\,\varphi'_o)(f''\varphi'' + f''_o\,\varphi''_o)(f'''\varphi''' + f'''_o\,\varphi'''_o)\ldots,$$

которое можно сокращенно представить под формой

$$1 = M(a, b, c, \partial\ldots).$$

В этом равенстве, тождественно заменяющем все данные условия, функция M называется логическим миром речи задачи или полной логич. единицей задачи.

И так, подчинение классов $a, b, c, \ldots$ всей совокупности исходных условий вполне равнозначно с подчинением их одному условию $1 = M(a, b, c, \partial\ldots)$, составленному по правилу указанному выше.

Пусть теперь $p, q, r, \ldots$ означают вероятности событий $a, b, c, \ldots,$ подчиненных условию $1{=}M$, и пусть $p', q', r', \ldots$ абсолютные вероятности тех же событий. Так как первые из этих вероятностей означают вероятности, что при наступлении события M (мира речи) случатся события $a, b, c, \ldots,$ то, по доказанному ранее, для определения абсолютных вероятностей $p', q', r', \ldots,$ будем иметь:

$$p = \frac{[aM]}{[M]},\ \ q = \frac{[bM]}{[M]},\ \ r = \frac{[cM]}{[M]}, \ldots,$$

где в правых частях классы $a, b, c, \ldots$ должны быть заменены их абсолютными вероятностями $p', q', r', \ldots,$ которые и найдутся чрез решение системы полученных алгебраич. уравнений.

Возьмем примерь. Пусть при вынимании из урны шаров обращали внимание только на случаи, когда вынутый шар был или белый, или мраморный (или то и другое вместе), и пусть, при этом условии, найдены: p -вероятность белого шара, q - мраморного. Найти абсолютные их вероятности p' и q'.

Построим сначала условие, с подчинением которому были найдены вероятности p и q. Пусть x есть вынутие белого шара, y - мраморного. Если при высчитывании вероятностей исключались случаи, когда вынутый шар был не белый и не мраморный, то это значит, что было соблюдаемо условие:

$$x_o y_o = 0\,,$$

или, что тоже:

$$1 = xy + x_o y + x y_o\,.$$

И так, в данном случае

$$M(x,y) = xy + x_o y + x y_o$$

$$xM(x,y) = xy + x y_o = x$$

$$yM(x,y) = xy + x_o y = y\ .$$

А потому имеем:

$$p = \frac{[Mx]_{\,x=p',y=q'}}{[M]_{\,x=p',y=q'}} \quad , q = \frac{[My]_{\,x=p',y=q'}}{[M]_{\,x=p',y=q'}}\,,$$

или:

$$p = \frac{p'}{p'q' + p'(1-q') + q'(1-p')},\ \ q = \frac{q'}{p'q' + p'(1-q') + q'(1-p')}\,.$$

Через решение этих двух алгебр. уравнений получим

$$p' = \frac{p+q-1}{q},\ \ q' = \frac{p+q-1}{p}\,.$$

§ 11. Согласно с тем, что высказано ранее, для определения вероятности одного события через вероятности других событий, нам надо прежде всего логически выразить первое через остальные. Это нас заставляет сказать несколько слов о приемах определения одного логического класса (простого или сложного) через все или некоторые из прочих.

Пусть требуется определить простой класс a через все прочие классы $b, c, \partial, \ldots$, связанные с a и между собою рядом условий (посылок):

$$f' = \varphi',\ f'' = \varphi'',\ f''' = \varphi''',\ \ldots\ .$$

Все эти условия тождественно могут быть заменены одним:

$$1 = M(a, b, c, \partial, ..)\,.$$

С другой стороны, это последнее равенство может быть тождественно замещено следующими тремя:

$$a = aM(1, b, c, \partial \ldots) = aM(1)$$

$$a = a + M(1, b, c,, \ldots)M_o(0, b, c, \ldots) = a + M(1)M_o(0)\ \cdot$$

$$1 = M(1, b, c,, \ldots) + M_o(0, b, c, \ldots) = M(1) + M_o(0).$$

Здесь $M(1)$ есть результат замещения в функции $M(a, b, c, \ldots)$ класса a единицей, а его отрицания a_o нулем, $M(0)$ есть результат замещения в $M(a,b,c,...)$ класса a нулем, а его отрицания a_o единицей; $M_o(0)$ есть отрицание функции $M(0)$ или, что тоже, результат замещения в отрицании функции M, т. е. в функции $M_o(a,b,c,...)$, класса a нулем, а его отрицания a_o единицей.

Из последних трех равенств первое показывает, что a содержится в $M(1)$, второе - что a содержит в себе $M_o(0)M(1)$. Вот почему эти два равенства можно заменить неравенствами

$$a < M(1),\ a > M_o(0)M(1),$$

которые надо понимать в смысле: a не больше $M(1)$ и не меньше $M_o(0)M(1)$.

Наконец, третье равенство $1 = M(1) + M(0)$, зависящее от классов $b,c,\partial,...,$ но не содержащее класса a, представляет условие, которому, в силу первоначальных условий, подчинены те две функции $M(1)$ и $M_o(0)M(1)$, с помощью которых определяется a.

В случае, когда эти две функции логически равнозначны, т. е. когда

$$M_o(0)M(1) = M(1),$$

два неравенства, определяющие a, суть:

$$a > M(1),\ a < M(1).$$

т.е. доставляют одно равенство:

$$a = M(1).$$

Если желаем определить a из того же уравнения $1 = M(a,b,c,...)$ не через все, но через некоторые из классов $b,c,\partial,...$, то все лишние классы надо исключить из равенства $1 = M(a,b,c,\partial,...)$. Для этого исключения достаточно заменить в равенстве $1 = M(a,b,c,...)$ все исключаемые классы, а также их отрицания, единицами. Пусть результат исключения будет: $1 = M'$, где M' зависит от a и некоторых из прочих классов. Затем останется определить a из равенства $1 = M'$ совершенно так, как мы выше определяли его из равенства $1 = M$.

Так определяется простой класс через все или некоторые прочие простые классы на основании какого бы то ни было числа данных логических условий.

§ 12. Обращаемся к определению сложных классов, т. е. функций.

Легко показать, что логическая функция может быть выражена через простые классы (все или некоторые) даже тогда, когда эти последние не подчинены никаким условным равенствам.

В самом деле, пусть даны *n* простые классы $a, b, c, ...,$ не связанные между собою никакими условиями, и сложный класс ***A***, где ***A*** означает определенную функцию тех же классов. В таком случае, положив $A = w$, или, что тоже, $1 = Aw + A_o w_o$, можем сказать, что мы имеем *n + 1* простых классов: *w,a,b,c,…*, которые подчинены условию

$$1 = Aw + A_o w_o = M(w, a, b, c, ...).$$

Из этого условия и может быть определен простой класс *w* (т. е. функция **A**) через все или некоторые из прочих классов по правилам, указанным выше.

Таким образом, рассматривание хотя бы только одной логической функции совместно с независимыми простыми классами обращает задачу из безусловной в условную.

Если, рядом с *n* независимыми простыми классами $w, a, b, c, ...,$ мы начнем рассматривать *m* функций $U, V, W, ...$, то, введя ряд обозначений

$$U = u, V = v, \quad W = w, ...,$$

мы получаем задачу об $n + m$ простых классах: $a, b, c, ..., u, v, w, ...,$ подчиненных условию:

$$1 = (uU + u_o U_o)(v V + v_o V_o)(wW + w_o W_o)... = M(a, b, c, ..., u, v, w, ...),$$

из которого по предыдущему и может быть логически определен любой из классов $u, v, w, ...$ с помощью всех или некоторых из прочих классов, т. е. найдется любая из функций $U, V, W, ...$ с помощью всех или некоторых из данных простых классов и всех или некоторых из прочих функций.

Наконец, если простые *n* классы $a, b, c, д, ...$ суть зависимые, связанные между собою *p* условиями

$$A' = B', \quad A'' = B'', \quad A''' = C''', ...,$$

где $A', B', A'', B'', ...$ суть функции $a, b, c, д, ...,$ то при определении одной из ряда *m* функций

$$U, V, W, ...$$

мы будем иметь задачу об $n + m$ простых классах: $a, b, c, д, ..., u, v, w, ...,$ связанных между собою $p + m$ условиями

$$A' = B', \quad A'' = B'', ..., u = U, \quad v = V, \quad w = W, ...,$$

или, что тоже, одним условием:

$$1=(A'B'+A'_o B'_o)(A''B''+A''_o B''_o)\dots(uU+u_oU_o)(vV+v_0V_o)\dots,$$

которое можно изобразить так:

$$1=M(a,b,c,\partial,\dots,u,v,w,\dots).$$

Отсюда и может быть найдена по предыдущему любая из функций $U,V,W,\dots$ с помощью всех или некоторых из прочих функций, а также всех или некоторых из простых классов $a,b,c,\partial,\dots,$ причем все исходные условные равенства будут приняты во внимание.

§ 13. Вот мы имеем все данные для решения поставленной в начале статьи общей задачи об определении вероятности одной функции (одного сложного события) посредством вероятностей всех или некоторых прочих функций и простых классов, предполагая, что последние связаны между собою каким бы то ни было числом условных равенств.

Пусть, поступая по предыдущему, мы пришли к равенству

$$1=M(a,b,c,\dots,u,v,w,\dots),$$

из которого уже исключены все классы и функции, вероятности которых не должны быть принимаемы во внимание при определении вероятности функции U с помощью вероятностей прочих классов $a,b,c,\dots,v,w,\dots$

В таком случае мы получим:

$$u<M(1), u>M_o(0)M(1),$$

где $M(1)$ и $M(0)$ суть результаты замещения в функции M класса u единицей и нулем соответственно, (а его отрицания нулем и единицей), причем между прочими классами $a,b,c,\dots,v,w,\dots$ устанавливается отношение:

$$1=M(1)+M_o=K.$$

Остается перейти к определению вероятности u. Пусть вероятности классов $a,b,c,\dots,v,w,\dots$, найденные с соблюдением всех первоначальных условий задачи, а следовательно также подчиненные и условию $1=K$, суть $p,q,r,\dots\alpha,\beta,\dots$ В таком случае их абсолютные вероятности, которые мы назовем через $p',q',r',\dots\alpha',\beta',\dots,$ надо искать из условий:

$$p=\frac{[aK]}{[K]},\ q=\frac{[bK]}{[K]},\dots,\alpha=\frac{[vK]}{[K]},\beta=\frac{[wK]}{[K]},\dots,$$

где в правых частях, по приведению числителей и знаменателей к дисъюнктному виду, все качественные символы $a,b,c,\dots,v,w,\dots$ должны быть заменены количественными символами $p',q',r',\dots\alpha',\beta',\dots$

Найденные отсюда величины $p', q', r', ... \alpha', \beta', ..,$ будучи подставлены, вместо $a, b, c, ..., v, w, ...$ в правые части неравенств

$$u < M(1), u > M_o(0)M(1),$$

доставят нам абсолютные вероятности функций $M(1)$ и $M(0)M(1)$, т.е. пределы для абсолютной вероятности функции *u*.

Однако, нам нужно знать не абсолютную, но относительную вероятность функции *u,* а именно такую, в которой были бы приняты во внимание все условные равенства задачи, а след. также и условие $1 = K$. В силу доказанного ранее, такого рода относительные вероятности функций $M(1)$ и $M(0)M(1)$ суть соответственно:

$$\frac{[M(1)K]}{[K]}, \ \frac{[M_0(0)M(1)K]}{[K]},$$

где все качественные символы $a, b, c, ..., v, w, ...$ должны быть заменены соответственными абсолютными вероятностями $p', q', r', ... \alpha', \beta', ...$ Но

$$K = M(1) + M(0),$$

а потому

$$M(1)K = M(1)[M(1) + M(0)] = M(1)$$
$$M_o(0)M(1)K = M_o(0)M(1)[M(1) + M(0)] = M_o(0)M(1).$$

Следовательно, относительные вероятности функций $M(1)$ и $M_o(0)M(1)$ суть

$$\frac{[M(1)K]}{[K]} \ и \ \frac{[M_0(0)M(1)K]}{[K]}.$$

Если так, то, называя искомую относительную вероятность функции *u* через $P(u)$, получим

$$P(u) < \frac{[M(1)]}{[K]}, \quad P(u) > \frac{[M_0(0)M(1)]}{[K]}, \tag{1}$$

где все качественные символы $a, b, c, ..., v, w, ...$ должны быть заменены символами $p', q', r', ... \alpha', \beta', ...$ После такой замены вместо этих последних символов должны быть подставлены их значения, выраженные с помощью $p, q, r, ... \alpha, \beta, ..$ на основании равенств:

$$p = \frac{[aK]}{[K]}, \ q = \frac{[bK]}{[K]}, ..., \alpha = \frac{[vK]}{[K]}, \beta = \frac{[wK]}{[K]}, ..., \tag{2}$$

в которых предварительно должно быть сделано то же замещение символов $a, b, c, ..., v, w, ...$ символами $p', q', r', ... \alpha', \beta', ...$ Но если в формулах (1) и (2) качественные символы $a, b, c, ..., v, w, ...$ заменяются количественными символами $p', q', r', ... \alpha', \beta', ...,$ которые вслед затем исключаются из (1) с помощью (2), то понятно, что нет надобности делать означенное замещение на самом деле, а совершенно достаточно начать считать в (1) и (2) качественные символы $a, b, c, ..., v, w, ...$ как бы количественными и исключить их, по правилам Алгебры, из (1) с помощью (2). Таким образом, окончательная форма решения задачи об определении $P(u)$ с помощью относит. вероятностей $p, q, r, ... \alpha, \beta, ...$ есть такова: с помощью равенств:

$$\mathrm{K} = \mathrm{M}(1) + \mathrm{M}(0) = \frac{\mathrm{aK}}{\mathrm{p}} = \frac{bK}{q} = ... = \frac{vK}{\alpha} = \frac{wK}{\beta} = ...,$$

где, по приведении всех многочленов к дисъюнктному виду, символы $a, b, c, ..., v, w, ...$ принимаются алгебраическими, исключить все эти символы из пары неравенств:

$$P(u) < \frac{M(1)}{K}, \ P(u) > \frac{M_0(0)M(1)}{K},$$

в которых тоже все многочлены должны быть приведены к дисъюнктному виду, символы же $a, b, c, ..., v, w, ...$ трактуются количественными.

Таков общий способ решения задачи, формулированной в начале статьи. Как видим, вообще для искомой вероятности $P(u)$ получаются только пределы, между которыми она содержится; и только тогда, когда

$$M_0(0)M(1) = M(1),$$

получается точное определение $P(u)$, именно:

$$P(u) = \frac{M(1)}{K}.$$

§ 14. Обращаемся к примерам.

Пример 1-й. Пусть вероятность, что умрет в таком-то году или ***A***, или ***B***, (или оба), есть *p*; вероятность, что не умрет в том же году или ***A***, или ***B*** (или оба), есть *q*. Найти вероятность, что умрет в том же году только один из них (т. е. или ***A***, при чем ***B*** останется жив, или обратно).

Пусть *x* событие смерти ***A***, *y* - смерти ***B***.

Даны: $P(x + y) = p, \ P(x_o + y_o) = q$. Ищется $P(xy_o + x_o y)$.

Здесь мы имеем 3 функции. Положим:

$$x + y = s, \quad x_o + y_o = t, \ xy_o + yx_o = w.$$

Задачу можно считать содержащей пять простых классов, связанных этими тремя условиями, или, что тоже, одним следующим:

$$1=[s(x+y)+sx_o y_o][t(x_o+y_o)+t_o xy]\cdot$$
$$\cdot[w(xy_o+x_o y)+w_o(x_o y_o+xy)]=$$
$$=stwxy_o+stwx_o y+st_o w_o xy+s_o tw_o x_o y_o\ .$$

Нам надо найти из этого равенства выражение для w черезъ s и t; лишние классы x и y надо исключить (что достигается подстановкою: $x=1,\ y=1,\ x_o=1,\ y_o=1$). Результат этого исключения есть:

$$1=M(s,t,w)=stw+st_o w_o+s_0 tw_o=M(w),$$

откуда

$$M(1)=st,\ \ M(0)=st_o+s_o t,\ M_o(0)=st+s_o t_o\ ,$$
$$M_o(0)M(1)=st,\ \ k=M(1)+M(0)=s+s_o t,\qquad ,$$
$$Ks=s,\ \ Kt=ts+ts_o=t.$$

Так как в данном случае $M_o(0)M(1)$ равно $M(1)$, то два неравенства, определяющие функцию w, сводятся на одно равенство

$$w=M(1)=st\ .$$

И действительно, произведение $s=x+y$ на $t=x_o+y_o$ есть $w=xy_o+x_o y$.

И так, искомая вероятность $P(w)$ определится равенством

$$P(w)=\frac{M(1)}{K}=\frac{st}{s+s_0 t}\ ,$$

после исключения из него, считаемых количественными, символов s и t с помощью равенств:

$$K=s+s_o t=\frac{s}{p}=\frac{t}{q}\ .$$

Из этих равенств имеем:

$$p=\frac{s}{K},\ \ q=\frac{t}{K},\ \ p+q=\frac{s+t}{K},\ \ p+q-1=\frac{s+t-K}{K}=$$
$$=\frac{s+t-(s+(1-s)t)}{K}=\frac{t-t+ts}{K}=\frac{ts}{K}.$$

Следовательно, окончательно:

$$P(w)=p+q-1\ .$$

Для поверки заметим следующее. Если $P(x+y)=p$ то $P[(x+y)_o]=P(x_o y_o)=1-p$. Точно так же, если $P(x_o+y_o)=q$, то $P(xy)=1-q$.

След.

$$P(xy + x_o y_o) = P(xy) + P(x_o y_o) = 2 - p - q \ ,$$

а потому

$$P(xy_o + x_o y) = P[(xy + x_o y_o)_o] = 1 - [2 - p - q] = p + q - 1 \, ,$$

результат, вполне согласный с найденным выше.

Пример 2-ой. Пусть вероятность, что свидетель ***A*** показывает истину, есть *p*; вероятность, что свидетель ***B*** показываете истину, есть *q*; вероятность несовпадения их показаний есть *r*. Найти вероятность, что если их показания совпадают, то получается истина.

Пусть классы случaed, когда свидетели *A* и *B* соответственно показывают истину, суть *x* и *y*. Даны:

$$P(x) = p, P(y) = q, \ P(xy_o + x_o y) = r \ .$$

Ищется отношение

$$\frac{P(xy)}{P(xy + x_o y_o)} = \frac{P(xy)}{1 - r} \ .$$

Очевидно, достаточно найти только $P(xy)\,P(xy)$ посредством *p, q* и *r*. Пусть

$$xy_o + x_o y = s, \quad xy = w \ .$$

Совокупность этих двух условий равнозначна с одним равенством:

$$1 = ws_o xy + w_o (sx_o y + s_o x_o y_o + sxy_o) \ .$$

Вот какому условию подчинена данная задача о четырёх простых классах *x,y,s,w*. Требуется определить *w* через все прочие классы.

Имеем:

$$1 = ws_o xy + w_o (sx_o y + s_o x_o y_o + sxy_o) = M(w),$$

$$M(1) = s_o xy, \ M(0) = s(x_o y + xy_o) + s_o x_o y_o,$$

$$M_o(0) = s(xy + x_o y_o) + s_o (x + y), \ M_o(0) M(1) = s_0 xy = M(1),$$

$$K = M(1) + M(0) = s_o xy + s_o x_o y_o + sx_o y + sxy_o.$$

Так как $M_o(0) M(1) = M(1) = s_o xy$, то, вместо двух неравенств, *w* определяется одним равенством

$$w = s_o xy \ .$$

Кроме того,

$$Kx = s_o xy + sxy_o, \ Ky = s_o xy + sx_o y, Ks = sx_o y + sxy_o \ .$$

Считая *x, y* и *s* количественными символами, нам надо исключить их из формулы:

$$P(w) = \frac{s_o xy}{K}$$

с помощью отношений

$$\frac{xys_0 + xy_0 s}{p} = \frac{xys_0 + x_0 ys}{q} = \frac{x_0 ys + xy_0 s}{r} = K = s_0 xy + s_0 x_0 y_0 + sx_0 y + sxy_0 .$$

Имеем:

$$r = \frac{sx_o y}{K} + \frac{sxy_o}{K},$$

$$q = \frac{s_o xy}{K} + \frac{sx_o y}{K},$$

$$p = \frac{s_o xy}{K} + \frac{sxy_o}{K} = \frac{s_o xy}{K} + (r - \frac{sx_o y}{K}) = \frac{s_o xy}{K} + r + \frac{s_o xy}{K} - q .$$

След.

$$\frac{s_o xy}{K} = \frac{p+q-r}{2}.$$

А потому окончательно:

$$P(w) = \frac{p+q-r}{2},$$

$$\frac{P(xy)}{P(xy + x_o y_o)} = \frac{p+q-r}{2(1-r)}.$$

Пример 3-й. Пусть из наблюдений относительно эпидемий в какой-нибудь местности найдено, что p есть вероятность посещения отдельного дома горячкой, q - холерой, r есть вероятность непосещения дома обеими болезнями при удовлетворительности санитарных его условий.

Найти вероятность неудовлетворительности санитарных условий отдельного дома в той же местности.

Пусть x - посещение дома горячкой, y холерой, z - неудовлетворительность санитарных условий дома. Даны:

$$P(x) = p,\ \ P(y) = q,\ \ P(x_0 y_o z_0) = r .$$

Найти $P(z)$. Пусть

$$x_0 y_o z_0 = w .$$

Условие, которому подчинена данная задача о четырех простых классах *x,y,z,w,* есть:

$$1 = wx_o y_o z_o + w_o(x + y + z) = F(z) .$$

Отсюда надо найти z посредством x,y,w.

Имеем:

$$F(1) = w_o,\ \ F(0) = wx_o y_o + w_o(x + y)$$

$$F_o(0) = w(x + y) + w_o x_o y_o,\ \ F_o(0)F(1) = w_o x_o y_o .$$

Следовательно

$$z < w_o,\ z > w_o x_o y_o.$$

Кроме того,

$$K = F(1) + F(0) = w_o + wx_o y_o + w_o(x + y) = w_o + wx_o y_o,$$

$$Kx = xw_o,\ ky = yw_o, Kw = wx_o y_o.$$

Надо исключить, считаемые количественными, символы *w,x,y* из неравенств

$$P(z) < \frac{w_0}{K},\quad P(z) > \frac{w_o x_o y_o}{K}$$

с помощью отношений:

$$\frac{xw_0}{p} = \frac{yw_0}{q} = \frac{wx_0 y_0}{r} = K = w_o + wx_o y_o.$$

Имеем:

$$w_o = \frac{wx_o y_o}{r} - wx_o y_o = \frac{wx_o y_o(1-r)}{r} = K(1-r); \frac{w_o}{K} = 1 - r\ ;$$

$$p + r = \frac{xw_o + wx_o y_o}{K}\ ; 1 - p - r = \frac{K - xw_o - wx_o y_o}{K} = \frac{w_o - xw_o}{K} = \frac{x_o w_o}{K}\ ;$$

$$q + r = \frac{yw_o + wx_o y_o}{K}\ ; 1 - q - r = \frac{K - yw_o - wx_o y_o}{K} = \frac{w_o - yw_o}{K} = \frac{y_o w_o}{K}\ ;$$

$$(1 - p - r)(1 - q - r) = \frac{w_o^2 x_o y_o}{K^2}\ ;$$

$$\frac{(1 - p - r)(1 - q - r)}{1 - r} = \frac{w_o^2 x_o y_o}{K^2} \cdot \frac{K}{w_o} = \frac{w_o x_o y_o}{K}.$$

А потому окончательно:

$$P(z) < 1 - r,\quad P(z) > \frac{(1 - p - r)(1 - q - r)}{1 - r}.$$

Пример 4-й. Пусть относительно шаров, находящихся в данной урне, известно, что всякий белый шар есть или крупный, или немраморный. Пусть при вынимании шаров из этой урны обращается внимание только на такие случаи, когда вынутый шар есть или белый, или крупный, или мраморный. Пусть при этих условиях найдено для вероятности случая, когда вынутый шар есть и белый, и крупный, число *p*. Найти вероятность, что будет вынут шар или белый, но некрупный, или, если не белый, то или крупный, или же мраморный.

Пусть x - вынутие белого шара, y - крупного, z - мраморного.

Первоначальные два условия задачи суть:

$$\begin{gathered} x = x(y + z_o) \\ 1 = x + y + z. \end{gathered}.$$

Дана вероятность $P(xy) = p$. Ищется вероятность $P(xy_o + x_o(y+z))$.

Положим

$$xy = u,\ \ xy_o + x_o(y+z) = v\ .$$

Можно сказать, что данная задача содержит 5 простых классов: *x,y,z*, *u*, *v*, подчиненных всем, написанным выше, четырем условиям. Все эти условия совмещаются в одно следующее:

$$1 = [x_o + y + z_o][x + y + z][uxy + u_o x_o + u_o y_o]\times$$
$$\times[vxy_o + vx_o y + vx_o z + v_o xy + v_o x_o y_o z_o] =$$
$$= uv_o xy + u_o vx_o y + u_o vxz_o + u_o vxy_o z_o.$$

По смыслу задачи, отсюда требуется определить *v* через *u*. Лишние классы: *x,y,z* должны быть исключены, что достигается подстановкою:

$$x = y = z = x_o = y_o = z_o = 1\ .$$

По исключению получим:

$$1 = uv_o + u_o v = F(v)\ .$$

Отсюда имеем:

$$F(1) = u_o,\ F(0) = u,\ \ F_o(0) = u_o,\ \ F_o(0)F(1) = u_o\ .$$

След. в данном случае *v* определяется равенством

$$v = u_o\ .$$

Далее, имеем:

$$K = F(1) + F(0) = u_0 + u = 1\ .$$

Следовательно, условие $1 = K$, которому подчинена функция *u*, сводится на тождество $1 = 1$, что равнозначно с отсутствием всякого условия. А потому получим окончательно:

$$P(v) = P(u_0) = 1 - p\ .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ
О НУМЕРАЦИИ ЛОГИЧЕСКИХ РАВЕНСТВ ВООБЩЕ

Выше (§ 1) было показано, что каждому логическому равенству

$$f(a,b,c,...) = \varphi(a,b,c,...)\ . \qquad (1)$$

соответствует количественное равенство:

$$N[f(a,b,c,...)] = N[\varphi(a,b,c,...)]\ , \qquad (2)$$

выражающее равенство чисел предметов, содержащихся в классах *f* и φ.

Чрез деление обеих частей этого последнего равенства на число $N(1)$, означающее число предметов мира речи, получается еще одно числовое равенство

$$P[f(a,b,c,...)] = P[\varphi(a,b,c,...)], \qquad (3)$$

выражающее равенство вероятностей логических классов *f* и φ.

Назовем для краткости переход от равенства (1) к равенству (3) *пробабилизацией* логического равенства (1); переход же от равенства (1) к равенству (2)—*нумеризацией* логического равенства (1).

Выше мы занимались *непосредственной* пробабилизацией логического равенства, делая переход прямо от равенства (1) к равенству (3), без посредства промежуточного равенства (2). При этом для установления свойств символа ***P*** нам было необходимо пользоваться некоторыми истинами Теории Вероятностей.

Но если мы построим правила для перехода от равенства (1) к равенству (2), причем при установлении свойств символа ***N*** уже нельзя будет пользоваться истинами Теории Вероятностей, то, в виду простой связи между равенствами (2) и (3), в правилах этих мы получим вместе с тем новый способ определения некоторых свойств символа *P*.

Следует также заметить, что равенство (2) может иметь значение не только в качестве промежуточного между (1) и (3), но и само по себе, так как оно может найти себе применение в других областях знаний, напр. в Статистике.

Обращаюсь к построению правил нумеризации логических равенств.

Для нумеризации логич. равенства достаточно нумеризировать каждую его часть порознь и затем приравнять между собою результаты. Таким образом, нумеризация логических равенств сводится к нумеризации отдельных логических функций.

Определение числа предметов, содержащихся в каждом логич. классе a, т. е. числа $N(a)$, может быть достигнуто с помощью непосредственного их счета на самом деле. Однако, зная зависимость между некоторыми из символов $N(a)$, $N(b)$, $N(a+b)$, $N(ab)$ и пр., мы можем определять величину одних из этих символов по данным величинам других.

Установление разных видов зависимостей между различными символами ***N*** и составляет предмет теории нумеризации.

Найдем сначала отношение между двумя символами $N[f_o(a,b,c)]$ и $N[f(a,b,c)]$, где f_0 есть логическое отрицание *f*.

Из логического тождества

$$f(a,b,c,...) + f_o(a,b,c,...) = 1$$

имеем:

$$N[f(a,b,c,...)]+f_o(a,b,c,...)]=N(1).$$

Но так как произведение ff_o равно нулю, то все предметы функции f отличны от предметов функции f_0, а потому

$$N[f+f_o)]=N(f)+N(f_o).$$

и следовательно

$$N(f)+N(f_o)=N(1),$$

откуда

$$N[f_o(a,b,c,...)]=N(1)-N[f(a,b,c,...)].$$

Это и есть искомое отношение. Деля в нём обе части на $N(1)$, получим отношение

$$P[f_o(a,b,c,...)]=1-P[f(a,b,c,...)],$$

т. е. одну из основных истин Теории Вероятностей.

Найдем выражение для символа $N(a+b)$. Если a и b дисъюнктны, т. е. $ab=0$, то понятно, что

$$N(a+b)=N(a)+N(b).$$

Но пусть a и b конъюнктны. т. е. ab отлично от нуля. Из логического тождества

$$a=ab+ab_o,$$

где в правой части оба члена дисъюнктны, получаем

$$N(a)=N(ab)+N(ab_o).$$

Точно так же из тождества

$$b=ab+a_ob,$$

где опять оба члена правой части дисъюнктны, находим

$$N(b)=N(ab)+N(a_ob).$$

Складывая выражения для $N(a)$ и $N(b)$, будем иметь:

$$N(a)+N(b)=2N(ab)+N(ab_o)+N(a_ob).$$

С другой стороны, сумма предыдущих выражений для a и b доставляет, нам (на основании общего закона логики $m + m = m$) логическое равенство:

$$a+b=ab+ab_o+a_ob,$$

в котором в правой части все три члена дисъюнктны друг с другом. А потому

$$N(a+b)=N(ab)+N(ab_o)+N(a_ob).$$

Сравнение этого выражения с найденным выше показывает, нам, что вообще

$$N(a+b)=N(a)+N(b)-N(ab),$$

откуда, в частности, для случая, когда $ab=0$ и след. $N(ab)=N(0)=0$, получим, как и ранее,

$$N(a+b)=N(a)+N(b).$$

Далее, легко видеть, что вообще (в силу доказанного, а также закона $mm=m$):

$$\begin{aligned}
&N(a+b+c)=N[(a+b)+c]=N(a+b)+N(c)-N[(a+b)c]=\\
&=N(a)+N(b)-N(ab)+N(c)-N[ac+bc]=\\
&=N(a)+N(b)+N(c)-N(ab)-[N(ac)+N(bc)-N(abc)]=\\
&=[N(a)+N(b)+N(c)]-[N(ab)+N(ac)+N(bc)]+N(abc).
\end{aligned}$$

Точно так же мы нашли бы:

$$\begin{aligned}
&N(a+b+c+\partial)==N(a)+N(b)+N(c)+N(\partial)]-\\
&-[N(ab)+N(ac)+N(a\partial)+N(bc)+N(b\partial)+N(c\partial)]+\\
&+[N(abc)+N(ab\partial)+N(bc\partial)]-N(abc\partial).
\end{aligned}$$

Закон построения этих формул очевиден. В частности, когда все слагаемые классы дисъюнктны между собою, мы находим:

$$N\Sigma a^{(i)}=\Sigma N(a^{(i)}).$$

откуда, по разделении на $N(1)$, получаем отношение:

$$P(a'+a''+a'''+...)=P(a')+P(a'')+P(a''')+...,$$

т.е. еще одну истину Теории Вероятностей, на которую мы ссылались выше.

Можно найти иное выражение для символа $N\Sigma a^{(i)}$.

Так как в логике имеет место тождество:

$$a'+a''=a'+a'_o\,a'',$$

где в правой части оба члена дисъюнктны между собою, то

$$N(a'+a'')=N(a')+N(a'_o\,a'').$$

Далее, зная, что

$$a'+a''+a'''=a'+a'_o\,a''+a'_o\,a''_o\,a''',$$

где опять все члены правой части дисъюнктны между собою, найдем:

$$N(a'+a''+a''')=N(a')+N(a'_o\,a'')+N(a'_o\,a''_o\,a''').$$

Точно так же найдем и вообще:

$$N(a'+a''+a'''+...)=N(a')+N(a'_o\,a'')+N(a'_o\,a''_o\,a''')+....$$

Третий прием для определения символа $N\Sigma a^{(i)}$ заключается в разложении суммы $\Sigma a^{(i)}$ на элементы объема (которые всегда дисъюнктны между собою). Поэтому, если такое разложение есть:

$$\Sigma a^{(i)} = s' + s'' + s''' + ...,$$

то понятно, что

$$N\Sigma a^{(i)} = N\Sigma s^{(k)}.$$

Наконец, четвертый прием определения того же символа есть следующий. Так как отрицание суммы $a' + a'' + a''' + ...$ есть произведете $a'_o\, a''_o\, a'''_o ...$ то понятно, что

$$N(a' + a'' + a''' + ...) = N(1) - N(a'_o\, a''_o\, a'''_o ...).$$

Обращаемся к определению символа ***N*** от произведения логических классов. Выше было доказано, что

$$N(a + b) = N(a) + N(b) - N(ab),$$

а потому

$$N(ab) = N(a) + N(b) - N(a + b).$$

Легко также видеть, что

$$N(ab) = N(1) - N[(ab)_o] = N(1) - N(a_o + b_o).... \qquad \text{(E)}$$

Обобщением этих формул я заниматься не буду. Вместо того, обращу внимание на следующее. Предпоследняя формула показывает нам, что, зная символы $N(a)$ и $N(b)$, мы еще не можем определить величины символа $N(ab)$. Однако, легко указать пределы, внутри которых содержится величина этого символа; а именно: $N(ab)$ не меньше нуля и не больше наименьшего из символов $N(a)$ и $N(b)$.

Буль доказал, что нижний из этих пределов можно формулировать обстоятельнее. А именно, он доказывает, что $N(ab)$ не меньше

$$N(a) + N(b) - N(1).$$

В самом деле, из формулы (E) следует, что

$$\begin{aligned}N(ab) &= N(1) - N(a_o + b_o) = N(1) - [N(a_o) + N(b_o) - N(a_o b_o)] = \\ &= N(1) - [N(1) - N(a) + N(1) - N(b) - N(a_o b_o)] = \\ &= N(a) + N(b) - N(1) + N(a_o b_o).\end{aligned}$$

Вот новое выражение для символа $N(ab)$, откуда видим, что, действительно, $N(ab)$ не меньше

$$N(a) + N(b) - N(1).$$

Далее, для случая трех множителей имеем:

$$N(a'a''a''') = N[(a'a'')a'''] = N(a'a'') + N(a''') - N(1) +$$
$$+ N((a'_o + a''_o)a'''_o) =$$
$$= N(a') + N(a'') - N(1) + N(a'_o a''_o) + N(a''') - N(1) + \quad .$$
$$+ N((a'_o + a''_o)a'''_o) = N(a') + N(a'') + N(a''') - 2N(1) +$$
$$+ [N(a'_o a''_o) + N((a'_o + a''_o)a'''_o)].$$

Так как каждый из символов $\boldsymbol{N}$ не меньше нуля, то отсюда следует, что $N(a'a''a''')$ не меньше

$$N(a') + N(a'') + N(a''') - 2N(1) .$$

Такими же суждениями можно доказать, что вообще

$$N(a'a''a'''...a^{(m)}) \text{ не меньше } \Sigma N(a) - (m-1)N(1) .$$

Таков нижний передел величины символа $\boldsymbol{N}$ от произведения классов. Что же касается верхнего, то понятно, что величина того же символа не больше величины наименьшего из символов $N(a'), N(a''), ..., N(a^{(m)})$..

Вот собственно и все, что мне известно о правилах нумеризации.

В заключение замечу следующее. Выше мы получили из правил нумеризации две основные истины Теории Вероятностей. Однако, дальнейшие истины той же науки мы можем получить из правил нумеризации только при помощи гипотезы о равномерном распределении предметов каждого класса по всему протяжению мира речи. Например, только при условии этой гипотезы, мы можем сказать, что $N(ab)$ составляет, ту же часть от $N(a)$, как $N(b)$ от $N(1)$, т. е. написать пропорцию.

$$N(ab) : N(a) = N(b) : N(1) ,$$

откуда

$$N(ab) = \frac{N(a)N(b)}{N(1)} ,$$

и следов., по разделении на $N(1)$:

$$P(ab) = \frac{N(a)}{N(1)} \cdot \frac{N(b)}{N(1)} = P(a)P(b) .$$