УДК 519.8

В.Н. Калинин

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ

Калинин В.Н. **О некоторых задачах оптимального управления информационным взаимодействием космического аппарата с поверхностью Земли.**

Аннотация. В статье рассматривается ряд задач космической кибернетики, связанных с оптимальным управлением процессами информационного взаимодействия космического аппарата с поверхностью Земли. Космический аппарата при этом рассматривается как информационный активный подвижный объект, т.е. как сложная подвижная система, снабженная необходимыми приборами для осуществления информационного взаимодействия с окружающей физической средой и соответствующим необходимым бортовым ресурсом. Показано, что эти задачи сводятся к задачам оптимального программного управления некоторой специальной дифференциальной динамической системой в гильбертовом пространстве состояний. Для решения указанных задач в статье использованы расширенный принцип максимума Л.С. Понтрягина и общая концепция Лагранжа.

Ключевые слова: космическая кибернетика, космический аппарат, информационное взаимодействие, информационный активный подвижный объект, пространство информационных состояний, гильбертово пространство, выпуклость, слабая компактность, оптимальное терминальное управление.

Kalinin V.N. **On Some Problems of Optimum Control of Informational Interaction of a Space Vehicle with the Surface of the Earth.**

Abstract. The article discusses a number of problems of space cybernetics connected with the optimum process control of informational interaction of a spacecraft with the surface of the Earth. A spacecraft is regarded as an informational active mobile plant, i.e. as a complicated mobile system supplied with necessary devices for the realization of informational interaction with the enclosing physical medium and the corresponding necessary onboard resource. It is shown that these problems are reduced to the problems of optimum programmed control by some special differential dynamic system in a Hilbert space of conditions. For a solution of the specified problems, the paper uses L.S. Pontrjagin's expanded maximum principle and the general concept of Lagrange.

Keywords: space cybernetics, spacecraft, informational interaction, informational active mobile plant, space of informational conditions, a Hilbert space, convexity, weak compactness, optimum terminal control.

1. Введение. В современной *космической кибернетике* [10, 11] важнейшее место занимает исследование проблемы оптимального управления *космическим аппаратом* (далее сокращенно КА). Рассмотрение целевых и системных аспектов функционирования КА приводит к целесообразности использования для его математического описания *концепции активного подвижного объекта* [9], под которым понимается сложная подвижная система, предназначенная для информационного, энергетического или вещественного взаимодействия с окружающей физической средой или с другими подобными системами и снабженная соответствующей бортовой аппаратурой и необходимым ресурсом. Эта концепция в последнее время успешно применяется как инструмент адекватного концептуального и математического моделирования сложных объектов современной ракетно-космической техники и разработки алгоритмического и программного обеспечения соответствующих автоматизированных систем управления [2, 13, 14].

В данной статье космический аппарат интерпретируется как *информационный активный подвижный объект* [7, 10, 11], предназначенный для осуществления *информационного взаимодействия с поверхностью Земли,* под которым понимается сбор информации о состоянии объектов на земной поверхности с помощью бортовых оптических и радиоэлектронных средств (соответствующие процессы в литературе получили название процессов дистанционного зондирования Земли [6]). Концептуальное и математическое описание подобных КА приведено в работах [8, 11], где рассмотрены математические модели этих КА как объектов управления, реализующих указанное информационное взаимодействие.

Следует отметить важную принципиальную особенность указанных моделей, связанную с тем, что *состояние информационного взаимодействия* характеризуется достигнутым к рассматриваемому моменту времени распределением информации по заданному множеству точек земной поверхности. Это означает, что для описания указанного состояния недостаточно использования конечномерных конструкций, а требуется представление текущего состояния соответствующего процесса в виде элемента бесконечномерного, функционального пространства. Сам указанный процесс при этом описывается с помощью соответствующих *специальных дифференциальных уравнений в гильбертовом функциональном пространстве* [8].

В настоящей статье на основе этих математических моделей рассматриваются некоторые *детерминированные* задачи оптимального управления *информационным взаимодействием* космического аппарата с поверхностью Земли с учетом ограниченности имеющегося на борту КА ресурса (энергетического или вещественного), расходуемого в процессе информационного взаимодействия. В качестве критерия оптимальности принято условие максимального приближения достигнутого в результате управления информационного состояния к заданному. Для постановки рассматриваемых в настоящей статье задач оптимального управления уточним исходные допущения, лежащие в основе используемых моделей и общей характеристики рассматриваемых процессов информационного взаимодействия. А именно, примем следующие предположения.

a) КА совершает неуправляемый орбитальный полет в центральном гравитационном поле Земли при отсутствии механических возмущений.

b) Информационное взаимодействие с поверхностью Земли осуществляется с помощью одного прибора.

c) Множество информационного взаимодействия представляет собой отрезок трассы полета КА на поверхности Земли.

d) На борту КА имеется один непополняемый ресурс, расходуемый в процессе информационного взаимодействия.

e) Запаздыванием информационных сигналов вследствие конечной скорости их распространения можно пренебречь.

f) Возмущающие воздействия на рассматриваемые информационные процессы (случайные или целенаправленные искажения получаемой информации в процессе ее распространения) отсутствуют.

Для дальнейшего рассмотрения соответствующих задач управления уточним необходимые математические элементы их постановки.

2. Основные элементы математической постановки задач. Выделим следующие три элемента постановки рассматриваемых задач.

2.1. Математическая модель информационного взаимодействия КА с поверхностью Земли. Будем рассматривать исследуемые процессы информационного взаимодействия на некотором заданном интервале времени

$$\sigma = [t_0, t_f] \subset [0, \infty),\ t_f > t_0, \tag{1}$$

где t_0 – начальный, t_f – конечный моменты времени.

При указанных выше допущениях центр масс КА в соответствии с законами Кеплера будет совершать плоское движение по эллиптической орбите, один из фокусов которой совпадает с центром Земли. Будем считать это движение заданным и представленным *кинематической моделью* вида:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in \sigma, \tag{2}$$

в которой $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий центр Земли с центром масс КА, а $\vec{r}(\cdot)$ – соответствующее заданное инъективное отображение: $\sigma \to R^3$ (рисунок 1).

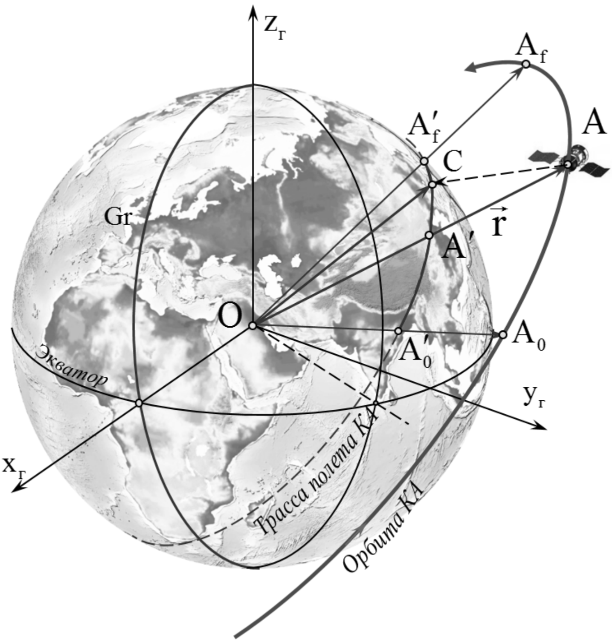

Рис.1. Орбита и трасса полета КА

Будем рассматривать этот радиус-вектор в *относительной экваториальной геоцентрической декартовой системе координат*. При этом центр масс КА, которому на рисунке 1 соответствует точка A, перемещается из некоторого начального положения A_0 в конечное A_f. На рисунке 1 показана также *трасса полета* КА (геометрическое место подспутниковых точек A' пересечения радиус-вектора центра масс КА с поверхностью Земли) и ее отрезок $\mathrm{A}'_0\mathrm{A}'_\mathrm{f}$, который отвечает рассматриваемому интервалу времени.

Уточним *множество информационного взаимодействия*, а именно, ограничимся предположением, что оно совпадает с указанным отрезком $\mathrm{A}'_0\mathrm{A}'_\mathrm{f}$ *трассы полета* КА. В этом случае целесообразно ввести естественную параметризацию этого отрезка, сопоставив каждой его точке C длину дуги трассы, отсчитываемую от точки пересечения трассы с плоскостью экватора. Обозначим эту длину через ρ и будем рассматривать ее как координату указанной точки. При этом участку трассы $\mathrm{A}'_0\mathrm{A}'_\mathrm{f}$ взаимно однозначно сопоставляется отрезок вещественной оси $\Delta = [a_0, a_f] \subset R^1$, где a_0 и a_f – значения параметра ρ, отвечающие начальной и конечной точкам дуги $A_0'A_f'$ соответственно.

В соответствии с [8] текущее *состояние информационного взаимодействия* для каждого момента времени будем характеризовать неотрицательной функцией $\gamma(\bullet, t): \Delta \to R^1$, представляющей линейную плотность полученной информации, отвечающую данным значениям ρ и t. Определенное таким образом *информационное состояние* является элементом функционального пространства вещественных функций, определенных на множестве Δ. Обозначим это пространство через $X(\Delta)$ и будем называть его *пространством информационных состояний*.

Исходя из общей модели информационного взаимодействия КА с поверхностью Земли [8,11], соответствующее принятым допущениям *уравнение информационного состояния* представим в виде:

$$\gamma(\rho, t) = \int_{t_0}^{t} M(\rho, \tau) u(\tau) d\tau, \tag{3}$$

где $\rho \in \Delta = [a_0, a_f]$, $t \in \sigma = [t_0, t_f]$, $M(\rho, \tau)$ – заданная функция $\Delta \times \sigma \to R^1$, $u = u(t)$ – интенсивность (скорость) информационного взаимодействия, рассматриваемая в дальнейшем как соответствующее управляющее воздействие.

С математической точки зрения правая часть уравнения (3) представляет собой *линейный интегральный оператор Фредгольма* с ядром $M(\rho, \tau)$. Конкретный вид этого ядра определяется движением центра масс КА, ориентацией корпуса КА, ориентацией прибора относительно корпуса и диаграммой направленности информационного взаимодействия, его аналитическое представление имеет весьма сложный вид, однако всегда можно указать алгоритм вычислений его значений, который может быть легко реализован на современных ЭВМ. Примеры таких алгоритмов приведены в работе [11]. В дальнейшем будем полагать, что ядро оператора $M(\rho, \tau)$ задано и является *ограниченным и кусочно-непрерывным* на $\Delta \times \sigma \subset R^2$.

Как уже указывалось, определенное выше *информационное состояние* является элементом функционального пространства вещественных функций $X(\Delta)$, определенных на отрезке Δ. Движение рассматриваемой динамической системы (3) в этом пространстве можно представить в виде абстрактной функции

$$x(t) = \gamma(\bullet, t). \tag{4}$$

Очевидно, что интегральное соотношение (3) эквивалентно дифференциальному уравнению в функциональном пространстве $X(\Delta)$ следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\gamma(\bullet, t)}{\partial t} = M(\bullet, t)u \tag{5}$$

при начальном условии:

$$x(t_0) = \gamma(\bullet, t_0) = 0. \tag{6}$$

Завершая описание модели эволюции информационного состояния, уточним соответствующий *класс допустимых управляющих воздействий (допустимых управлений)*. А именно, зададим этот класс в виде:

$$U_\sigma = \left\{u_\sigma = u(\cdot) : \sigma \to R^1 \,\middle|\, (\forall\tau \in \sigma)(0 \le u \le c); S_u\right\}, \tag{7}$$

где c – заданное положительное число (максимальная интенсивность взаимодействия, S_u – теоретико-функциональные условия, накладываемые на управляющее воздействие и в данном случае трактуемые как измеримость по Лебегу.

2.2. Математическая модель бортового ресурса. Будем предполагать, что на борту космического аппарата имеется один расходуемый ресурс (запас носителя информации, энергии или т. п.), характеризуемый уравнением:

$$\dot{q} = -\alpha u \tag{8}$$

при начальном условии $q(t_0) = q_0 > 0$. Здесь q – величина ресурса, u – управление взаимодействием, α – положительная константа, характеризующая скорость расхода ресурса. На конечное состояние ресурса наложим следующее естественное условие:

$$q(t_f) = q_f \ge 0, \tag{9}$$

которое является краевым условием на правом конце траектории состояния ресурса.

2.3. Показатель качества процесса управления информационным взаимодействием. Показатель качества рассматриваемых процессов управления информационным взаимодействием зададим в виде *терминального функционала* (функционала Майера)

$$J(x_\sigma, u_\sigma) = h\left(x\left(t_f\right)\right), \tag{10}$$

в котором $h(\cdot)$ – заданное отображение: $X(\Delta) \to R^1$, характеризующее финальное информационное состояние. При этом в качестве указанного функционала $h\left(x\left(t_f\right)\right)$ будут рассмотрены *квадратичные и линейные функционалы,* математическое представление которых приводится далее при рассмотрении соответствующих задач.

3. Общая постановка задачи оптимального управления информационным взаимодействием. Некоторые замечания о существовании оптимальных решений и методе их нахождения. Приведем общую формулировку рассматриваемой задачи оптимального управления.

Среди всех допустимых управляющих воздействий найти такое, которое доставляет абсолютный минимум функционалу (10) при выполнении ограничения на оставшийся ресурс (9).

Если такое управляющее воздействие существует, то будем называть его *оптимальным* и обозначать через $u_\sigma^* = u^*(\bullet)$.

Сделаем некоторые замечания по поводу существования оптимального решения. С этой целью отметим, что, как показано в работе [8], при принятых выше допущениях класс допустимых управлений (9) при погружении его в гильбертово пространство $L^2(\sigma)$ всех измеримых и суммируемых с квадратом модуля вещественных функций, определенных на отрезке σ, является *выпуклым компактом* в слабой $L^2(\sigma)$–топологии. При этом вследствие линейности оператора (3) соответствующее ему *множество достижимости* представляет собой *выпуклый компакт* в пространстве информационных состояний $X(\Delta)$, если рассматривать это пространство как соответствующее гильбертово пространство $L^2(\Delta)$. Далее, так как речь идет о минимизации квадратичных или линейных терминальных функционалов вида (10), то в условиях рассматриваемой задачи они вследствие выпуклости *слабо полунепрерывны снизу* [4] на классе допустимых управлений $U_\sigma \subset L^2(\sigma)$ (7), откуда в соответствии с известными теоремами функционального анализа [1, 4, 12] следует, что нижняя грань указанных функционалов в классе допустимых управлений всегда достигается (обобщенная теорема Вейерштрасса), т. е. *искомое оптимальное управление заведомо существует(!)* и при этом либо единственно, либо принадлежит выпуклому подмножеству класса допустимых управлений.

Для практического нахождения искомых решений в данном случае целесообразно использовать соответствующую модификацию *принципа максимума Понтрягина* [15] применительно к бесконечномерному уравнению состояния (5) [5]. В нашем случае применение этой теории облегчается вследствие сравнительно простого вида указанного уравнения, правая часть которых *не зависят от состояния* и *линейна* по управлению. При этом оказывается, что применительно к квадратичным (и линейным) терминальным функционалам в данном случае вследствие линейности объекта управления принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности, т. е. позволяет решить задачу до конца. Перейдем к рассмотрению соответствующих конкретных задач, основанных на принятых выше условиях и допущениях.

4. Некоторые задачи оптимального управления информационного взаимодействия КА с поверхностью Земли. Рассмотрим четыре конкретных варианта поставленной выше общей задачи оптимального управления и соответствующие алгоритмы их решения.

4.1. Общая задача – квадратичный функционал. Для удобства дальнейших рассуждений несколько преобразуем исходную модель (3). А именно, в соответствии с введенной выше параметризацией трассы полета обозначим координату подспутниковой точки A' в момент времени $\tau \in \sigma$ через $s = s(\tau)$. Функция $s(\tau)$ определена на интервале времени $\sigma = [t_0, t_f]$ и обладает важным свойством – в соответствии с введенной выше параметризацией трассы положение подспутниковой точки A' является *строго монотонно возрастающей аналитической* (т. е. бесконечно дифференцируемой) функцией от τ и представляет собой биективное отображение $\sigma = [t_0, t_f] \to \Delta = [a_0, a_f]$. Поэтому для нее существует единственная и бесконечно дифференцируемая обратная функция $\tau = \tau(s)$, где $\tau(\cdot) : \Delta \to \sigma$. Обе указанные функции однозначно определяются заданием элементов орбиты космического аппарата. В дальнейшем будем считать их, как и ядро оператора в уравнении (3), заданными и удовлетворяющими указанным условиям. Отсюда следует, что уравнение информационного состояния (3) можно представить в следующем виде:

$$\gamma_1(\rho,s)=\int_{a_0}^{s} M_1(\rho,s)\,\tilde{u}(s)\,ds, \qquad (11)$$

где

$$M_1(\rho,s)=\tilde{M}(\rho,s)\,v^{-1}(s),\ \tilde{M}(\rho,s)=M(\rho,\tau(s)),\ \tilde{u}(s)=u(\tau(s)), \qquad (12)$$

$\tau(s)$ – указанная выше функция, обратная по отношению к $s(\tau)$, $v(s)$ – скорость подспутниковой точки с координатой s, равная

$$v(s)=\dot{s}(\tau(s))=\left.\frac{ds}{d\tau}\right|_{\tau=\tau(s)}. \qquad (13)$$

При этом очевидно, что $v(s)>0$ при любом рассматриваемом значении s. Новое ядро интегрального оператора (11) $M_1(\rho,s)$ определено на квадрате Δ^2, является на нем *неотрицательным, ограниченным и кусочно-непрерывным.* Указанная замена переменной делает запись уравнения состояния более наглядной.

При этом будем предполагать, что соответствующий класс допустимых управляющих воздействий (7) с учетом введенных выше преобразований задан в виде:

$$U_\Delta=\left\{\tilde{u}_\Delta=\tilde{u}(\cdot):\Delta\to R^1\,\middle|\,(\forall s\in\Delta)(0\le\tilde{u}(s)\le c);S_{\tilde{u}}\right\}. \qquad (14)$$

С прикладной точки зрения функцию $\tilde{M}(\rho,s)$ целесообразно представить в виде:

$$\tilde{M}(\rho,s)=K(\rho-s), \qquad (15)$$

где $K(\alpha)$ – некоторая *неотрицательная четная интегрируемая функция,* удовлетворяющая условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(\alpha)\,d\alpha=1\,. \qquad (16)$$

Например, функцию $K(\alpha)$ можно задать следующим образом:

$$K(\alpha)=1/2\varepsilon \text{ при } |\alpha|\le\varepsilon,\ K(\alpha)=0 \text{ при } |\alpha|>\varepsilon, \tag{17}$$

где ε – заданная положительная величина. Очевидно, что в этом случае финальное состояние взаимодействия может быть найдено по формуле:

$$\gamma_1(\rho,a_f)=(2\varepsilon)^{-1}\int\limits_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon} v^{-1}(s)\tilde{u}(s)ds. \tag{18}$$

Зададим минимизируемый терминальный функционал в следующем виде:

$$\begin{aligned} J(\tilde{u}_\sigma)=h(\gamma_1(\cdot,a_f))=0,5\left\|\gamma_1(\cdot,a_f)-\gamma_3(\cdot)\right\|^2_{L^2(\Delta)}= \\ =0,5\int\limits_{a_0}^{a_f}\left|\gamma_1(\rho,a_f)-\gamma_3(\rho)\right|^2 d\rho, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\gamma_3(\rho)$ – заданная неотрицательная вещественная ограниченная функция, заданная на отрезке $\Delta=[a_0,a_f]$ и отражающая *желательный конечный эффект взаимодействия*. Будем называть управляющее воздействие ***оптимальным,*** если функционал (19), характеризующий ”расстояние” между достигнутым и заданным информационными состояниями в метрике гильбертова пространства $L^2(\Delta)$, достигает *минимального* значения.

При переходе от текущего времени τ к координате подспутниковой точки s уравнение расхода ресурса (8) для $\tilde{q}(s)=q(\tau(s))$ приобретет следующий вид:

$$\frac{d\tilde{q}}{ds}=-\alpha v^{-1}(s)\tilde{u}(s) \tag{20}$$

при начальном условии $\tilde{q}(a_0)=q_0>0$. Конечное состояние ресурса в соответствии с (9) должно удовлетворять краевому условию:

$$\tilde{q}(a_f)=q_f\ge 0. \tag{21}$$

Как уже отмечалось выше, оптимальное решение соответствующей задачи минимизации функционала (19) существует и может быть найдено с помощью принципа максимума для уравнений в гильбертовом пространстве [5]. При этом искомое решение удовлетворяет условию максимума соответствующей функции Понтрягина:

$$\tilde{H}\left(\psi_0(\cdot), p_0, s, u^*(s)\right) = \max_{0\le\tilde{u}\le c} \tilde{H}\left(\psi_0(\cdot), p_0, s, \tilde{u}\right), \qquad (22)$$

где

$$\tilde{H}\left(\psi_0(\cdot), p_0, s, u\right) = \tilde{g}\left(\psi_0(\cdot), p_0, s\right)\tilde{u}, \qquad (23)$$

$$\tilde{g}\left(\psi_0(\cdot), p_0, s\right) = \tilde{d}\left(\psi_0(\cdot), s\right) - p_0\alpha v^{-1}(s). \qquad (24)$$

Здесь $\tilde{d}\left(\psi_0(\cdot), s\right)$ определяется соотношением:

$$\tilde{d}\left(\psi_0(\cdot), s\right) = \int_{a_0}^{a_f} \psi_0(\rho) M_1(\rho, s)\, d\rho, \qquad (25)$$

в котором $\psi_0(\cdot)$ – сопряженная переменная, не зависящая от времени и представляющая собой вещественную функцию, определенную на Δ , а p_0 – дополнительная сопряженная величина, которая в данном случае представляет собой неотрицательную константу.

Предположим дополнительно, что в данной задаче выполняется следующее условие:

$$\operatorname{mes}\left\{ s \,\middle|\, \tilde{d}\left(\psi_0(\cdot), s\right) - p_0\alpha v^{-1}(s) = 0 \right\} = 0, \qquad (26)$$

которое будем называть *условием регулярности*.

При выполнении условия регулярности рассматриваемой задачи соответствующая экстремаль Понтрягина определяется однозначно следующей формулой:

$$\tilde{u}'\left(s, \psi(\cdot), p\right) = \arg\max_{0\le\tilde{u}\le c}\left[\tilde{g}\left(\psi(\cdot), p, s\right)\tilde{u}\right] = \chi_-\left[\tilde{g}\left(\psi(\cdot), p, s\right)\right], \qquad (27)$$

где

$$\chi_-(z) = \begin{cases} 1 \text{ при } z > 0, \\ 0 \text{ при } z \le 0. \end{cases} \qquad (28)$$

Искомые сопряженные переменные $\psi_0(\cdot)$, p_0 при этом определяются следующими условиями трансверсальности:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(\rho)=\gamma_3(\rho)-\int_{a_0}^{a_f} M_1(\rho,s)\,\tilde{u}\big(s,\psi(\cdot),p\big)ds\,, \\ &p\left(q_0-\alpha\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\tilde{u}'\big(s,\psi(\cdot),p\big)ds\right)=0, \end{aligned}\right\}, \tag{29}$$

в которые следует подставить выражение (27). В результате получим искомое оптимальное управление в виде:

$$\tilde{u}_1^*(s)=\tilde{u}'\big(s,\psi_0(\cdot),p_0\big). \tag{30}$$

Отметим, что в данном случае можно исключить сопряженную переменную $\psi_0(\cdot)$ подстановкой первого из уравнений (29) в (27). В результате получим параметрическое нелинейное *интегральное уравнение Бутковского* [3] относительно искомого управления:

$$\tilde{u}(s,p)=\chi_-\left\{\int_{a_0}^{a_f} M_1(\rho,s)\left[\gamma_3(\rho)-\int_{a_0}^{a_f} M_1(\rho,\sigma)\,\tilde{u}(\sigma,p)\,d\sigma\right]-p\alpha v^{-1}(s)\right\}. \tag{31}$$

Обозначая решение этого уравнения через $\tilde{u}=\tilde{w}(s,p)$, рассмотрим функции:

$$\tilde{f}_1(p)=\alpha\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\tilde{w}(s,p)ds \tag{32}$$

и

$$\tilde{f}_2(p)=0,5\int_{a_0}^{a_f}\left|\int_{a_0}^{a_f} M_1(\rho,s)\,\tilde{w}(s,p)\,ds-\gamma_3(\rho)\right|^2 d\rho, \tag{33}$$

первая из которых характеризует *расход* ресурса, а вторая – *финальное отклонение* достигнутого информационного состояния от заданного.

Анализ этих функций показывает, что в общем случае искомое значение параметра p может быть найдено по формуле:

$$p_0=\max\left\{p_1,\max\arg\min_{p\geq 0} f_2(p)\right\}, \tag{34}$$

где p_1 – решение алгебраического уравнения:

$$f_1(p) = q_0, \tag{35}$$

в котором q_0 – заданное начальное значение бортового ресурса.

В результате искомое оптимальное управление (30) может быть представлено в виде:

$$\tilde{u}_1^*(s) = \tilde{w}(s, p_0). \tag{36}$$

При этом естественно предположить, что

$$q_0 < \alpha \int_{a_0}^{a_f} \tilde{w}(s,0)\, v^{-1}(s) ds < q_{max} = c\,\alpha(t_f - t_0). \tag{37}$$

В заключение настоящего п. 4.1. отметим важное свойство поученного оптимального управления – вследствие линейности функции Понтрягина оптимальное управление (скалярное по условию задачи) является кусочно-постоянным и носит *релейный характер*, т. е. оптимальная программа информационного взаимодействия КА с поверхностью Земли сводится к включению и выключению бортового прибора в некоторые моменты времени (в конечном счете, и подлежащие определению) при максимально возможной интенсивности информационного взаимодействия. Отсюда, в частности, следует возможный метод решения интегрального уравнения (31) путем соответствующего сведения его к конечномерной задаче оптимизации.

4.2. Общая задача – линейный функционал. При постановке и решении задач оптимального управления информационным взаимодействием определенный прикладной интерес представляет рассмотрение *линейных терминальных функционалов* качества процесса управления, заданных в следующем виде:

$$J(\tilde{u}_\Delta) = h(\gamma_1(\cdot, a_f)) = \int_{a_0}^{a_f} \xi(\rho)\gamma_1(\rho, a_f) d\rho, \tag{38}$$

где $\xi(\rho)$ – заданная *ограниченная неотрицательная вещественная* функция, заданная на множестве $\Delta = [a_0, a_f]$ и отражающая *относительную ценность информации*, получаемой от подспутниковой точки с координатой ρ. Будем считать рассматриваемый процесс управления *оптимальным*, если интеграл (38) достигает своего *максимального* значения. Из принципа максимума следует, что если в данном случае оптимальное управление существует, то оно доставляет максимум соответствующей функции Понтрягина, которая определяется теми же выражениями (22) – (25), что и в предыдущей задаче п. 4.1. Вместе с тем, уравнение для сопряженной переменной $\psi_0(\cdot)$, определяемое соответствующим условием трансверсальности, в данном случае имеет (вследствие линейности функционала) следующий простой вид:

$$\psi_0(\rho) = \xi(\rho). \tag{39}$$

Соответствующая экстремаль Понтрягина при этом определяется выражением (27) при условии (39), откуда следует, что она в этом случае определяется формулой:

$$\tilde{u}'(s, \xi(\cdot), p) = c\chi_{-}\left[\tilde{d}(\xi(\cdot), s) - p\alpha v^{-1}(s)\right], \tag{40}$$

где

$$\tilde{d}(\xi(\cdot), s) = \int_{a_0}^{a_f} M_1(\rho, s)\xi(\rho)d\rho. \tag{41}$$

Требуемое значение неизвестной сопряженной константы $p = p_0$ при этом определяется как решение алгебраического уравнения:

$$\alpha\int_{a_0}^{a_f} u'(s, \xi(\cdot), p)\, v^{-1}(s)ds = q_0\,. \tag{42}$$

Тогда искомое оптимальное управление можно представить формулой:

$$\tilde{u}_2^*(s) = \tilde{u}'(s, \xi(\cdot), p_0). \tag{43}$$

При этом, как и в п. 4.1, предполагается, что

$$q_0 < \alpha\int_{a_0}^{a_f} \tilde{u}'(s, \xi(\bullet), 0)\, v^{-1}(s)ds < q_{max} = \alpha c(t_f - t_0). \tag{44}$$

4.3. Предельная локализация информационного взаимодействия – квадратичный функционал. В заключение настоящей статьи рассмотрим варианты задач пп. 4.1. и 4.2 для случая, когда в соответствующем уравнении состояния (11) с учетом (12) ядро $\tilde{M}(\rho, s)$ задано соотношениями (16) – (17) при условии $\varepsilon \to 0$, т. е. представляет собой обобщенную δ-функцию. Назовем этот случай случаем *предельной локализации*. В этом случае модель информационного взаимодействия существенно упрощается и определяется выражением:

$$\gamma(\rho, t_f) = \gamma_1(\rho, a_f) = v^{-1}(\rho)\tilde{u}(\rho). \tag{45}$$

Класс допустимых управлений по-прежнему будем определять соотношением (14). Относительная простота математической модели (45) позволяет легко получить оптимальное управление. Вместе с тем, подобная модель имеет практическое значение в тех случаях, когда диаграмма направленности взаимодействия имеет вид достаточно узкого луча, ориентированного в подспутниковую точку КА.

Рассмотрим вначале соответствующую задачу минимизации квадратичного терминального функционала (19), который здесь принимает следующий вид:

$$J(\tilde{u}_\Delta) = 0,5\int_{a_0}^{a_f} \left| v^{-1}(s)\tilde{u} - \gamma_3(s) \right|^2 ds, \tag{46}$$

где $\gamma_3(\rho)$ – заданная неотрицательная вещественная ограниченная функция, определенная на множестве $\Delta = [a_0, a_f]$. При этом будем предполагать, что бортовой ресурс ограничен и описывается прежней моделью (20)–(21).

Для нахождения оптимального управления воспользуемся методом Лагранжа, который позволяет свести рассматриваемую задачу к задаче безусловной минимизации [1]. С этой целью запишем ограничение на расход ресурса (21) в виде:

$$-q_f = \alpha\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\tilde{u}ds - q_0 \le 0 \tag{47}$$

и рассмотрим соответствующий функционал Лагранжа

$$J_L(\tilde{u}_\Delta) = 0,5\int_{a_0}^{a_f} \left| v^{-1}(s)\tilde{u} - \gamma_3(s) \right|^2 ds + p\left(\alpha\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\tilde{u}ds - q_0 \right), \tag{48}$$

в котором p – неопределенный множитель Лагранжа, удовлетворяющий условию $p \geq 0$. Раскрывая скобки в функционале (48), получим выражение:

$$J_L(\tilde{u}_\Delta) = \int_{a_0}^{a_f} \left(0,5v^{-2}(s)\tilde{u}^2 - v^{-1}(s)\left(\gamma_з(s) - p\alpha\right)\tilde{u}\right)ds + ..., \quad (49)$$

в котором через … обозначены слагаемые, не зависящие от $\tilde{u}$. Отсюда следует, что функционал Лагранжа (48) достигает абсолютного минимума при

$$\tilde{u}_3^*(s) = \underset{[0,c]}{\mathrm{sat}}\left[v(s)\left(\gamma_з(s) - p_0\alpha\right)\right], \quad (50)$$

где

$$\underset{[0,c]}{\mathrm{sat}}(z) = \begin{cases} c \text{ при } z > 0, \\ z \text{ при } z \in [0,c], \\ 0 \text{ при } z < 0 \end{cases} \quad (51)$$

– неотрицательная функция "насыщения" с порогом c. При этом очевидно, что неопределенный множитель Лагранжа - число p_0:

а) определяется как неотрицательный корень нелинейного алгебраического уравнения:

$$q(p) = \alpha\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\underset{[0,c]}{\mathrm{sat}}\left[v(s)\left(\gamma_з(s) - p\alpha\right)\right]ds = q_0, \quad (52)$$

если

$$q_0 < q_3^* = \alpha\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\underset{[0,c]}{\mathrm{sat}}\left[v(s)\gamma_з(s)\right]ds, \quad (53)$$

где q_3^* – расход ресурса без учета его ограниченности;

б) равно 0 в противном случае (т. е. при $q_0 > q_3^*$).

Отметим, что если $c = \infty$, то

$$q_3^* = \alpha\int_{a_0}^{a_f} \gamma_з(s)ds \quad (54)$$

и от скорости подспутниковой точки $v(s)$ не зависит.

В заключение данного пункта рассмотрим случай, когда множество допустимых значений управляющего воздействия $\tilde{u}$ состоит из двух значений: $u = 0$ (взаимодействие не осуществляется) и $u = c$ (взаимодействие осуществляется с максимальной интенсивностью) – управление носит дискретный характер. В этом случае минимизация функционала Лагранжа (48) на указанном множестве приводит к следующему результату:

$$\tilde{u}^{*}_{3d}(s) = c\chi_{-}\left[v(s)(\gamma_{з}(s) - p_0 c) - 0,5c\right] \qquad (55)$$

При этом множитель Лагранжа p_0 определяется по следующему правилу:

а) как неотрицательный корень алгебраического уравнения:

$$\alpha c\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\chi_{-}\left[v(s)(\gamma_{з}(s) - p_0 c) - 0,5c\right]ds = q_0 \qquad (56)$$

– в случае, если:

$$q_0 < q^{*}_{3d} = c\alpha\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\gamma_{-}\left[v(s)\gamma_{з}(s) - 0,5c\right]ds; \qquad (57)$$

б) $p_0 = 0$ при $q_0 > q^{*}_{3d}$ (последнее означает, что имеющийся ресурс достаточно велик, так что в данных условиях его можно считать неограниченным).

4.4. Предельная локализация информационного взаимодействия – линейный функционал. Эта задача аналогична задаче п. 4.2, в которой оптимальность понимается в смысле максимума линейного терминального функционала (38), который в данном случае с учетом (45) принимает вид:

$$J(\tilde{u}_{\Delta}) = h(\gamma_1(\cdot, a_f)) = \int_{a_0}^{a_f} \xi(\rho)v^{-1}(\rho)\tilde{u}(\rho)d\rho, \qquad (58)$$

где $\xi(\rho)$ – заданная ограниченная неотрицательная вещественная функция, заданная на множестве $\Delta = \left[a_0, a_f\right]$. Сохраняя ограничения на ресурс (47), по аналогии с предыдущем пунктом введем соответствующую функцию Лагранжа (здесь задача преобразована в эквивалентную задачу минимизации):

$$J_L\left(\tilde{u}_\Delta\right) = -\int_{a_0}^{a_f} \xi(s) v^{-1}(s)\tilde{u}ds + p\left(\alpha\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\tilde{u}ds - q_0\right), \quad (59)$$

в котором p – неопределенный множитель Лагранжа, удовлетворяющий условию $p \geq 0$. Отсюда следует, что искомое оптимальное управление имеет следующий вид:

$$\tilde{u}_4^*(t) = c\chi_-\left[\xi(s) - p_0 c\right], \quad (60)$$

где число p_0:

а) определяется как неотрицательный корень алгебраического уравнения относительно p:

$$\alpha c\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\chi_-\left[\xi(s) - pc\right]ds = q_0 \quad (61)$$

в предположении, что:

$$q_0 < q_4^* = \alpha c\int_{a_0}^{a_f} v^{-1}(s)\gamma_-\left[\xi(s)\right]ds, \quad (62)$$

где q_4^* – расход ресурса при отсутствии ограничений;

б) равно 0 в противном случае.

Последнее означает, что имеющийся ресурс достаточно велик, так что его можно считать неограниченным и использовать максимальную интенсивность взаимодействия всегда, когда функция $\xi(s)$ принимает положительные значения. Таким образом, в рассмотренной задаче оптимальное управление информационным взаимодействием носит достаточно очевидный *релейный* характер – бортовой прибор взаимодействия при ограниченном ресурсе включается с максимальной интенсивностью только на тех участках трассы, для которых функция ценности получаемой информации превышает некоторое пороговое значение, определяемое величиной имеющегося бортового ресурса.

5. Заключение. Проектирование и создание космических аппаратов для сбора информации о состоянии окружающей физической среды (и, прежде всего, о состоянии объектов на поверхности Земли) представляет собой исключительно трудную инженерно-техническую проблему. Это связано со сложными условиями их функционирования и высокой стоимостью выведения на требуемую орбиту. При этом особую актуальность приобретает обеспечение высокой эффективности целевого функционирования подобных орбитальных средств и, в связи с этим, разработка соответствующих оптимальных алгоритмов управления целевой бортовой аппаратурой с учетом ограниченности расходуемых при этом бортовых ресурсов. В настоящей статье рассмотрены некоторые из подобных задач космической кибернетики. Показано, что в рамках принятой модели информационного взаимодействия эти задачи сводятся к задачам оптимального программного управления некоторой специальной дифференциальной динамической системой в гильбертовом пространстве состояний. Для решения указанных задач в статье использованы расширенный принцип максимума Л.С. Понтрягина и общая концепция Лагранжа. Предложенные алгоритмы управления могут быть использованы как эталонные решения в практической космонавтике при совершенствовании существующих и при разработке перспективных космических аппаратов, предназначенных для информационного взаимодействия с окружающей физической средой.

Литература

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление // М.: Физматлит. 2007. 407 с.
2. *Ахметов Р.Н., Васильев И.Е., Капитонов В.А., Охтилев М.Ю., Соколов Б.В.* Концепция создания и применения перспективной АСУ подготовки и пуска ракеты космического назначения "Союз-2": новые подходы к интеграции, интеллектуализации, управлению // Авиакосмическое приборостроение. М.: ООО Издательство «Научтехлитиздат». 2015. №4. С.3–54.
3. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами // М.: Наука. 1965. 474 с.
4. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов // М.: Наука. 1972. 416 с.
5. *Егоров Ю.В.* Необходимые условия оптимальности управления в банаховых пространствах // Математический сборник. 1964. Т.64. №1. С. 79–101.
6. Журнал “Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса”. 2004–2014. URL: http://jr.rse.cosmos.ru. (дата обращения: 12.05.2015).
7. *Калинин В.Н.* Космический аппарат как объект системных исследований // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского. 2014. Вып. 640. С. 80–89.
8. *Калинин В.Н.* Математическая модель информационного взаимодействия космического аппарата с поверхностью Земли // Труды СПИИРАН. 2014. Вып. 3(34). С. 33–56.
9. *Калинин В.Н.* О теории управления активными подвижными объектами // Известия вузов. Приборостроение. 1981. № 6. С. 26–31.
10. *Калинин В.Н.* Современная космическая кибернетика – методологические основы и направления исследований // Информация и космос. 2007. № 3. С. 7–16.

11. *Калинин В.Н.* Теория управления космическим аппаратом: на основе концепции активного подвижного объекта: монография // СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского. 2014. 188 с.
12. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Физматлит. 2004. 572 с.
13. *Майданович О.В., Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Комплексная автоматизация мониторинга состояния космических средств на основе интеллектуальных информационных технологий // Приложение к журналу «Информационные технологии». 2011. №10. 32 с.
14. *Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Теоретические и технологические основы концепции проактивного мониторинга и управления сложными объектами // Известия ЮФУ. Технические науки. Таганрог: Южный федеральный университет. 2015. №1. С.162–174.
15. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов // М.: Наука. 1969. 391 с.

References

1. Alekseev V.M., Tichomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie* [Optimum control]. M.: Fizmatlit. 2007. 407 p. (In Russ.).
2. Ahmetov R.N., Vasiliev I.E., Kapitonov V.A, Ohtilev M.Ju, Sokolov B.V. [The concept of creation and application of the perspective automated control system by preparation and rocket firing of space assigning of "Sojuz-2": new approaches to integration, intellectualizations, to control]. *Aviakosmicheskoe priborostroenie – Aerospace instrument making*. M.: OOO Izdatel'stvo "Nauchtehlitizdat". 2015. vol. 4. pp. 3–54. (In Russ.).
3. Butkovsky A.G. *Teoriia optimal'nogo upravleniia systemami s raspredelennymi parametrami* [The theory of optimum control of systems with the distributed parametres]. M.: Nauka. 1965. 474 p. (In Russ.).
4. Vajnberg M.M. *Variazionnyi metod i metod monotonnyh operatorov* [Variation method and method of monotonous operators]. M.: Nauka. 1972. 416 p. (In Russ.).
5. Egorov Ju.V. [Necessary conditions of an optimality of management in Banach spaces]. *Mathematicheskij sbornik – Mathematics collection*. 1964. vol. 64. pp. 79–101. (In Russ.).
6. *Zhurnal "Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa"* [Journal Current problems in remote sensing of the earth from space]. 2004–2014. Available at: http://jr.rse.cosmos.ru. (accessed: 12.05.2015). (In Russ.).
7. Kalinin V.N. [The spaceraft as object of system researches]. *Trudy Voenno-kosmicheskoj akademii imeni A.F. Mozhajskogo – Proceedings of Mozhajsky Military-space academy*. SPb.:VKA im. A.F. Mozhajskogo. 2014. vol. 640. pp. 80–89. (In Russ.).
8. Kalinin V.N. [Mathematical model of informational interaction of the spacecraft with a surface of the Earth]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2014. vol. 3(34). pp. 33–56. (In Russ.).
9. Kalinin V.N. [About the theory of management of active mobile objects]. *Izv. vyssh. uchebn. zavedenij: Priborostroenie – Proceedings of the higher educational institution: Instrumentation*. 1981. vol. 6. pp. 26–31. (In Russ.).
10. Kalinin V.N. [Modern space cybernetics – methodological bases and the directions of researches]. *Informacija i kosmos — Information and space*. 2007. vol. 3. pp. 7–16. (In Russ.).
11. Kalinin V.N. *Teoria upravlenija kosmicheskim apparatom: na osnove koncepcii aktivnogo podvizhnogo ob'ekta* [Theoretical bases of management of the spacecraft on

the basis of the active mobile object concept]. SPb.:VKA im. A.F. Mozhajskogo. 2014. 188 p. (In Russ.).
12. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy theorii funkcii i funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and the functional analysis]. M.: Fizmatlit. 2004. 572 p. (In Russ.).
13. Majdanovich O.V, Ohtilev M.Ju, Sokolov B.V., Jusupov R.M. *Kompleks-naja avtomatizacija monitoringa sostojanja kosmicheskich sredstv na osnove intellektuak'l'nych informacionnych technologii* [Complex automatization of monitoring of a condition of space means on the basis of intellectual information technology. Application to magazine "Information technology"]. 2011. no. 10. 32 p. (In Russ.).
14. Ohtilev M.Ju, Sokolov B.V., Jusupov R.M. [Theoretichal and technological bases of the concept of proactive monitoring and control of complicated plants]. *Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki – Informations SFU*. Engineering science. Taganrog: Southern federal university. 2015. vol. 1. pp. 162–174. (In Russ.).
15. Pontrjagin L.S. *Mathematicheskaia theoriia optimal'nych processov* [The mathematical theory of optimum processes]. M.: Nauka. 1969. 391 p. (In Russ.).

Калинин Владимир Николаевич — д-р техн. наук, профессор, Заслуженный деятель науки и техники РФ; действительный член Российской академии космонавтики имени К.Э. Циолковского, профессор, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского. Область научных интересов: теория системных исследований, космическая кибернетика и информатика, теория оптимального управления динамическими системами, автоматизированные системы управления, подготовка инженерных кадров и новые информационно-дидактические технологии в высшем образовании. Число научных публикаций —170. kvn.112@mail.ru; ул. Ждановская 13, Санкт-Петербург, 197198; р.т.: +7(812)3479508, Факс: +7(812)3284450.

Kalinin Vladimir Nikolaevich — Ph.D., Dr. Sci., professor, Honored Scientists of the Russian Federation; The full member of the Russian academy of astronautics of a name K.E. Tsiolkovsky, professor, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: the theory of system researches, space cybernetics and computer science, the theory of optimum control of the dynamic systems, the automated control systems, preparation of the engineering staff and new information-didactic technologies in higher education. The number of publications — 170. kvn.112@mail.ru; 13, Zhdanovskaya street, St.-Petersburg, 197198, Russia; office phone: +7(812)3479508, Fax: +7(812)3284450.

РЕФЕРАТ

Калинин В.Н. **О некоторых задачах оптимального управления информационным взаимодействием космического аппарата с поверхностью Земли.**

В настоящей статье рассматриваются некоторые детерминированные задачи оптимального управления информационным взаимодействием космического аппарата с поверхностью Земли. Предполагается, что космический аппарат совершает неуправляемый полет по орбите вокруг Земли, информационное взаимодействие с областью на поверхности Земли осуществляется с помощью одного прибора. На борту космического аппарата имеется один ограниченный непополняемый ресурс, расходуемый в процессе информационного взаимодействия.

В качестве множества информационного взаимодействия на земной поверхности рассматривается отрезок трассы полета. При этом состояние информационного взаимодействия для каждого момента времени характеризуется неотрицательной функцией координаты подспутниковой точки, представляющей распределение линейной плотности полученной информации по заданному отрезку трассы полета. Соответствующая динамическая модель информационного взаимодействия представлена в виде линейного интегрального оператора, отображающего класс допустимых управляющих воздействий в пространство информационных состояний, в котором вводится топология гильбертова пространства измеримых по Лебегу и суммируемых с квадратом модуля вещественных функций. Под управляющим воздействием здесь понимается интенсивность (скорость) поступления информации. Процесс расхода ресурса при этом описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

Рассматриваемые задачи программного оптимального управления ставятся как задачи минимизации в классе допустимых управлений выпуклых терминальных функционалов Майера, представляющих собой квадратичные или линейные функционалы от конечного информационного состояния. Класс допустимых управлений при этом представляет собой выпуклый компакт в соответствующем гильбертовом пространстве управлений. Показано, что в этом случае множества достижимости в пространстве информационных состояний слабо компактны, а минимизируемые функционалы слабо полунепрерывны снизу в классе допустимых управлений, откуда следует, что решение рассматриваемых задач управления существует.

В статье рассмотрены четыре варианта указанных задач оптимального управления в гильбертовом пространстве информационных состояний. Для их решения использованы расширенный принцип максимума Л.С. Понтрягина и общая концепция Лагранжа. Получены соответствующие алгоритмы формирования искомых оптимальных программ управления.

SUMMARY

Kalinin V.N. **On Some Problems of Optimum Control of Informational Interaction of a Space Vehicle with the Surface of the Earth.**

In the present paper, some determined problems of optimum control of informational interaction of the spacecraft with the surface of the Earth are considered. It is supposed that the spacecraft makes uncontrollable earth-orbital flight ; informational interaction with an area on the surface of the Earth is carried out by means of one device. Onboard spacecraft there is one not supplemented resource spent in the course of informational interaction.

As a set of informational interaction on the Earth's surface, the segment of a line of flight is considered. Thus, the condition of informational interaction for each instant is characterized by nonnegative function of coordinate of the subsatellite point representing distribution of a linear denseness of the received information on the set segment of a line of flight. The corresponding dynamic model of informational interaction is presented in the form of the linear integral operator mapping a class of admissible operating actions in space of informational conditions, in which the Hilbert space topology on Lebesgue-measurable and summarized with quadrate of the module of real functions is introduced. Operating action here is understood as intensity (velocity) of inflow of the information. Process of the expense of a resource is thus described by an ordinary differential equation.

Considered problems of program optimum control are put as a minimization problem in a class of admissible controls of convex terminal functionals of Mayer representing square or linear functionals from a final informational condition. The class of admissible controls thus represents a convex compact set in a corresponding Hilbert space of controls. It is shown that in this case sets of accessibility in space of informational conditions are poorly compact, and minimized functionals are poorly semicontinuous from below in a class of admissible controls, whence follows that the solution of considered problems of control exists.

In this paper, four variants of the specified problems of optimum control in a Hilbert space of informational conditions are considered. For their solution, the expanded maximum principle of Pontrjagin's and the general concept of Lagrange are used. Corresponding algorithms of shaping of required optimum time schedule controls are received.