УДК 621.391:519.711.3

К.А. Батенков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ КАНАЛОВ СВЯЗИ

Батенков К.А. **Моделирование и синтез линейных дискретных отображений непрерывных каналов связи**.

Аннотация. Формализованы дискретные отображения непрерывных каналов связи в виде операторов преобразования метрических конечномерных пространств. Показана их связь с представлением в виде интегральных преобразований на основе предельного перехода от представления в виде рядов. Показано, что операторы аналого-дискретных преобразований дискретных отображений непрерывных каналов связи на основе канонического разложения В. С. Пугачева, вычисляются путем итерационной процедуры, последовательно определяющей базисные функции на выходе канала в виде рекуррентного операторного преобразования входных базисных функций.

Ключевые слова: непрерывный канал связи, дискретное отображение непрерывных каналов связи, оператор, базис пространства, каноническое разложение В. С. Пугачева, системная характеристика, аддитивная помеха.

Batenkov K.A. **Modeling and Synthesis of Discrete Mappings of Linear Continuous Channel.**

Abstract. Linear continuous channel discrete mappings in the form of metric finite-dimensional space operators are formalized. Its coupling with representation in the form of integral transforms on the basis of limiting process from series view is shown. It is shown that semi-digital operators of linear continuous channel discrete mappings on the basis of Pugachev canonical presentation are calculated by force of iterative procedure consistently conditioning basis functions on input and output channel in terms of recurrence input transformation.

Keywords: continuous channel, discrete mappings of linear continuous channel, operator, space basis, Pugachev canonical expansion, system characteristic, additive noise.

1. Введение. При синтезе систем связи одним из этапов является формирование канала дискретного времени, предполагающее исследование конечномерных пространств и преобразований их в бесконечномерные и обратно, что является следствием не только необходимости практической реализации систем передачи, но и требований к моделированию с позиций теории вероятности на основе вероятностных мер [1]. Подобные преобразования в научной литературе определяются термином «дискретные отображения непрерывных каналов связи», акцентирующем внимание на том, что осуществляется процедура перехода от канала с непрерывными по времени и состоянию входом и выходом к каналу с непрерывными по состоянию и дискретным по времени входами и выходами [2].

Следует подчеркнуть, что данная задача тесно взаимосвязана с наиболее острой проблемой, существующей с момента возникновения связи как средства коммуникации и по настоящее время, – это постоянный рост требований к скорости и качеству передачи информации со стороны пользователей. При этом актуальность данной проблемы ощутима как в области беспроводных, так и проводных систем связи [3, 4].

Естественно, что наилучшим решение подобной задачи является совместная оптимизация дискретно-аналогового и аналого-дискретного преобразователей в целом [5]. Однако в данном случае существует серьезные затруднения, связанные, прежде всего, со сложностью описываемых математическими моделями каналов связи, и как следствие невозможностью получения аналитических решений в явном виде [6].

В то же время для ряда простейших моделей, например канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом, аналитический вид оптимальных дискретных отображений формализован [7]. Однако используемый критерий качества (отсутствие шумов ортогональности) приводит к тому, что система связи оказывается настроенной не на максимизацию достоверности либо скорости передачи информации, а, по сути, на поиск решения, которое позволяет получить в явном виде функцию правдоподобия результирующего дискретного канала связи и, как следствие, обеспечить простоту дальнейших математических выкладок при проектировании других функциональных устройств системы (кодера и декодера). Использование других критериев (минимального среднего риска в общем случае) наталкивается на серьезные трудности вследствие сложности аналитического описания как функции правдоподобия самого непрерывного канала связи, так и трудностью математических преобразований общей формы среднего риска [8].

Одним из способов решения возникающих затруднений оказывается использование линейных как дискретно-аналогового, так и аналого-дискретного преобразователей. В результате появляется возможность описания дискретных отображений в аналитическом виде для целого набора критериев качества. Причем для ряда модулей непрерывных каналов связи, например с аддитивным гауссовским шумом, оказываются справедливы теоремы об отсутствии информационных потерь при подобной линейной трансформации [9]. Однако более сложные модели каналов не обладают схожими свойствами с точки зрения простоты математических выкладок, и как следствие не позволяют даже для линейных дискретно-аналогового и аналого-дискретного преобразователей получать приемлемые отображения.

В результате для более точного согласования линейных дискретно-аналогового и аналого-дискретного преобразователей со свойствами канала связи вводят дополнительные устройства, например банки фильтров, позволяющие несколько видоизменить передаточную функцию как модулятора, так и модулятора [10, 11]. Однако даже в подобной ситуации зачастую оказывается не под силу воспроизвести максимально достижимые показатели качества дискретного канала связи.

Во многих задачах теории связи так же пользуются приемом, когда один из блоков (дискретно-аналоговый или аналого-дискретный преобразователь) считают заданным и оптимизация производится либо только для другого блока, либо же осуществляют последовательную оптимизацию: сначала при фиксированном аналого-дискретном преобразователе оптимизируют дискретно-аналоговый преобразователь, затем при полученном дискретно-аналоговом – аналого-дискретный преобразователь, а далее процедуру циклически повторяют. В результате получаются дискретные отображения, являющиеся, по сути, компромиссом между достигаемым техническим эффектом и требуемой вычислительной сложностью [12, 13]. Однако данный подход оказывается допустимым так же лишь для ряда достаточно простых моделей каналов связи, а для более точных моделей трудоемкость аналитических выкладок сопоставима с общим подходом совместной оптимизации дискретно-аналогового и аналого-дискретного преобразователей.

Наиболее широко используемым методом синтеза дискретных отображений непрерывных каналов связи в настоящее время является метод, который предполагает оптимизацию лишь аналого-дискретного преобразователя при фиксированности дискретно-аналогового [14, 15]. При этом дискретно-аналоговый преобразователь пытаются как можно лучше согласовать со свойствами непрерывного канала либо на основе интуитивного подхода, используя, например, гармонические сигналы, либо проводят предварительную оптимизацию для более простых, но близких по природе моделей каналов связи. В этой связи возникает две основные проблемы. Первая – это аналитическая сложность в общем виде получения структуры аналого-дискретного преобразователя, а вторая – необходимость дополнительной подстройки дискретно-аналогового преобразователя под свойства используемой модели канала и меняющего аналого-дискретного преобразователя.

Первую трудность преодолевают различными путями – применяют различного рода квазиоптимальные алгоритмы аналого-дискретного преобразования (итерационные, линейные и другие), зачастую существенно проигрывающие оптимальным схемам обработки, но значительно менее требовательные с точки зрения вычислений [16, 17].

Для разрешения второй проблемы разработаны достаточно мощные методы, по сути, представляющие собой отдельное направление в теории кодирования, нашедшие наиболее широкое применение как в проводной, так и беспроводной связи при использовании систем с несколькими входами и выходами (с векторными каналами). Однако в настоящее время найдено лишь ограниченное число кодов, позволяющих существенно повысить технический эффект системы связи, причем модели каналов, для которых они разработаны так же весьма просты и зачастую не совсем полно отражают физику реального канала связи.

Таким образом, современные дискретно-аналоговые и аналого-дискретные преобразования предполагают их разбиение на последовательность преобразований, каждое из которых переводит лишь элементы определенного выделенного подпространства сигналов (векторов или многомерных функций), а не всего пространства. При этом зачастую в качестве правил выделения подпространств выступают заданные ограничения параметров сигналов, например пространственные, частотные или временные аргументы, что приводит к сужению классов применяемых преобразований. Кроме того, данные правила в большинстве случаев не учитывают целостность пространств сигналов и, как следствие, взаимосвязанность подпространств, а следовательно вносят дополнительные информационные потери. В результате, дискретное отображение непрерывного канала связи формируется на основе последовательности преобразований заданного класса, осуществляющих трансформацию только выделенной области пространства сигналов. Следовательно и само дискретное отображение в данном случае сводится к последовательности фиксированных классов отображений (не обязательно дискретных) операторов каналов связи с областями определения и значения, являющимися подпространствами исходных векторных и функциональных пространств сигналов на входах и выходах дискретно-аналогового и аналого-дискретного преобразователей.

В настоящей работе предлагается подход к синтезу линейных дискретных отображений непрерывных каналов связи в обобщенной форме, позволяющий рассматривать линейные дискретные отображения не только как совокупность последовательности преобразований, но и как единое целостное преобразование непрерывного канала связи с произвольными свойствами, описываемыми на уровне первых двух статистических моментов.

2. Дискретные отображения непрерывных каналов связи как операторы преобразования метрических пространств общего

вида. Дискретным аналогом интегральных преобразований, позволяющим анализировать динамические системы на ограниченном интервале анализа, а также исследовать ошибки аппроксимации, является бесконечный обобщенный ряд, по сути, сопоставляющий произвольный сигнал некоторому числовому вектору бесконечной размерности [18]:

$$x(t,\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} x_i \phi_i(t,\mathbf{r}), \tag{1}$$

$$z(t',\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^{N'} z_i \phi_i^{'}(t',\mathbf{r}'), \tag{2}$$

где x_i, z_i – входные и выходные коэффициенты разложения соответственно; $\varphi_i(t,\mathbf{r})$, $\varphi_i^{'}(t',\mathbf{r}')$ – входные и выходные базисные функции разложения соответственно; t, t', $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ – временные и пространственные координаты на входе и выходе канала связи соответственно.

Как и в случае интегральных преобразований, выбор входных и выходных базисов достаточно произволен и может как быть продиктован условиями решаемой задачи, так и являться ее решением.

В целом представление в виде интегральных преобразований является следствием того или иного предельного перехода от представления в виде рядов [19]. Так, устремление смещения во времени и пространстве дискретного базиса многомерных дельта-функций, представляющих сигналы в виде последовательности отсчетов, к нулю приводит к непрерывному базису многомерных дельта-функций, интерпретирующих сигналы в непрерывном виде, то есть:

$$\int_{\Omega_{t'}}\int_{\Omega_{\mathbf{r}'}} x(t',\mathbf{r}')\delta(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')dt'd\mathbf{r}' = \lim_{\Delta t,\Delta\mathbf{r}\to 0} \Delta t\Delta\mathbf{r} \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} x(i\Delta t, j\Delta\mathbf{r})\delta(t-i\Delta t,\mathbf{r}-j\Delta\mathbf{r}).$$

Подобные переходы возможно также осуществить и для ряда других базисов, например базиса гармонических функций, экспоненциальных функций с гармоническим заполнением, функций Френеля и т. п.

По аналогии с интегральными преобразованиями [20, 21] и входным базисным функциям можно взаимнооднозначно сопоставить выходные, в виде реакций канала связи на первые из них:

$$\varphi_i'(t',\mathbf{r}') = \mathrm{H}'\{\varphi_i(t,\mathbf{r})\}. \tag{3}$$

Тогда выходной сигнал представим в виде ряда, в котором базисом выступает реакция (3), а коэффициентами разложения – входные коэффициенты разложения сигнала, то есть $z_i = x_i$:

$$z(t',\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^{N} x_i \, \mathrm{H}'\{\varphi_i(t,\mathbf{r})\}. \tag{4}$$

Выбор базисов, как и в случае интегральных разложений, произволен, поэтому не обязательно входные и выходные базисные функции должны быть идентичны (ситуация смешанных базисов). Следовательно в общем случае разложения в ряд, в отличие от интегрального представления, оператор преобразования в канале связи имеет матричный вид [19, 20]:

$$\mathbf{z} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}, \tag{5}$$

где $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ ..., z_\infty)^T$, $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ ..., x_\infty)^T$ – бесконечномерные вектора коэффициентов разложения на выходе и входе соответственно;
а элементы матрицы преобразования в канале связи $\mathbf{K} = \{K_{i,j}\}$, $i, j = \overline{0, \ \infty}$, по сути являющейся системной характеристикой канала, задаются выражениями:

$$K_{i,j} = \int\limits_{\Omega_{t'}} \int\limits_{\Omega_{\mathbf{r}'}} \varphi_i'^{-1}(t',\mathbf{r}') \mathrm{H}'\{\varphi_j(t,\mathbf{r})\} dt' d\mathbf{r}' \tag{6}$$

и определяются на основе сопряженных выходных базисных функций $\varphi_i'^{-1}(t,\mathbf{r})$, удовлетворяющих условию ортогональности:

$$\int\limits_{\Omega_t} \int\limits_{\Omega_\mathbf{r}} \varphi_i'(t,\mathbf{r}) \varphi_j'^{-1}(t,\mathbf{r}) dt d\mathbf{r} = \delta_{i,j},$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Таким образом, как и при интегральных разложениях, представление как сигналов, так и преобразований в канале связи может быть различно и задается в первую очередь базисами метрических пространств, в рамках которых рассматриваются исследуемые каналы связи. Однако сравнение выражений (4) и (5) позволяет сделать вывод о возможности представления сигнала на выходе линейного канала связи как в виде линейной комбинации системной характеристики канала и коэффициентов разложения входного сигнала, так и в виде дискретной свертки матричной системной характеристики и коэффициентов разложения входного сигнала, вне зависимости от выбора формы базисов. В результате выходной сигнал можно рассматривать в виде дискретного разложения в базисе дискретной системной характеристики [21].

Таким образом, при использовании обобщенного разложения в ряд любой нестационарный канал связи, в том числе и стохастический, описывается в виде матричной системной характеристики (в общем случае бесконечномерной), в литературе [22, 23, 24] называемой спектральной, или проекционной. Данное обстоятельство устанавливает наличие алгебраической связи между коэффициентами разложения входных и выходных сигналов.

3. Дискретные отображения непрерывных каналов связи как операторы преобразования метрических пространств с заданными базисами. Как и в случае интегральных преобразований, в качестве базисных функций может использоваться произвольный ряд линейно независимых функций, причем не обязательно ортогональных [19]. Поэтому спектральные характеристики как системные, так и сигнальные трактуются как некоторые коэффициенты разложения их исходных непрерывных аналогов относительно выбранной системы линейно независимых функций, или базиса [23]. Таковым базисом в зависимости от исходных данных решаемой задачи может быть и система тригонометрических функций (Фурье), и система экспоненциальных функций с тригонометрическим заполнением (Лапласа), и система функций Уолша, а также ряд других функций, по сути являющихся дискретным аналогом ядер интегральных преобразований. Следует отметить, что дискретные во времени и пространстве сигналы в данном контексте могут рассматриваться в виде спектральных разложений в базисе дискретных дельта-функций.

Преимущественное использование при синтезе систем связи базисов Фурье и Лапласа:

$$\varphi_i(t,\mathbf{r})=\left\{ e^{i\left\{ i_{r_0}\omega_t t+\omega_{\mathbf{r}}^T diag\left(i_{\mathbf{r}}\right)\mathbf{r}\right\}} \,\middle|\, i=i_{r_0}+\sum_{j=1}^{n}\max\left(i_{r_{j-1}}\right)\cdot i_{r_j} \right\}, \tag{7}$$

$$\varphi_i(t,\mathbf{r})=\left\{ e^{i_{r_{n+1}}\sigma_t t+\sigma_{\mathbf{r}}^T diag\left(i_{\mathbf{r}'}\right)\mathbf{r}+i\left\{ i_{r_0}\omega_t t+\omega_{\mathbf{r}}^T diag\left(i_{\mathbf{r}}\right)\mathbf{r}\right\}} \,\middle|\, i=i_{r_0}+\sum_{j=1}^{2n+1}\max\left(i_{r_{j-1}}\right)\cdot i_{r_j} \right\}, \tag{8}$$

где $i_{\mathbf{r}}=\left(i_{r_1},\ \ldots,i_{r_n}\right)$, $i_{\mathbf{r}'}=\left(i_{r_{n+2}},\ \ldots,i_{r_{2n+1}}\right)$ – n-мерные вектора дискретных пространственных координат; ω_t, $\omega_{\mathbf{r}}$ – временная частота и вектор про-

странственных частот дискретизации соответственно; σ_t, $\sigma_{\mathbf{r}}$ – коэффициенты затухания по временной и пространственным координатам соответственно;
связано, как и в случае интегральных преобразований, прежде всего с тем, что они являются собственными функциями линейных стационарных систем, а значит сохраняют свою форму при прохождении через подобные системы [25]. В результате матричная системная характеристика канала связи **K** приобретает диагональный вид, а следовательно алгебраическая форма преобразований канала (5) еще больше упрощается и каждый коэффициент разложения пространственно-временных сигналов может рассматриваться независимо от других, то есть:

$$z_i = K_{i,i} x_i \,,\ i = \overline{0, N} \,. \tag{9}$$

Различия в условиях применения преобразований Лапласа и Фурье подобны рассмотренным в рамках интегральных преобразований. При этом при несоблюдении условий стационарности простейшее выражение вида (9) оказывается недопустимым поскольку нарушается ортогональность откликов линейной системы на гармоническое воздействие вследствие изменения их формы при ограниченных интервалах анализа как во временной, так и пространственной области. В итоге для обеспечения независимости спектральных составляющих пространственно-временных сигналов необходимо решать достаточно сложную задачу по поиску собственных функций и чисел линейной нестационарной системы, хорошо известную в математике и физике [26].

Развитие электронно-вычислительных устройств привело к широкому использованию кусочно-постоянных функций, основными среди которых являются функции Уолша и Хаара [25]. Основным преимуществом их использования по сравнению с функциями Фурье и Лапласа является постоянство первых из них на некотором, пусть и не слишком большом, интервале. В результате число проводимых операций умножения значительно сокращается, поскольку отпадает необходимость нахождения каждого произведения сигнала на базисные функций в каждой точке области анализа. Система функций Уолша может определяться различными способами – существует упорядочение по Уолшу, Пэли и Адамару [25, 27]. Наиболее простым с точки зрения определения и генерации является упорядочение по Пэли, согласно которому функции Уолша ранжируются по возрастанию их номеров в двоичном представлении.

Несмотря на значительное снижение требуемых операций умножения системы функций Уолша обладают существенным недостатком. Ее корреляционные свойства оказываются неудовлетворительными для ряда задач, связанных с разделением сигналов [27]. Это является следствием значительных отклонений функции распределения корреляционной функции данной системы на краях диапазона от нормальной плотности распределения, то есть вероятность появления сильно коррелированных функций Уолша существенно выше, чем у полного кода, обладающего предельными характеристиками независимости. При этом коэффициент эксцесса распределения корреляционной функции систем Уолша значительно превосходит единицу, что свидетельствует о возможности усовершенствования систем базисных функций, в частности путем разработки так называемых производных систем, составленных из функций, представляющих собой произведения более элементарных.

Функции Хаара имеют вид:

$$\varphi_i(t,\mathbf{r}) = \left\{ \prod_{j=0}^{n} h(r_j) \,\middle|\, h(x) = \begin{cases} 2^{m_j/2}, & (i_{r_j} - 1)m_j^{-1} \le x < (i_{r_j} - 1/2)m_j^{-1}, \\ -2^{m_j/2}, & (i_{r_j} - 1/2)m_j^{-1} \le x < i_{r_j} m_j^{-1}, \\ 0, & x \notin \left[(i_{r_j} - 1)m_j^{-1}, i_{r_j} m_j^{-1}\right), \end{cases} \right.$$
$$\left. i = i_{r_0} + \sum_{j=1}^{n} \max\left(i_{r_{j-1}}\right) \cdot i_{r_j},\ m_j = \log_2\left\{\max\left(i_{r_j}\right)\right\},\ r_0 = t \right\}. \quad (10)$$

В отличие от функций Уолша, принимающих в области анализа значения равные ±1, функции Хаара при условии соблюдения условия ортонормированности принимают одно из трех возможных значений, включающих нуль. Это обстоятельство позволяет несколько по иному учитывать поведение исходных пространственно-временных сигналов при вычислении коэффициентов разложения (спектрального состава), чем при расчете в базисе Уолша. Основное различие заключается в наборе точек, в которых рассматривается поведение сигналов. Так, разложение в ряд Уолша требует использования всех значений сигнала на интервале анализа, в то время как базис Хаара предполагает учет значений лишь в точках, достаточно близкорасположенных друг относительно друга. В результате число операций умножения может быть еще снижено по сравнению с применением разложения в ряд Уолш [25].

4. Дискретные отображения непрерывных каналов связи как операторы преобразования метрических пространств с базисом в виде координатных функций интегрального канонического

представления В. С. Пугачева. По аналогии с интегральным каноническим разложением в [28] введено понятие канонического разложения случайной функции (процесса), называемого также разложением В. С. Пугачева [29]. При этом основным отличием от ранее описанных базисных функций является их хотя и детерминированный, но не структурированный характер, поскольку форма функций вычисляется исходя из требуемых свойств коэффициентов разложения (спектрального состава). Таким образом, отправной точкой в данном разложении служит не форма базиса, а свойства результирующего (дискретного) случайного процесса [30].

Стохастический пространственно-временной сигнал представляется в виде линейной комбинации некоррелированных случайных величин, имеющих равные нулю математические ожидания, то есть коэффициентами данного разложения служит дискретный некоррелированный шум (в общем случае белый неоднородный как по пространству, так и по времени [31, 32]):

$$M\{\mathbf{x}\}=0\,,\ M\{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^T\}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}_x\,, \tag{11}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная (бесконечномерная) матрица; $\mathbf{d}_x=\left(d_{x_0},\ d_{x_1},\ \ldots d_{x_N}\right)^T$ – вектор дисперсий дискретного нестационарного белого шума (коэффициентов разложения $\mathbf{x}$).

Вид разложения соответствует формулам (1) и (2), в которых выбор входных и выходных базисных функций разложения (координатных функций канонического разложения) осуществляется в соответствии с требованиями (11) и подразумевается центрированность исходного пространственно-временного сигнала. В случае невыполнения этого условия всегда можно свести нецентрированный процесс к центрированному путем вычитания из первого его математического ожидания. В результате каноническое разложение будет включать еще одно детерминированное слагаемое – функцию математического ожидания.

Как и в случае интегрального представления, нахождение в явном виде базисных функций разложения сопряжено с рядом часто непреодолимых трудностей [33]. Однако вследствие представления пространственно-временного сигнала в каждой точке области анализа в виде суммы случайных величин значительно упрощаются процедуры нахождения его характеристик [32]. Зависимость же от временных и пространственных координат целиком заключена именно в базисных функциях разложения, являющихся детерминированными функциями времени. В результате осуществление преобразований случайных процессов и полей, в том числе и нелинейных, значительно упрощаются по сравнению с исходным описанием.

Необходимыми условиями осуществимости канонического представления являются коррелированность пространственно-временного сигнала и коэффициентов разложения, а также конечность их дисперсий, что выражается в виде функциональной зависимости для функций разложения [28]:

$$\varphi_i(t,\mathbf{r}) = \frac{M\{x_i \cdot x(t,\mathbf{r})\}}{d_{x_i}}. \tag{12}$$

Данное соотношение совместно с (1) или (2) позволяет формально определить стохастический пространственно-временной сигнал в виде суммы элементарных случайных составляющих, представляющих собой произведение некоторой детерминированной функции и случайного коэффициента. Однако практические способы выбора коэффициентов разложения и вычисления соответствующих базисных (координатных) функций оказываются достаточно произвольными. Кроме того, сходимость рядов (1) или (2) также задается в некотором смысле, а поэтому также должна быть жестко определена.

Так, в случае использования простейшей зависимости между коэффициентами разложения и исходным сигналом в виде скалярного произведения его самого на соответствующую базисную функцию:

$$x_i = \int_{\Omega_t}\int_{\Omega_\mathbf{r}} x(t,\mathbf{r})\varphi_i(t,\mathbf{r})dtd\mathbf{r}. \tag{13}$$

Условие некоррелированности приводит к уравнению, которому должны удовлетворять базисные функции:

$$\int_{\Omega_t}\int_{\Omega_\mathbf{r}} \varphi_i(t,\mathbf{r})\int_{\Omega_{t'}}\int_{\Omega_{\mathbf{r}'}} K_x(t,\mathbf{r},t,\mathbf{r}')\varphi_j(t',\mathbf{r}')dt'd\mathbf{r}'dtd\mathbf{r} = d_{x_i}\delta_{i,j}, \tag{14}$$

где $K_x(t,\mathbf{r},t,\mathbf{r}') = M\{x(t,\mathbf{r})x(t',\mathbf{r}')\}$ – корреляционная функция пространственно-временного сигнала.

Наложение условия ортонормированности базисных функций:

$$\int_{\Omega_t}\int_{\Omega_\mathbf{r}} \varphi_i(t,\mathbf{r})\varphi_j(t,\mathbf{r})dtd\mathbf{r} = \delta_{i,j} \tag{15}$$

сводит задачу к поиску решений однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода [34]:

$$d_{x_i}\varphi_i(t,\mathbf{r}) = \int\limits_{\Omega_{t'}}\int\limits_{\Omega_{\mathbf{r}'}} K_x(t,\mathbf{r},t',\mathbf{r}')\varphi_i(t',\mathbf{r}')dt'd\mathbf{r}',$$

которое приводит к разложению Карунена-Лоэва [33, 35]. Таким образом, данное разложение делает возможным описание стохастического пространственно-временного сигнала на уровне его вторых моментов и его представление в виде некоррелированных случайных величин в бесконечномерном пространстве детерминированных базисных функций, определенных на некотором ограниченном интервале анализа. Данное обстоятельство одновременно является и достоинством, и недостатком подобного представления. С одной стороны оно позволяет достаточно просто проводить преобразования в линейных и нелинейных системах посредством матричных операций со случайными векторами коэффициентов разложения. С другой же стороны, за исключением гауссовских процессов, в общем случае не обеспечивает независимость коэффициентов разложения, поскольку в данном случае коррелированность не влечет за собой независимости [36]. К тому же следует еще раз подчеркнуть, что разложение Карунена-Лоэва является частным случаем канонического разложения и отличается от последнего наложением условия ортонормированности функций разложения (15) и заданием коэффициентов разложения в форме скалярного произведения исходного сигнала и базисных функций (13). Для самого же канонического разложения помимо условий (11) никаких дополнительных ограничений не накладывается.

В [37] показывается, что подобное представление является оптимальным как с точки зрения минимизации среднеквадратической ошибки аппроксимации пространственно-временного сигнала конечным числом членов ряда (1) или (2), так и с позиции минимизации энтропии дискретного набора дисперсий коэффициентов разложения при условии соблюдения нормировки сигнала для класса ортонормированных функций разложения [38].

Для более обширных классов функций, описываемых каноническим разложением, в [28] доказывается лишь оптимальность с позиции минимума среднеквадратической ошибки аппроксимации конечным числом членов ряда. Вопрос о минимизации энтропии остается открытым, однако разумно предположить, что подобное представление все же существует, поскольку каноническое разложение не требует задания коэффициентов разложения в виде скалярного произведения (13).

В общем случае для представления стохастического пространственно-временного сигнала в виде ряда элементарных случайных функций при выполнении условия некоррелированности коэффициентов разложения (11) необходимо обобщить частный случай линейного преобразования в виде скалярного произведения (13) путем рассмотрения произвольных линейных функционалов:

$$x_i = \phi_i\{x(t,\mathbf{r})\}.$$

Другими частными случаями данных функционалов являются линейные комбинации значений стохастического сигнала в дискретном наборе точек:

$$\phi_i\{x(t,\mathbf{r})\} = \sum_{j,j'} a_{i,j,j'} x(t_j, \mathbf{r}_{j'}),$$

являющиеся частным случаем линейных комбинаций значений сигнала и его производных до заданного порядка в дискретном наборе точек:

$$\phi_i\{x(t,\mathbf{r})\} = \sum_{k_0,\ldots,k_n,j,j'} a_{i,k_0,\ldots,k_n,j,j'} \left. \frac{\partial^k x(t,\mathbf{r})}{\partial t^{k_0} \prod_{k'=1}^{n} \partial r_{k'}^{k_i}} \right|_{t=t_j,\ \mathbf{r}=\mathbf{r}_{j'}},$$

являющиеся в свою очередь частным случаем более общего скалярного произведения:

$$\varphi_i\{x(t,\mathbf{r})\} = \int_{\Omega_t} \int_{\Omega_\mathbf{r}} x(t,\mathbf{r}) \varphi_i(t,\mathbf{r})\, dt d\mathbf{r}, \qquad (16)$$

в котором произвольные функции $\phi_i(t,\mathbf{r})$ содержат линейные комбинации дельта-функций до соответствующего порядка. Кроме того, возможны еще более общие случаи линейных функционалов ϕ_i.

В результате условие некоррелированности коэффициентов разложения (11) приводит к уравнениям, которым должны удовлетворять линейные функционалы:

$$\varphi_{i\,t,\mathbf{r}}\left[\varphi_{j\,t',\mathbf{r}'}\{K_x(t,\mathbf{r},t',\mathbf{r}')\}\right] = d_{x_i}\delta_{i,j}, \qquad (17)$$

где нижние индексы t, $\mathbf{r}$ в функционале ϕ означают применение этого функционала к функции по данным аргументам t, $\mathbf{r}$ (остальные аргументы рассматриваются при фиксированных значениях).

Данное уравнение по своей форме сходно с условиями, которым должны соответствовать базисные функции в разложении Карунена-

Лоэва (14), однако в отличие от него уравнение (17) не содержит в явном виде выражения для базисных функций, что делает их форму более произвольной, поскольку не налагается дополнительное ограничение на их ортогональность. Вид же базисных функций определяется оператором Фредгольма путем постановки (16) в (12):

$$\phi_i\left(t,\mathbf{r}\right)=\frac{1}{d_{x_i}}\varphi_{i\,t',\mathbf{r}'}\left\{K_x\left(t,\mathbf{r},t',\mathbf{r}'\right)\right\}. \tag{18}$$

Используя данную формулу на основании требований ортогональности линейных функционалов (17), в [28] выводится необходимое и достаточное условие некоррелированности коэффициентов разложения в виде условий биортогональности линейных функционалов базисных функций:

$$\varphi_i\left\{\phi_j\left(t,\mathbf{r}\right)\right\}=\delta_{i,j}. \tag{19}$$

В результате возможна реализация последовательной процедуры нахождения требуемых линейных функционалов ϕ_i на основе произвольно выбранной последовательности линейных функционалов γ_i. Данная процедура такова [28]. Первоначально определяют линейный функционал ϕ_0 произвольным образом, то есть:

$$\varphi_0=\gamma_0. \tag{20}$$

После этого согласно (17) вычисляют дисперсии коэффициентов разложения (при условии $i=j$), а по формуле (18) определяют базисную функцию разложения $\varphi_0(t,\mathbf{r})$. На ее основе вычисляют линейный функционал ϕ_1 в соответствии с рекуррентной формулой:

$$\phi_i=\gamma_i-\sum_{j=0}^{i-1}\gamma_i\left\{\varphi_j\left(t,\mathbf{r}\right)\right\}\phi_j,\ i=\overline{1,\infty}. \tag{21}$$

Далее производится расчет базисной функции по выражению (18). Процедура продолжается до вычисления необходимого числа членов ряда канонического разложения. Очевидно, вследствие произвольности выбора функционалов начального приближения γ_i существует бесчисленное множество канонических разложений стохастического пространственно-временного сигнала в отличие от единственного разложения Карунена-Лоэва. Получить каноническое разложение из разложения Карунена-Лоэва и наоборот возможно путем поворота осей координат [29], однако каноническое разложение не связывает линейные функционалы ϕ_i с характеристиками случайного процесса, в то время как ортогональное предполагает строгий вид этих функционалов, подынтегральной функцией в которых является базисная функция, то есть $\phi_i(t,\mathbf{r}) = \varphi_i(t,\mathbf{r})$. В результате возможно варьирование вида линейных функционалов ϕ_i для достижения определенной цели канонического разложения – минимума некоторой ошибки аппроксимации, энтропии и т. п. В том числе возможно наложение дополнительных условий в виде независимости коэффициентов разложения, или по крайней мере равенства нулю некоторых их центральных моментов, что позволяет применять данное разложение в случае негауссовских процессов.

Данные разложения позволяют описывать преобразования в канале путем матричных операций вида (5), причем естественно, что на выходе детерминированной линейной системы свойства канонических разложений сохраняются [32], то есть коэффициенты разложения остаются некоррелированными случайными величинами, имеющими характер белого шума, и определяются более простыми выражениями (9). Однако в случае прохождения сигналов через стохастические системы, в том числе определяемые детерминированной системной характеристикой и шумом, подобное свойство может не сохраняться. В результате требуется отыскание статистических характеристик на выходе канала связи, причем канонические разложения в этом случае приходится выполнять и над случайным процессом на выходе.

Таким образом, можно заключить, что, как и в случае интегральных разложений, выбор базиса в данном контексте счетного, пусть и бесконечного, числа функций, целиком определяется условиями решаемой задачи исходя из удобства представления и целей синтеза. При этом выбор базиса оказывается также достаточно произвольным.

Следует отметить еще одно немаловажное обстоятельство. В практических целях стохастический сигнал как на входе канала, так и на выходе описывается в виде конечномерного случайного вектора, обычно получающегося путем учета в разложениях (1) и (2) конечного числа членов ряда. Причем выбор этого числа определяется в основном эвристически, например первых столько-то, либо на основании максимальных значений некоторого параметра соответствующих им базисных функций. В результате с точки зрения описания как самих сигналов, так и канала связи неизбежна ошибка аппроксимации, величина которой зависит не только от типа канала связи и используемых сигналов, но и от формы базисных функций. Таким образом, чрезмерная вольность выбора формы базиса или свойств результирующих коэффициентов разложения приводит к недостаточно полному учету требований построения системы связи с точки зрения близости к практически нереализуемым бесконечномерным системам.

Именно поэтому при разложении следует учитывать не только свойства системной характеристики канала связи, но и характер неизбежно присутствующей в любом канале связи аддитивной помехи, которая, как указывалось ранее, может оказывать существенное влияние на статистические взаимосвязи коэффициентов разложения, в том числе и канонического.

В общем случае в канале связи присутствует пространственно-распределенная помеха $n(t',\mathbf{r}')$, которая аддитивно взаимодействует с полезной составляющей принимаемого сигнала. Причины ее возникновения могут быть самыми разнообразными, причем их проявление принимает различные формы, определяемые конкретной реализацией случайного процесса [5]. В результате подобные преобразования, включающие элемент стохастичности, оказываются принципиально необратимыми в отличие от линейных в отсутствии помех.

Таким образом, при описании аддитивных помех следует учитывать два немаловажных обстоятельства. Во-первых, модели аддитивных помех достаточно разнообразны и в общем случае должны характеризоваться довольно сложными многомерными законами распределения своих параметров, в том числе и мгновенных значений. Во-вторых, складываясь с полезным сигналом, подобные помехи изменяют статистическую структуру передаваемых данных. В результате принципиально важным фактом оказывается внесение неопределенности в передаваемые сообщения (даже при детерминированном характере канала связи), что приводит к невозможности безошибочной передачи исходных сообщений и необратимости преобразований в результирующем канале.

Следствием данных обстоятельств оказывается дополнительное накопление ошибки аппроксимации при синтезе систем на основе конечного набора базисных функций рядов (1) и (2). Так, в отсутствии аддитивной помехи и детерминированности системной характеристики канала связи H пространственно-временной сигнал на выходе канала связи однозначно определяется выражением (4) с той лишь разницей, что число членов ряда является конечным. При данных условиях корреляционная функция выходного сигнала получается путем двукратного преобразования корреляционной функции исходного входного сигнала оператором системной характеристики H' [28]. Поскольку он является детерминированным, то в выражении для нахождения базисных функций (18) его можно поменять местами с оператором Фредгольма ϕ_i, что приводит к подобной достаточно простой операторной взаимосвязи базисных функций на входе и на выходе в виде (3). Однако даже в этом случае наилучшее приближение трактуется в смысле минимально возможной величины среднеквадратического отклонения усеченного ряда относительно исходного сигнала [28, 37]. При синтезе же систем связи данный критерий оказывается не всегда допустимым, в результате применение аппроксимации в виде даже наиболее общего случая канонического разложения является довольно грубым и требующим дополнительных исследований влияния конечности числа членов ряда разложения на получаемые оптимальные решения.

В общем же случае стохастичности оператора преобразования канала связи H', обусловленной наличием аддитивной помехи и/или случайностью его системной характеристики H, каноническое разложение определяется на основе математического ожидания и корреляционной функции выходного пространственно-временного сигнала согласно выражениям (18), (20) и (21), а выходные базисные функции не имеют операторной зависимости (3) от входных [39]. В общем виде второй начальный момент выходного сигнала определяется как усреднение соответствующих случайных функций [32]:

$$M(x'x') = M([\mathrm{H}'\{x\}+n][\mathrm{H}'\{x\}+n]). \tag{22}$$

Для устранения громоздкости описания в данной и последующих формулах, если не оговорено дополнительно, аргументы при случайных функциях опущены, а при записи произведения двух функций подразумевается, что они зависят от различных аргументов, например $x'x' = x'(t,\mathbf{r})x'(t',\mathbf{r}')$. Корреляционная функция же вычисляется как разность между вторым начальным моментом и произведением математических ожиданий:

$$K_{x'} = M(x'x') - M(x')M(x'). \tag{23}$$

Применение теорем сложения и умножения математических ожиданий [40], а также использование леммы о существовании оператора математического ожидания $M_{\mathrm{H}'}$ случайного оператора системной характеристики Н' [41] и его линейности и независимости от передаваемого сигнала, приводит к выражению:

$$M(x') = M_{\mathrm{Н'}}\{M(x)\} + M(n). \tag{24}$$

Следует отметить, что в отличие от оператора системной характеристики Н' оператор математического ожидания $M_{\mathrm{Н'}}$ имеет строго детерминированный характер и трактуется как усреднение ядра интегрального оператора либо коэффициентов дифференциального уравнения. Так, в случае интегральных преобразований и независимости импульсной характеристики от передаваемого пространственно-временного сигнала оператор математического ожидания имеет вид:

$$M_{\mathrm{Н'}}\{M(x)\} = \int\limits_{\Omega_t}\int\limits_{\Omega_{\mathbf{r}}} M\{x(t,\mathbf{r})\} M\{h(t',\mathbf{r}',t,\mathbf{r})\} dt d\mathbf{r} .$$

Все последующие выражения для нахождения высших моментов случайных операторов имеют подобную же трактовку с той лишь разницей, что используется понятие оператора математического ожидания произведения случайных операторов [41].

Раскрытие скобок в (22) и применение теоремы сложения математических ожиданий, а также учет линейности оператора системной характеристики преобразует данное выражение к виду:

$$M(x'x') = M(\mathrm{Н'}[\mathrm{Н'}\{xx\}]) + M(\mathrm{Н'}\{x\}n) + M(n\,\mathrm{Н'}\{x\}) + M(nn). \tag{25}$$

Использование свойства независимости случайного оператора системной характеристики, аддитивной помехи и передаваемого сигнала в совокупности с теоремой умножения математических ожиданий и леммы о существовании оператора математического ожидания произведения случайных операторов $M_{\mathrm{Н'Н'}}$, а также применение равенства (23) ко второму начальному моменту аддитивной помехи видоизменяют уравнение (25) следующим образом:

$$\begin{aligned} M(x'x') = M_{\mathrm{Н'Н'}}\{M(xx)\} + M_{\mathrm{Н'}}\{M(x)\}M(n) + \\ + M(n)M_{\mathrm{Н'}}\{M(x)\} + K_n + M(n)M(n), \end{aligned} . \tag{26}$$

где K_n – корреляционная функция аддитивной помехи.

Очевидно, что сумма второго, третьего и пятого слагаемого в левой части данной формулы представляет собой разность между произведением математических ожиданий выходного сигнала (24) и произведением операторов математических ожиданий системной характеристики

ристики $M_{\text{Н'}}\{M(x)\}$. Следовательно вычитание из (26) произведения (24) на самого себя, но с зависимостями от других переменных, приводит к выражению для корреляционной функции выходного сигнала:

$$K_{x'} = M_{\text{Н'Н'}}\{M(xx)\} + K_n - M_{\text{Н'}}\{M(x)\}M_{\text{Н'}}\{M(x)\}.$$

Применение (23) к операторам математического ожидания произведения случайных операторов системной характеристики и второго начального момента входного сигнала, а также приведение подобных слагаемых преобразует данное выражение к виду:

$$K_{x'} = K_{\text{Н'}}\{K_x + M(x)M(x)\} + M_{\text{Н'}}\{M_{\text{Н'}}[K_x]\} + K_n. \qquad (27)$$

где $K_{\text{Н'}}$ – корреляционная функция случайного оператора системной характеристики Н'.

Частный случай данной формулы для преобразований линейных интегральных случайных операторов без учета воздействующей в канале аддитивной помехи описан В. С. Пугачевым в [28], а для случая равенства нулю математических ожиданий – в работах М. Лоэва. Кроме того, в случае отсутствия преобразований в канале связи следствием данной формулы оказывается хорошо известное выражение для корреляционной функции суммы двух независимых случайных процессов [32].

Выражение (27) иллюстрирует, что вид корреляционных связей выходного пространственно-временного сигнала существенно отличается от входного. А в результате зависимость выходных от входных базисных функций отличается от выражения (3). Применение в качестве начального приближения γ'_i при каноническом разложении выходных базисных функций φ'_i последовательности функционалов ϕ_i, определяющих случайные коэффициенты разложения входного сигнала, то есть предположение, что $\gamma'_i = \phi_i$, а также выражений (27) (18), (20), (21), в которых используются линейные функционалы для канонического разложения выходных базисных функций (функционалы ϕ_i, γ_i и базисные функции φ_i на входе в данных формулах заменены на соответствующие функционалы ϕ'_i, γ'_i и базисные функции φ'_i на выходе) и свойства линейности операторов математического ожидания $M_{\text{Н'}}$, корреляционной функции $K_{\text{Н'}}$ и функционалов канонического разложения ϕ'_i делает возможным представление выходных базисных функций в виде рекуррентного операторного преобразования входных:

$$\varphi'_i = \frac{1}{d_{x'_i}} \left\{ \phi_i \left[K_{\text{Н}'} \left\{ K_x + M(x) M(x) \right\} \right] + \phi_i \left[M_{\text{Н}'} \left\{ M_{\text{Н}'} (K_x) \right\} \right] + \right. \\ \left. + \phi_i (K_n) - \sum_{j=0}^{i-1} \phi_i (\varphi'_j) d_{x'_j} \varphi'_j \right\}. \quad (28)$$

Первое и вторе слагаемые в данном выражении предполагают необходимость осуществления функционального преобразования над операторами корреляционной функции $K_{\text{Н}'}$ и математического ожидания системной характеристики $M_{\text{Н}'}$. Следует отметить, что линейный функционал ϕ_i применяется непосредственно лишь к данным операторам, не затрагивая составляющие, находящиеся в фигурных скобках, то есть сумму корреляционной функции входного сигнала и произведения его математических ожиданий, а также оператора математического ожидания системной характеристики от корреляционной функции входного сигнала.

При этом первое слагаемое существует только в случае стохастичности системной характеристики, а второе – ее нецентрированности. Причем в отличие от первого детерминированность системной характеристики приводит лишь к некоторому упрощению формы оператора математического ожидания, преобразующегося в детерминированный оператор системной характеристики Н'.

Третье слагаемое задается корреляционными свойствами аддитивной помехи, а соответственно отлично от нуля при условии ее учета. Требование биортогональности выходных базисных функций (19) предопределяет существование четвертого слагаемого, независимо от свойств исследуемого канала связи.

Следует также отметить, что найденная для общего случая стохастического канала связи корреляционная функция пространственно-временного сигнала на его выходе (27) позволяет рекуррентно вычислять выходные базисные функции на основе (28). Следует отметить бесчисленное количество их возможных форм, поскольку даже в случае строго задания начального приближения γ'_i последовательностью функционалов ϕ_i, определяющих случайные коэффициенты разложения входного сигнала, начальные приближения для входного канонического разложения γ_i являются произвольными. С одной стороны это оказывается достоинством при синтезе систем связи, так как делает возможным варьирование вида базисных функций для достижения предполагаемого оптимума согласно некоторому критерию. С другой же стороны такая неопределенность может приводить к значительным различиям в получающихся решениях при условии их реализации в разнесенных системах, например на приеме и передаче, поскольку выбор начальных приближений может также включать элемент стохастичности. В результате вероятно наличие систематических ошибок передаваемой информации, обусловленных именно различием в форме используемых базисных функций.

5. Заключение. Возможность представления входного и выходного пространственно-временных сигналов в виде бесконечного ряда некоррелированных случайных функций не позволяет точно описывать процессы в канале связи, поскольку практическая реализация осуществима лишь для конечного числа слагаемых. Однако в большинстве случаев полезный сигнал изменяется существенно медленнее, чем помеха, либо имеет какую-либо локализацию, выражающуюся в различиях их статистических свойств. В результате в каноническом разложении пространственно-временного сигнала на выходе канала связи можно ограничиться некоторым числом членов ряда, дающих с определенной степенью точности описание входного сигнала. При этом либо число, либо последовательность коэффициентов разложения входного сигнала и выходного, искаженного стохастическим каналом связи, оказывается несогласованными в смысле точности их аппроксимации, что приводит к необходимости одновременного учета ошибок приближения, как на входе, так и на выходе канала связи. Очевидно, что с точки зрения среднеквадратической ошибки аппроксимации пространственно-временных сигналов на входе и выходе канале связи конечным рядом ответом на данный вопрос служит какая-нибудь форма канонического представления [28]. Однако при синтезе систем связи критерии в основном направлены на точность воспроизведения передаваемого сигнала, то есть задачи синтеза трактуются как задачи принятия статистических решений, показателями, качества которых являются те или иные степени схожести переданного сообщения и вынесенного решения [33]. Следовательно, разложение в ряд должно рассматриваться с позиции точного воспроизведения передаваемых сигналов на приемной стороне, а не с точки зрения точности аппроксимации передаваемых и принимаемых сигналов. Произвольность выбора базисных функций в ограниченном каноническом разложении позволяет подбирать их таким образом, чтобы обеспечить в некотором смысле точность приема сигнала. Другие же способы конечномерного представления входных и выходных сигналов (например разложение Карунена-Лоэва, различного рода системы ортогональных функций) делают возможным лишь выбор наиболее лучших представителей из заданного класса функций.

В целом же достаточность корреляционных свойств выходного пространственно-временного сигнала для его представления в виде канонического разложения скрывает в себе и серьезный недостаток. В данном случае фиксируется класс функций, придающих коэффициентам соответствующего разложения свойство некоррелированности, что с одной стороны делает возможным более простое описание дальнейших преобразований этих коэффициентов, а с другой – не только не обеспечивает их независимости в наиболее общих случаях негауссовских процессов, но и потенциально снижает качество синтезируемой системы, так как сокращает вариативность получаемых решений. Следовательно в общей постановке (негауссовские процессы) задача синтеза должна формулироваться без введения ограничений на класс функций или же свойства коэффициентов разложения. Даже независимость коэффициентов разложения не может гарантировать оптимальность по определенному критерию синтеза. Таким образом, в общем случае дискретное отображение непрерывного канала связи должно основываться на разложениях типа (1) и (2) с конечным числом членов ряда, в которых базисные функции вычисляются в соответствии с критерием оптимальности воспроизведения передаваемой информации, что является направлением дальнейших исследований и в настоящей работе не рассматривается.

Литература

1. *Возенкрафт Дж. М., Джекобс И.М.* Теоретические основы техники связи : пер. с англ. / Под ред. Р.Л. Добрушина // М.: Мир. 1969. 640 с.
2. *Батенков К.А.* Дискретные отображения непрерывного канала связи на основе обобщенного ряда Фурье // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. Рязань: 2013. № 1(43). С. 12–20.
3. *Kazovsky L.G., Cheng N., Shaw W., et al.* Broadband optical access networks // Hoboken. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc. 2011. 283 p.
4. *Horak R.* Telecommunications and data communications handbook // Hoboken. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc. 2007. 791 p.
5. *Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Коржик В.И., Назаров М.В.* Теория электрической связи : учеб. для вузов // М.: Радио и связь, 1999. 432 с.
6. *Кловский Д.Д., Конторович В.Я., Широков С.М.* Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений // М.: Радио и связь, 1984. 247 с.
7. *Cioffi J.M.* Advanced Digital Communication. Class reader EE379C // Stanford University. 2005. URL: http://www.stanford.edu/class/ee379c/. (дата обращения: 12.09.2012).
8. *Elahmadi S., Srinath M.D., Rajan D., Haberman R.* Capacity and Modeling of Nonlinear Fiber Optic Communications as a Frequency-Selective Fading Channel //

International Conference on Computing, Networking and Communications, Signal Processing for Communications Symposium. 2012. pp. 922–928.
9. *Зяблов В.В., Коробков Д.Л., Портной С.Л.* Высокоскоростная передача сообщений в реальных каналах // М.: Радио и связь. 1991. 288 с.
10. *Cherubini G., Eleftheriou E., Olcer S., Cioffi J.M.* Filter Bank Modulation Techniques for very High-speed Digital Subscriber Lines // IEEE communication magazine. 2000. pp. 98–104.
11. *Regalia P.* Filter Banks for Next Generation Multicarrier Wireless Communications // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. 2010. 147 p.
12. *Zhang J. Djordjevic I.B.* Optimum Signal Constellation Design for Rotationally Symmetric Optical Channel with Coherent Detection // OSA/OFC/NFOEC. 2011.
13. *Kahn J.M., Ho K.* Spectral Efficiency Limits and Modulation/Detection Techniques for DWDM Systems // International Conference on Computing, Networking and Communications, Signal Processing for Communications Symposium. 2012. pp. 922–928.
14. *Tavassoli V.* High Capacity Phase/Amplitude Modulated Optical Communication Systems and Nonlinear Inter-Channel Impairments : diss. … PhD in the Dep. of El. and Comp. Eng. // University of Victoria. 2012. 104 p.
15. *Ip E., Lau A. P. T, Barros D. J. F., Kahn J. M.* Coherent detection in optical fiber systems // Optics express. 2008. vol. 16. no. 2. pp. 753–791.
16. *Louchet H.* Top-Down Analysis of High-Capacity Fiber-Optic Transmission : diss. … Doktor der Ingenieurwissenschaften Dr.-Ing. genehmigte. // Berlin. Technischen Universität Berlin. 2006. 123 p.
17. *Cao Ya., Musslimani Z.H., Titi E.S.* Spectral Efficiency Limits and Modulation/Detection Techniques for DWDM Systems // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2009. vol. 30(1–2). pp. 46–69.
18. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы: учебник // М.: Высш. Школа. 1983. 536 с.
19. *Френкс Л.* Теория сигналов : пер. с англ. // М.: Советское радио. 1974. 344 с.
20. *Батенков К.А.* Математическое моделирование непрерывных многопараметрических каналов связи в операторной форме // Телекоммуникации. 2013. № 10. С. 2–4.
21. *Батенков К. А.* Моделирование непрерывных каналов связи в форме операторов преобразования некоторых пространств // Труды СПИИРАН. 2014. № 1(32). С. 171–198.
22. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник. В 5 т. Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. 2-е изд. перераб. и доп. // М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2004. Т.1: 656 с.
23. *Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д.* Спектральные методы расчета и проектирования систем управления // М.: Машиностроение, 1986. 440 с.
24. *Пупков К.А., Егупов Н.Д., Макаренков А.М., Трофимов А.И.* Теория и компьютерные методы исследования стохастических систем // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. 400 с.
25. *Залманзон Л. А.* Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989. 496 с.
26. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения : пер. с нем. // М.: Наука, 1968. 504 с.
27. *Варакин Л. Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами // М.: Радио и связь. 1985. 384 с.
28. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления // М.: Физматгиз. 1962. 883 с.

29. *Драган Я.П.* Модели сигналов в линейных системах // АН УССР. Физ.–мех. ин-т. Киев: Наукова думка. 1972. 302 с.
30. *Батенков К. А.* Подходы к решению задачи оптимального дискретного отображения непрерывного канала связи на основе обобщенной штрафной функции // Информационные системы и технологии. 2014. № 2(82). С. 78–83.
31. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. // М.: Наука. 1978. 464 с.
32. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов. 2-е изд. стер. // М.: Высш. школа. 2000. 383 с.
33. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника // М.: Советское радио. 1966. 681 с.
34. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. 2-е изд. стереот. // М.: Физматлит. 2002. 160 с.
35. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции: пер. с англ. В 3 т. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции // М.: Советское радио, 1977. Т. 1. 744 с.
36. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устойчивых систем : учеб. пособие для вузов // М.: Радио и связь. 1991. 608 с.
37. *Фу К.* Последовательные методы в распознавании образов и обучение машин // М.: Наука. 1971. 320 с.
38. *Сойфер В.А.* Прикладная теория информации: учебное пособие // Куйбышев: КуАИ. 1985. 93 с.
39. *Батенков К.А.* Проблема синтеза функциональных узлов дискретного канала связи по информационным критериям // Труды СПИИРАН. 2014. № 2(33). С. 5–23.
40. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для втузов. 2-е изд., стер. // М.: Высш. шк. 2000. 480 с.
41. *Скороход А.В.* Случайные линейные операторы // Киев: Наукова думка. 1978. 200 с.

References

1. Wozencraft, J.M., Jacobs I.M. Principles of communication engineering. New York, NY: Wiley, 1965. (Russ. ed.: Wozenkraft Dzh.M. Teoreticheskie osnovy tehniki svjazi: per. s angl. Dzh.M. Vozenkraft, I.M. Dzhekobc ; pod red. R. L. Dobrushina. Moscow. Mir. 1969. 640 p.).
2. Batenkov K.A. [Discrete displays of a continuous channel of communication on the basis of the generalized Fourier's number]. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta. Rjazan' – Vestnik of Ryazan State Radio Engineering University,* 2013. vol. 1(43). pp. 12–20. (In Russ.).
3. Kazovsky L.G., Cheng N., Shaw W., et al. Broadband optical access networks. Hoboken. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc. 2011. 283 p.
4. Horak R. Telecommunications and data communications handbook. Hoboken. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc. 2007. 791 p.
5. Zjuko A.G., Klovskij D.D., Korzhik V.I., Nazarov M.V. *Teorija jelektricheskoj svjazi: ucheb. dlja vuzov. Pod red. D. D. Klovskogo* [Theory of electric communication. Edited by D.D. Klovskogo]. M.: Radio i svjaz', 1999. 432 p. (In Russ.).
6. Klovskij D.D., Kontorovich V.Ja., Shirokov S.M. *Modeli nepreryvnyh kanalov svjazi na osnove stohasticheskih differencial'nyh uravnenij. Pod red. D.D. Klovskij* [Models of continuous channels of communication on the basis of the stochastic differential equations. Edited by. D.D. Klovskij]. M. Radio i svjaz'. 1984. 247 p. (In Russ.).
7. Cioffi J.M. Advanced Digital Communication. Class reader EE379C. Stanford University. 2005. Available at: http://www.stanford.edu/class/ee379c/. (accessed: 12.09.2012).

8. Elahmadi S., Srinath M.D., Rajan D., Haberman R. Capacity and Modeling of Nonlinear Fiber Optic Communications as a Frequency-Selective Fading Channel. International Conference on Computing, Networking and Communications, Signal Processing for Communications Symposium. 2012. pp. 922–928.
9. Zjablov V.V., Korobkov D.L., Portnoj S.L. *Vysokoskorostnaja peredacha soobshhenij v real'nyh kanalah* [High-speed transmission of messages in real channels]. M. Radio i svjaz'. 1991. 288 p. (In Russ.).
10. Cherubini G. Eleftheriou E., Olcer S, Cioffi J.M. Filter Bank Modulation Techniques for very High-speed Digital Subscriber Lines. *IEEE communication magazine*. 2000. pp. 98–104.
11. Regalia P. Filter Banks for Next Generation Multicarrier Wireless Communications. Editor-in-Chief. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. 2010. 147 p.
12. Zhang J., Djordjevic I.B. Optimum Signal Constellation Design for Rotationally Symmetric Optical Channel with Coherent Detection. OSA/OFC/NFOEC. 2011.
13. Kahn J.M., Ho K. Spectral Efficiency Limits and Modulation/Detection Techniques for DWDM Systems. International Conference on Computing, Networking and Communications, Signal Processing for Communications Symposium. 2012. pp. 922–928.
14. Tavassoli V. High Capacity Phase/Amplitude Modulated Optical Communication Systems and Nonlinear Inter-Channel Impairments : diss. … PhD in the Dep. of El. and Comp. Eng. University of Victoria. 2012. 104 p.
15. Ip E., Lau A.P.T., Barros D.J.F., Kahn J.M. Coherent detection in optical fiber systems. *Optics express*. 2008. vol. 16. no. 2. pp. 753–791.
16. Louchet H. Top-Down Analysis of High-Capacity Fiber-Optic Transmission : diss. … Doktor der Ingenieurwissenschaften Dr.-Ing. genehmigte. Berlin. Technischen Universität Berlin. 2006. 123 p.
17. Cao Ya., Musslimani Z.H., Titi E.S. Spectral Efficiency Limits and Modulation/Detection Techniques for DWDM Systems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 2009. vol. 30(1–2). pp. 46–69.
18. Baskakov S.I. *Radiotehnicheskie cepi i signaly: uchebnik* [Radio engineering chains and signals]. M. Vyssh. Shkola. 1983. 536 p. (In Russ.).
19. Franks L.E. Signal theory. Englewood Cliffs. NJ: Prentice- Hall. 1969. (Russ. ed.: Frenks L. Teorija signalov, per. s angl. L. Frenks. M. Sovetskoe radio. 1974. 344 p.).
20. Batenkov K. A. [Mathematical modeling of continuous multiple parameter communication channels in an operator form]. *Telekommunikacii – Telecommunications*. 2013. no 10. pp. 2–4. (In Russ.).
21. Batenkov K.A. [Modeling of continuous channels of communication in the form of operators of transformation of some spaces]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2014. vol 1(32). pp. 171–198. (In Russ.).
22. *Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija: uchebnik. V 5 t. Matematicheskie modeli, dinamicheskie harakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravlenija. Pod red. K.A. Pupkova, N.D. Egupova. 2-e izd. pererab. i dop*. [Methods of the classical and modern theory of automatic control. Edited by K.A. Pupkova, N.D. Egupova. 2^{nd} edition: rev and exp.]. M. Izdatel'stvo MGTU im. N. Je. Baumana. 2004. Issue 1. 656 p. (In Russ.).
23. Solodovnikov V.V., Dmitriev A.N., Egupov N.D. *Spektral'nye metody rascheta i proektirovanija sistem upravlenija* [Spectral methods of calculation and design of control systems]. M. Mashinostroenie. 1986. 440 p. (In Russ.).
24. Pupkov K.A., Egupov N.D., Makarenkov A.M., Trofimov A.I. *Teorija i komp'juternye metody issledovanija stohasticheskih sistem* [Theory and computer methods of research of stochastic systems]. M. FIZMATLIT. 2003. 400 p. (In Russ.).
25. Zalmanzon L.A. *Preobrazovanie Fur'e, Uolsha, Haara i ih primenenie v upravlenii, svjazi i drugih oblastjah* [Fourier, Walsh, Haar's transformation and their application

in management, communication and other areas]. M. Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. 1989. 496 p. (In Russ.).
26. Kollatc L. *Zadachi na sobstvennye znachenija : per. s nem.* [Tasks on own values]. M. Nauka. 1968. 504 p. (In Russ.).
27. Varakin L.E. *Sistemy svjazi s shumopodobnymi signalami* [Communication systems with noise-type signals]. M. Radio i svjaz'. 1985. 384 p. (In Russ.).
28. Pugachev B.C. *Teorija sluchajnyh funkcij i ee primenenie k zadacham avtomaticheskogo upravlenija* [The theory of stochastic functions and its application to problems of automatic control]. M. Fizmatgiz. 1962. 883 p. (In Russ.).
29. Dragan Ja.P. *Modeli signalov v linejnyh sistemah* [Models of signals in linear systems]. AN USSR. Fiz.–meh. in-t. Kiev, Naukova dumka, 1972. 302 p. (In Russ.).
30. Batenkov K.A. [Approaches to the solution of a problem of optimum discrete display of a continuous channel of communication on the basis of the generalized penalty area of function]. *Informacionnye sistemy i tehnologii – Information Systems and Technologies*. 2014. vol. 2(82). pp. 78–83. (In Russ.).
31. Rytov S.M., Kravcov Ju.A., Tatarskij V.I. Vvedenie v statisticheskuju radiofiziku. Ch. 2. [Introduction to statistical radiophysics. Part 2]. M. Nauka. 1978. 464 p. (In Russ.).
32. Ventcel' E.S., Ovcharov L.A. *Teorija sluchajnyh processov i ee inzhenernye prilozhenija : ucheb. posobie dlja vtuzov.* 2-e izd. ster. [Theory of casual processes and its engineering appendices. 2nd edition]. M. : Vyssh. shkola. 2000. 383 p. (In Russ.).
33. Tihonov V.I. *Statisticheskaja radiotehnika* [Statistical radio engineering]. M. Sovetskoe radio. 1966. 681 p. (In Russ.).
34. Vasil'eva A.B., Tihonov N.A. *Integral'nye uravnenija. 2-e izd. stereot.* [Integral equation. 2nd edition]. M. Fizmatlit. 2002. 160 p. (In Russ.).
35. Van Tris G. *Teorija obnaruzhenija, ocenok i moduljacii : per. s angl. V 3 t. Teorija obnaruzhenija, ocenok i linejnoj moduljacii* [Theory of detection, estimates and modulation]. M. Sovetskoe radio, 1977. Issue 1. 744 p. (In Russ.).
36. Tihonov V.I., Harisov V.N. *Statisticheskij analiz i sintez radiotehnicheskih ustojchivyh sistem : ucheb. posobie dlja vuzov* [Statistical analysis and synthesis of radio engineering steady systems]. M. Radio i svjaz'. 1991. 608 p. (In Russ.).
37. Fu K. *Posledovatel'nye metody v raspoznavanii obrazov i obuchenie mashin* [Consecutive methods in recognition of images and training of cars]. M. Nauka. 1971. 320 p. (In Russ.).
38. Sojfer V.A. *Prikladnaja teorija informacii: uchebnoe posobie* [Applied theory of information]. Kujbyshev, KuAI. 1985. 93 p. (In Russ.).
39. Batenkov K. A. [Problem of synthesis of functional knots of a discrete communication channel by information criteria]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2014. vol. 2(33). pp. 5–23. (In Russ.).
40. Ventcel' E.S., Ovcharov L.A. *Teorija verojatnostej i ee inzhenernye prilozhenija : ucheb. posobie dlja vtuzov. 2-e izd., ster.* [Probability theory and its engineering appendices. 2nd edition]. M. Vyssh. shk., 2000. 480 p. (In Russ.).
41. Skorohod A.V. *Sluchajnye linejnye operatory* [Casual linear operators]. Kiev. Naukova dumka. 1978. 200 p. (In Russ.).

Батенков Кирилл Александрович — к-т техн. наук, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: статистическая теория связи, модели и методы обработки сигналов. Число научных публикаций — 120. pustur@yandex.ru; Приборостроительная, 35, Орел, 302034; р.т.: +7(486)254-13-25.

Batenkov Kirill Aleksandrovich — Ph.D., researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: statistical communication theory, models and methods of signal processing. The number of publications — 120. pustur@yandex.ru; 35, Priborostroitelnaya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(486)254-13-25.

РЕФЕРАТ

Батенков К. А. **Моделирование и синтез линейных дискретных отображений непрерывных каналов связи**.

Рассматриваемая проблема моделирования и синтеза дискретных каналов связи имеет актуальный характер для задач, связанных с проектированием информационных систем, функционально предназначенных для передачи данных.

Формализованы дискретные отображения непрерывных каналов связи в виде операторов преобразования метрических конечномерных пространств общего вида.

Показана их связь с представлением в виде интегральных преобразований на основе предельного перехода от представления в виде рядов.

Сигнал на выходе линейного канала связи представим как в виде линейной комбинации системной характеристики канала и коэффициентов разложения входного сигнала, так и в форме дискретной свертки матричной системной характеристики и коэффициентов разложения входного сигнала, вне зависимости от выбора формы базисов.

В результате выходной сигнал можно рассматривать в виде дискретного разложения в базисе дискретной системной характеристики.

Нестационарный канал связи, в том числе и стохастический, описывается в виде матричной системной характеристики, называемой спектральной, или проекционной. Данное обстоятельство устанавливает наличие алгебраической связи между коэффициентами разложения входных и выходных сигналов.

Формализованы дискретные отображения непрерывных каналов связи в виде операторов преобразования метрических пространств с заданными базисами.

Аналогично интегральным преобразованиям, в качестве базисных функций может использоваться произвольный ряд линейно независимых функций, причем не обязательно ортогональных.

Формализованы дискретные отображения непрерывных каналов связи в виде операторов преобразования метрических пространств с базисом в виде координатных функций интегрального канонического представления В. С. Пугачева.

Главной особенностью данных отображений является задание форм базисных ядер на основе статистических свойств входных и выходных сигналов, которые задаются в общем случае в виде дискретного белого некоррелированного шума.

Операторы аналого-дискретных преобразований дискретных отображений непрерывных каналов связи на основе канонического разложения В. С. Пугачева, вычисляются путем итерационной процедуры, последовательно определяющей базисные функции на выходе канала в виде рекуррентного операторного преобразования входных.

SUMMARY

Batenkov K. A. **Modeling and Synthesis of Discrete Mappings of Linear Continuous Channel.**

Considered problem of modeling and synthesis of discrete mappings of linear continuous channel is actual for tasks associated with the design of an information system functionally intended for data transmission.

Discrete mappings of linear continuous channel in the form of general metric finite-dimensional space operators are formalized.

Its coupling with representation in the form of integral transforms on the basis of limiting process from series view is shown.

Signal on linear channel output is offered in system characteristic and input signal expansion coefficient linear combination form and matrix system characteristic and input signal expansion coefficient discrete convolution.

Consequently, output signal should be approached as discrete expansion in basis of discrete system characteristic.

Time-varying channel including stochastic is described in matrix system characteristic form called spectral or projecting. This circumstance determines algebraic bond between input and output signal expansion coefficients.

Discrete mappings of linear continuous channel in metric finite-dimensional space operator form with adjusted basis are formalized.

In similar integral conversions, arbitrary linearly independent functional series can be used as basis.

Discrete mappings of linear continuous channel in the form of metric finite-dimensional space operators with Pugachev integral canonical presentation of coordinate function basis are formalized.

Its principal singularity is basis kernel assignment in terms of input and output signal statistical properties set as, in general, in the form of discrete white uncorrelated noise.

Semi-digital operators of discrete mappings of linear continuous channel on the basis of Pugachev canonical presentation are calculated by force of iterative procedure consistently conditioning basis functions on input and output channel in terms of recurrence input transformation.