УДК 519.4

С.В. Микони

АКСИОМАТИКА МЕТОДОВ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ АЛЬТЕРНАТИВ

Микони С.В. **Аксиоматика методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив.**

Аннотация. Сформулированы аксиомы, позволившие выделить теорию многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив из общей теории принятия решений. Теория, объединившая все известные методы многокритериального выбора в систему, положена в основу учебника «Теория принятия управленческих решений».

Ключевые слова: аксиома, предпочтение, критерий, шкала, целевое значение признака, критерий оптимизации, функция полезности.

Mikoni S.V. **Axioms of Multicriteria Optimization Methods on a Finite Set of Alternatives.**

Abstract. The axioms of the theory of multi-criteria selection on a finite set of alternatives are formulated. They identified the theory from the general theory of decision-making. The theory united all the known methods of multi-criteria selection in the system. It is the basis of the textbook "The theory of administrative decision making".

Keywords: axiom, preference, criterion, scale, a target value of attribute, optimization criterion, utility function.

1. Введение. Логика развития научного направления предполагает его последовательную детализацию, стимулируемую потребностями практики. Эта тенденция характерна и для теории принятия решений. Зародившись в рамках исследования операций, она выделилась в самостоятельную дисциплину, востребованную развитием автоматизированных систем управления (АСУ) в последней трети XX-го века. Развитие сетевых технологий сопровождалось децентрализацией управления. На смену информационно-советующим системам, входившим в АСУ, пришли системы поддержки принятия решений (СППР), ориентированные на конкретные звенья управления. Разработка моделей выбора, реализующих предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), повлекла персонализацию управления [1].

В учебной литературе эти тенденции развития теории принятия решений отражались по-разному. Одни авторы учебников придерживались принципа накоплений знаний, совмещая модели и методы, реализующие разные технологии принятия решений. Наряду с новыми моделями и методами в учебники включались классические методы оптимизации [2] и [3]. Другие авторы ориентировались на одну группу методов в применении к конкретной области, например, применение метода анализа иерархий (МАИ) в экономических задачах [4]. К третьей группе относятся учебные пособия, рассматривающие применение любых математических моделей для принятия управленческих решений в рыночной экономике [5].

Каждой из этих категорий учебников присущи свои недостатки. Первая категория в силу разноплановости методов не рассчитана на практическое применение в конкретных управленческих задачах. Учебные пособия второй группы рассчитаны на усвоение ограниченного количества методов. Учебные пособия по методам принятия управленческих решений ориентированы на широкий класс задач предпринимательской деятельности, понимаемой как менеджмент [6-9].

Между тем, не все управленцы являются предпринимателями, а круг решаемых ими задач не ограничивается получением прибыли. Но всех их объединяет стремление к увеличению эффективности функционирования своих организаций. Этой цели служат разнообразные методы оптимизации, изучаемые в рамках исследования операций и дочерних по отношению к нему дисциплинах.

Независимо от решаемой задачи общей для всех методов оптимизации является модель *целевой функции* в области *допустимых значений D*:

$$f(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x}\in D}, \quad f(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}\in D}. \tag{1}$$

Область допустимых значений D определяется системой линейных или нелинейных ограничений, накладываемых на компоненты вектора $\mathbf{x}$:

$$D=\{\mathbf{x} \mid q_j(x)\le q_j^0,\ j=\overline{1,n}\}. \tag{2}$$

Общий характер модели оптимизации и является теоретической предпосылкой изложения в учебных пособиях в области принятия решений всех методов оптимизации, начиная от математического программирования до многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив [10].

Под многокритериальной оптимизацией на конечном множестве альтернатив (МКО КМА) будем понимать *упорядочение* объектов на основе предпочтений ЛПР. Под упорядочением альтернатив (объектов) будем понимать последовательную (итеративную) процедуру нахождения лучшего среди оставшихся объектов с целью определения их рейтинга. Вместе с методами многокритериальной классификации методы МКО КМА образуют методы многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив (МКВ КМА).

Эта группа методов в основном и востребована в оперативном управлении. Их особенностью является необходимость непосредственного участия ЛПР в проектировании модели оптимизации.

Предпочтения ЛПР должны быть учтены как при формулировании частных целей в процессе построения дерева целей, так и при задании их важности. По этой причине объём участия ЛПР в проектировании модели выбора целесообразно принять за признак, выделяющий организационные управленческие решения от других задач принятия решений в сфере управления. Отсюда возникает задача теоретического обоснования многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив, положенной в основу принятия оперативных решений. Решению этой проблемы посвящена данная работа.

2. Условия реализации методов МКО КМА. В основе любого метода оптимизации лежат две аксиомы, характеризующие *отношение предпочтения*:

1. $(A \succ B) \Leftrightarrow f(A) > f(B) \vee (B \succ A) \Leftrightarrow f(B) > f(A) \vee (A \equiv B) \Leftrightarrow f(A) = f(B)$.
2. $f(A) \succ f(B) \wedge f(B) \succ f(C) \Rightarrow f(A) \succ f(\mathrm{C})$.

Первая аксиома утверждает, что, либо одна альтернатива *предпочтительнее* другой, либо они *равноценны*, и эти отношения могут быть определены по характеризующему их свойству f.

Вторая аксиома устанавливает транзитивность отношений предпочтения, в том числе относительно свойства f.

Наряду с методами многокритериального выбора этим аксиомам удовлетворяют любые методы оптимизации и методы последовательного поиска. Например, на каждом шаге последовательного логического вывода ЛПР выражает предпочтение на множестве двух ответов на вопрос экспертной системы. Заключение экспертной системы отвечает всей совокупности предпочтений ЛПР и в этом смысле является для него оптимальным.

Заметим, что оптимальность варианта на конечном множестве альтернатив не может рассматриваться с позиций классической задачи оптимизации, имеющей, как правило, однозначное оптимальное решение для экстремального значения целевой функции. При многокритериальном выборе *любая* альтернатива из конечного множества недоминируемых альтернатив может претендовать на наилучший вариант при соответствующих предпочтениях ЛПР. Он является оптимальным в смысле заданных предпочтений ЛПР. Для исключения путаницы с классическими задачами оптимизации такой вариант называют *наилучшим* или *предпочтительным*.

Две базовые аксиомы достаточны для создания моделей таких простейших методов векторной оптимизации как Парето-доминирование и лексикографическая оптимизация, характеризуемых минимальным объёмом предпочтений ЛПР. Однако от простых методов трудно ожидать полноценных результатов. Парето-доминирование ограничивается получением *частичного порядка* на множестве альтернатив, а метод лексикографической оптимизации, *линейно* упорядочивающий альтернативы по убыванию приоритета критериев, не гарантирует использование *всех* критериев [10].

Увеличение объёма предпочтений, привлекаемых для сопоставления альтернатив, позволяет уменьшить число несравнимых альтернатив, но не гарантирует его обнуления. Иными словами, увеличивается число уровней графа доминирования, но не достигается линейного порядка. Этими свойствами обладают такие методы векторной оптимизации, как ЭЛЕКТРА и вербальный анализ решений (ВАР). В одном из методов ВАР увеличению порядка на множестве альтернатив способствует такая мера, как создание объединённой порядковой шкалы на множестве значений всех критериев, названной единой шкалой изменения качества (ЕШИК).

Применение большого объёма предпочтений влечёт необходимость выявления их несогласованности, характеризуемой нетранзитивностью предпочтений. Решение этой проблемы основывается на аксиоме транзитивности предпочтений.

Ограниченные возможности методов векторной оптимизации применительно к получению линейного порядка на множестве альтернатив с участием всех критериев, объясняются использованием только порядковой шкалы и двоичной логики. Для получения гарантированного линейного порядка на основе всех критериев требуется привлечение метрики. А это уже *количественная* категория, связанная с *числовой* шкалой и *вычислительными* процедурами. Их применение выходит за область действия двух базовых аксиом предпочтений.

Возможность установления линейного порядка на основе ЕШИК с применением опорных ситуаций (идеального и антиидеального объектов) показана в [11] на примере ранжирования квартир. За базу сравнения квартир была принята 1-я опорная ситуация. Ей соответствует идеальная квартира, которая заняла бы первое место по всем пяти принятым в примере критериям, т.е. (1, 1, 1, 1, 1). Ранги градаций изменений качества рассматриваются как отклонение оценок критериев от оценок, присущих идеальному объекту, Это даёт возможность использовать линейную метрику Хэмминга для оценивания степени приближения каждого объекта к 1-й опорной ситуации как к идеальному объекту (цели). Результирующие ранги объектов формируются на основе предпочтения, заданного в количественной шкале, а именно, *минимизации отклонения* их рангов от рангов идеального объекта.

Предпосылкой для такого подхода является равная важность критериев. Степень приближения (отклонения) объекта к (от) идеальной цели измеряется в балльной (количественной) шкале, что и позволяет исключить несравнимые объекты. Здесь важно заметить, что привлечение дополнительных средств решения проблемы линейного порядка не заменяет результаты, полученные логическим путём, а *углубляет* их.

Приведённый пример показывает достаточность использования порядковой шкалы для создания модели критериального выбора и её недостаточность для решения проблемы линейного порядка. Для решения этой проблемы логический анализ модели должен быть дополнен вычислениями, требующими привлечения числовой шкалы.

Вычисление расстояния до идеального объекта по метрике Хэмминга, по существу, означает сопоставление числа вектору, т.е. его скаляризацию. А это означает, что описанный в примере метод упорядочения альтернатив является *смешанным*. На начальном этапе он использует логические, а на заключительном этапе — вычислительные процедуры. По *используемой модели* метод линейного упорядочения относится к методам критериального выбора (векторной оптимизации), а по *способу сопоставления векторных оценок альтернатив* — к методам функционального выбора (скалярной оптимизации) [12].

В моделях количественного оценивания альтернатив численные шкалы привлекаются и для создания модели выбора. В общем случае предполагается измерение критериев в *разных* шкалах. Разными считаются численные шкалы, различающиеся не только единицами измерения, но и различными диапазонами их значений.

Согласно [13] величина, измеренная в физической шкале, представляет собой не математическое, а именованное число. Арифметические операции возможны только над именованными числами, измеренными в одной шкале. Для выполнения арифметических операций над числами, измеренными в разных шкалах, необходимо избавиться от их именования. Это достигается переводом абсолютных значений переменных в относительные значения, выражаемые долями единицы.

Включение в модель оптимизации шкал признаков не только выделяет методы оптимизации по многим признакам из общей совокупности методов оптимизации, но и позволяет различать их между собой.

Само по себе название метода *многокритериальной* оптимизации предполагает применение не одной, а нескольких целевых функций. Они задаются на шкале каждого признака. Функции $f(x) \to \min$ соответствует принятие в качестве целевого значения нижней границы шкалы признака, а функции $f(x) \to \max$ — принятие в качестве целевого значения верхней границы его шкалы. Поскольку граничные значения шкалы признака достижимы не для всех оцениваемых объектов, в [10] было предложено называть их *идеальными* целями.

В обобщённой модели оптимизации (1) границы области допустимых значений D задаются системой ограничений. Применительно к модели оптимизации по многим признакам эти ограничения задаются на их шкалах, причём не на граничных значениях, как целевые функции, а на промежуточных значениях шкалы. В [10] было предложено называть эти значения шкалы *реальными* целями.

Частная цель, идеальная или реальная, задаваемая на шкале признака, принимается в качестве базы сравнения (точки отсчёта) для оценивания объекта $x \in X$ по этому признаку. Для сопоставления объектов важен не только факт достижения или не достижения цели, но и степень приближения к ней или отклонения от неё.

Количественная мера приближения к *общей цели* или отклонения от неё требует преобразования шкал признаков в общую шкалу с целью выполнения арифметических операций над значениями признаков, измеренных в разных шкалах. Проблема перехода к общей шкале решается применением *функций*, отражающих предпочтения ЛПР на шкале каждого признака.

В тех случаях, когда ЛПР задаёт предпочтения на парах значений признака, необходимо учитывать меру *согласованности* частных предпочтений. Учёт меры согласованности касается и предпочтений, задаваемых разными экспертами при групповой экспертизе.

Для обобщения значений признаков, измеренных в общей шкале, применяются *обобщающие* (синтезирующие) функции.

Рассмотренные условия формирования моделей многокритериальной оптимизации сформулируем в виде аксиом, как основополагающих положений общей теории для всех методов МКО КМА.

3. Аксиомы методов МКО КМА. Приведём аксиомы, формализующие изложенные выше условия реализации методов МКО КМА.

3.1. *Аксиома шкалирования признаков*. Каждый оцениваемый методом МКО КМА j-й признак имеет в общем случае *свою шкалу*, представленную кортежем $<X, Y_j, f_j>$, $j \neq k,\ j,k = \overline{1,n}$.

Кортеж $<X, Y_j, f_j>$ определяет знаковую систему Y_j и отображение f_j, ставящее в соответствие объектам из некоторого множества X тот или иной элемент знаковой системы Y: f_j: $X \rightarrow Y_j$.

Шкалы делятся на *качественные* и *числовые*. Знаковая система Y_j качественной шкалы представляет собой список слов, порядок которых определяется их смыслом. Числовая шкала j-го признака p_j, $j = \overline{1,n}$, представляется диапазоном упорядоченных по возрастанию чисел $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$, где $y_{j,\min}$ — нижняя граница, а $y_{j,\max}$ — верхняя граница шкалы, т.е. $y_{j,\min} = \inf_{x\hat{I}X} f_j(x)$ и $y_{j,\min} = \sup_{x\in X} f_j(x)$.

3.2. *Аксиома целевого значения.* Целевое значение c_j на шкале j-го признака, $j = \overline{1,n}$, может быть *произвольным* $y_{j,\min} \le c_j \le y_{j,\max}$, не обязательно совпадающим с одной из границ шкалы $[y_{j\min}, y_{j,\max}]$: $c_j = y_{j,\min}$ ($c_j = y_{j,\max}$) трактуется как идеальная цель, а $y_{j,\min} < c_j < y_{j,\max}$ — как реальная цель.

3.3. *Аксиома предпочтений на шкале признака.* Любое предпочтение на шкале j-го признака представимо двухместным бесконечнозначным предикатом:

$$Pr_{\ge}(f_j(x), c_j),$$

здесь: $Pr_{\ge}$ — предикат предпочтения $f_j(x)$ по отношению к c_j;
$f_j(x)$ — оцениваемое значение j-го признака объекта x;
c_j — целевое значение j-го признака в роли базы сравнения.

Предикат предпочтения представляется оценочной функцией:

$$p_j\colon Y_j \times C \to [0, 1]$$

с областью значений [0, 1]. В частном случае $Pr_{\ge}$ имеет двоичную область значений {0, 1}.

Двухместное отношение предпочтения описывается предикатом превосходства $\succ(f_j(x_i), f_j(x_k))$ с $f_j(x_k)$ в роли базы сравнения. Здесь $y_i=f_j(x_i)$, $y_k=f_j(x_k)$ — значения признака для объектов x_i *и* x_k. *Объём предпочтений* на шкале признака определяется числом делений шкалы, использованных в качестве баз сравнения.

Предпочтение $\succ(y_{j,\min}, c_j)$ называется критерием оптимизации на шкале j-го признака, *целевым* — при $c_j=y_{j,\min}$ ($c_j=y_{j,\max}$) и *ограничительным* — при $y_{j,\min}<c_j<y_{j,\max}$.

Предикат *предпочтения* $Pr_{\ge}(f_j(x), c_j)$ делится на предикаты:

– *превосходства* ($Pr_{>}(f_j(x), c_j)$, $Pr_{<}(f_j(x), c_j)$);
– *соответствия* ($Pr_{=}(f_j(x), c_j)$, $Pr_{][}(f_j(x), c_{j,н}, c_{j,в})$).

Для критерия превосходства должно выполняться условие монотонного роста (убывания) предпочтительности объекта при увеличении значений j-го показателя y_j при фиксированных значениях остальных n–1 показателей, $k\ne j$.

3.4. ***Аксиома способа оценивания.*** Альтернатива (объект) оценивается либо по степени *достижения* объектом x целевого значения c_j j-го признака, либо по степени *отклонения* от него.

3.5. *Аксиома отображения в общую шкалу.* Для вычисления обобщённых оценок объектов по признакам, измеренным в разных шкалах, необходимо их приведение к общей шкале.

В качестве общей шкалы по отношению ко всем функциям, отображающим значения признака, используется биполярная шкала [–1, 0, +1] или её части: [0, +1] и [–1, 0].

Для отображения значений признака в общую шкалу задаются *функции достижения цели* (ДЦ) и *функции отклонения от цели* (ОЦ). Любая функция достижения цели независимо от способа её создания трактуется как *функция полезности* [14, 15]:

$$u_j\colon Y_j \to [-1, 0, 1],$$

здесь Y_j — множество значений (домен) j-го признака.

Стопроцентная полезность объекта x по j-у признаку $u_j(x)=1$ имеет место при полном достижении цели: $f_j(x)=c_j$. При $u_j(x)<1$ имеет место *частичное достижение* цели. Отсутствию полезности объекта x по j-у признаку соответствует $u_j(x)=0$. Отрицательная полуось [–1, 0] применяется при необходимости отражения возможного ущерба.

Мера отклонения от целевого значения c_j j-го признака объектом x определяется значением функции отклонения от цели:

$$\gamma_j\colon \Delta C_j \to [-1, 0, +1],$$

здесь $\Delta C_j \subseteq Y_j$ — область отклонений от цели c_j на шкале j-го признака. Значению 0 соответствует совпадение значения j-го признака объекта x с целевым значением c_j. Одной из полуосей шкалы [–1, 0, +1] ставится в соответствие штраф за частичное достижение (не выполнение) цели, а другой полуоси — поощрение (бонус) за превышение цели. Отклонения по обе стороны от целевого значения немонотонной функции полезности отображаются только штрафами.

3.6. *Аксиома обобщения частных оценок.* Общая оценка объекта x по n признакам находится путём отображения n частных оценок в общую шкалу обобщающей функцией φ: $Y \to S$, здесь Y — множество частных оценок объекта x по n признакам, а S — общая шкала.

3.7. *Аксиома согласованности предпочтений ЛПР.* Мера согласованности предпочтений ЛПР *не ограничивается* наличием не транзитивных предпочтений.

Согласованность *групповых* предпочтений помимо транзитивности предпочтений учитывает ещё пять аксиом, невозможность одновременного выполнения которых доказана теоремой Эрроу.

Отметим обобщающий характер аксиом 1 и 7 по отношению к соответствующим базовым аксиомам предпочтений.

Поскольку изложенные аксиомы обобщают свойства конкретных методов МКО КМА, для представления их свойств используется правило подстановки.

4. Применение аксиом к методам МКО КМА. В разделе 2 была обоснована достаточность двух аксиом предпочтений для описания методов критериального выбора. Обоснуем необходимость и достаточность аксиом для представления любого метода МКО КМА.

Теорема полноты. Система аксиом 1–7 обладает полнотой для представления любого метода МКО КМА.

Учитывая обобщение базовых аксиом предпочтений аксиомами 1 и 7, эта теорема относится ко всем методам МКО КМА, но в доказательстве их необходимости нуждаются только методы функционального выбора. Доказательство теоремы проще всего представить таблично (см. таблица 1). Аксиома 7 не включена в таблицу, поскольку относится к не рассматриваемым в ней методам группового выбора.

Таблица 1. Свойства методов, отражаемые аксиомами МКО КМА

NN п/п	Метод	Аксиома					
		1	2	3	4	5	6
1	АИ	О	МПр	$k \cdot N(N-1)/2$	ДЦ	ФПр	УМ
2	ДИЦ	Р	ИЦ	1	ДЦ	НФ	ЛОФ
3	ДРЦ	Р	РЦ	2	ДЦ	НФ	ЛОФ
4	ВП	Р	ПЗ	≥ 2	ДЦ	НФ	ЛОФ
5	МАП	Р	МП	$5 \div \infty$	ДЦ	ФП	ЛОФ
6	ОЦ	Р	РЦ	2	ОЦ	ФОЦ	АС

Строки таблицы озаглавлены именами основных методов функционального выбора, а столбцы — порядковыми номерами аксиом. Имена основных методов функционального выбора имеют следующие обозначения:

1) АИ — анализа иерархий;
2) ДИЦ — достижения идеальной цели;
3) ДРЦ — достижения реальной цели;
4) ВП — выполнения плана;
5) МАП — многоатрибутной полезности;
6) ОЦ — отклонения от цели.

Столбец, соответствующий аксиоме 1, отражает различие (Р) шкал, в которых измеряются показатели, характеризующие объект. Однородность (О) относительной шкалы, в которой формируются предпочтения эксперта при заполнении матрицы парных сравнений, может рассматриваться как частный случай, предложенный Т. Саати.

В принципе могут использоваться матрицы и с другими типами предпочтений [10].

Столбец, соответствующий аксиоме 2, содержит виды целей, задаваемых на шкалах признаков:

1) ИЦ — идеальная цель;
2) РЦ — реальная цель;
3) ПЗ — плановое задание;
4) МП — максимальная полезность.

На относительной шкале, используемой в модели АИ, цель не указывается, а в результирующей шкале [0, 1] ею является максимальный приоритет (МПр).

Поскольку таблица 1 содержит только методы оптимизации, в них используются только предикаты типа ≥ и ≤. Поэтому аксиома 3 представлена в таблице 1 количеством предпочтений (предикатов), задаваемых на шкале признака. Оно зависит от вида цели и меняется от одного предпочтения, достаточного для указания направления движения к идеальной цели, до бесконечного числа предпочтений, соответствующего непрерывной нелинейной функции полезности. Число сравнений, выполняемых в методе АИ, определяется числом заполняемых экспертом клеток треугольной матрицы и числом k матриц, формируемых в иерархии.

Согласно аксиоме 4 её столбец содержит только тип функций, отражающий способ оценивания альтернатив — по достижению цели (ДЦ) или отклонению от цели (ОЦ).

Аксиома 5 представлена функциями, отображающими значения признаков в общую шкалу. Для методов ДИЦ и ДРЦ общей является шкала [0, 1], а для метода ВП — шкала [0, 100%, 200%]. Все эти методы используют нормирующие функции (НФ) критериев: в ДИЦ — на всей шкале, ДРЦ и ВП — на участках шкалы, разделённых целевым значением критерия. Значения показателей в методе АИ вычисляются с применением функции приоритетов ФПр. Метод многоатрибутной полезности использует функции полезности (ФП), создаваемые экспертом на шкале каждого признака. Согласно аксиоме 5 функции НФ и ФПр предлагается рассматривать как разновидности функции полезности [16-19].

Метод отклонения от цели использует функцию отклонения от цели (ФОЦ), формируемую относительно реальной цели на шкале каждого критерия. Монотонные функции отображают значение критерия в шкалу [–1, 0, +1], а немонотонные функции — в шкалу [0, +1], поскольку штрафуются отклонения от цели в любую сторону.

Согласно аксиоме 6 роль обобщающей функции (ОФ) в методе АИ выполняет умножение матрицы (УМ) приоритета альтернатив по всем критериям на вектор важности этих критериев. В качестве ОФ в методах ДИЦ, ДРЦ, ВП и МП применяются любые усредняющие, либо максиминные функции (ЛОФ) [10]. Метод отклонения от цели использует в качестве ОФ алгебраическую средневзвешенную (АС) или минимаксную функцию. Шкала её значений [–1, 0, +1] может использоваться полностью или по частям: [0, +1] — для упорядочения объектов по штрафам, либо [–1, 0] — для упорядочения по бонусам.

Непустые столбцы таблицы 1 отражают востребованность всех аксиом для описания моделей МКО КМА, а различие столбцов показывает их неизбыточность. Различие строк характеризует полноту системы аксиом, позволяющую различать методы МКО КМА.

Обобщённые значения в столбцах показывают возможность дальнейшей дифференциации методов. Например, по виду усредняющей функции различают методы с аддитивной и мультипликативной средневзвешенной функцией. В свою очередь, различают 3 вида мультипликативной ОФ и т.д. Эта детализация иллюстрирует применение правила подстановки, применяемого для конкретизации метода.

Поскольку предложенные аксиомы полностью характеризуют известные методы МКО КМА и позволяют порождать их модификации, нетрудно предположить возможность их использования для систематизации этих методов.

5. Систематизация методов на основе общей аксиоматики. В работе [12] аксиомы частично использовались для классификации методов критериального выбора и классификации функций, используемых методами функционального выбора. Рассмотрим роль в систематизации методов МКО КМА каждой аксиомы в отдельности.

Аксиома *шкалирования признаков* (1) напрямую причастна к делению методов МКО КМА на самом верхнем уровне на методы критериального выбора и функционального выбора [12]. Согласно ей модели выбора первой группы методов используют для ранжирования альтернатив шкалы критериев, а модели второй группы — единую шкалу, обеспечивающую возможность объединения оценок по разным показателям. По типам данных (векторы и скаляры), используемых для упорядочения объектов, эти группы методов называются соответственно методами векторной и скалярной оптимизации.

Применение аксиомы 1 не ограничивается верхним уровнем классификации методов. На нижних уровнях классификации существенное влияние на свойства метода оказывают типы измеряемых переменных — числа (двоичные, целые, вещественные) или символы.

Разновидности целей, провозглашённых аксиомой *целевого значения* (2), использовались в [12] для классификации функций, используемых методами функционального выбора. Эта аксиома полезна и для деления методов оптимизации на методы достижения *идеальной* и *реальной* цели. Методы первой группы оценивают степень приближения оцениваемого объекта к идеальному объекту. К идеальным целям на шкале признака относятся также максимальные полезность (МП) и приоритет (МПр) в таблице 1.

Методы второй группы оценивают степень приближения к реальному объекту как, в принципе, достижимому. Это позволяет оценивать не только степень достижения цели, но и её превышение. К реальным целям относятся также плановые задания (ПЗ). Их дополнительным свойством является индивидуализация целей. Объекты оцениваются по степени достижения *своих* целей, а не общей для всех цели.

Тип предиката, как один из факторов аксиомы *предпочтений на шкале признака* (3) разделяет методы МКО КМА на методы оптимизации и классификации. Первая группа методов использует предикаты ≥ и ≤, нацеленные на установление порядка на множестве альтернатив.

Методы классификации используют предикаты = (равно) и [] (интервал), нацеленные на установление преимущественной принадлежности объекта по нескольким признакам одному из заданных классов. В работе [20] показана возможность вычислять функцию полезности на основе функций принадлежности упорядоченным (с применением предиката ≥) по качеству классам. Это позволило установить связь между методами многокритериальной оптимизации и классификации.

Поскольку таблица 1 содержит только методы оптимизации, её 3-й столбец характеризует другой фактор аксиомы 3, а именно, количество предпочтений, задаваемых на шкале признака. Несмотря на зависимость от аксиомы 2 (вида целевого значения), объём предпочтений также может применяться в роли системообразующего признака (основания деления методов).

Аксиома *способа оценивания* (4) обладает естественным системообразующим свойством, порождая противоположные по смыслу методы достижения цели и отклонения от неё.

Аксиома *отображения в общую шкалу* (5) делит методы по виду функций, отображающих значения признаков в общую шкалу. Согласно этой аксиоме все функции трактуются как модификации функции полезности.

Согласно аксиоме *обобщения частных оценок* (6) методы допускающие применение любой обобщающей функции (ЛОФ) различаются по виду принятой функции.

На рисунке 1 приведена классификация оптимизационных методов функционального выбора. Для выделения этой группы методов из общей совокупности методов МКВ КМА использованы аксиомы 1 и 3, объединяющие методы применением шкалы [–1, 0, +1] (или её частей) и отношения превосходства.

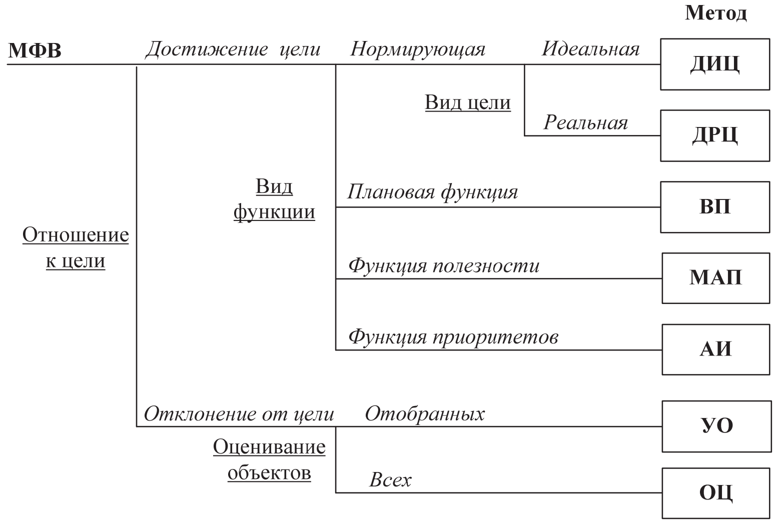

Рис.1. Классификация оптимизационных методов функционального выбора

Из остальных четырёх аксиом использованы аксиомы 4, 5 и 2 соответственно на первом, втором и третьем уровнях детализации методов. На рисунке 1 опущен четвёртый уровень классификации методов по виду обобщающих функций, на котором согласно аксиоме 6 методы, допускающие применение ЛОФ, могут различаться по виду обобщающей функции.

Дополнительно к методам, включённым в таблицу 1, на рисунке 1 представлен метод условной оптимизации (УО), использующий как целевые, так и ограничительные критерии. Являясь смешанным по виду критериев, он условно отнесён к методам отклонения от цели по исключению из оптимизации объектов, имеющих отклонения по не выполнению реальных целей. Оставшиеся объекты оцениваются по степени достижения идеальных целей и перевыполнения реальных целей. Этот метод является более жёстким по отношению к методу отклонения от цели, оценивающим все объекты независимо от выполнения ими реальных целей [21].

6. Заключение. Любая теория базируется на некоторой совокупности исходных положений — аксиом. И чем их меньше, тем сфера применения теории больше. Двух аксиом предпочтения вполне достаточно для включения в теорию принятия решений любых методов оптимизации, чья сфера применения безгранична.

Между тем, в оперативном управлении лицо, принимающее решение, преимущественно имеет дело с проблемой многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив (МКВ КМА). Для решения этой проблемы разработано несколько групп методов, различающихся исходными положениями (аксиомами). На основе исключения их специфических свойств предложены аксиомы, решившие проблему сходства *всех* методов МКВ КМА. Специфические свойства методов использованы для выявления различия методов МКВ КМА.

Из семи предложенных аксиом две обобщают аксиомы предпочтений. Доказана необходимость и достаточность предложенных аксиом для описания всех известных методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив (МКО КМА). Иллюстрация их применимости к методам многокритериальной классификации и группового выбора, относящимся к методам МКВ КМА осталась за пределами работы.

Предложенные аксиомы легли в основу изложения методов МКВ КМА в учебном пособии [22]. Благодаря суженной сфере их применения теорию принятия управленческих решений можно рассматривать как дочернюю дисциплину по отношению к общей теории принятия решений.

Литература

1. *Трахтенгерц Э.А.* Компьютерные системы поддержки управленческих решений // Проблемы управления. 2003. № 4. С. 13–28.
2. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. Учебное пособие // СПб: БХВ-Петербург. 2005. 408 с.
3. *Петровский А.Б.* Теория принятия решений. Университетский учебник // М.: ИЦ «Академия». 2009. 391 с.
4. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике // М.: Финансы и статистика. 2004. 464 с.
5. *Литвак Б.Г.* Управленческие решения. Практикум // М.: Московская Финансово-Промышленная Академия. 2012. 448 с.
6. *Yeh C. H., Xu Y.* Managing critical success strategies for an enterprise resource planning project // European Journal of Operational Research. 2013. vol. 230. no. 3. pp. 604–614.
7. *Liesiö J, Punkka A.* Baseline value specification and sensitivity analysis in multiattribute project portfolio selection // European Journal of Operational Research. 2014. vol. 237. no. 3. pp. 946–956.
8. De Brucker K., Macharis C., Verbeke A. Multi-criteria analysis and the resolution of sustainable development dilemmas: A stakeholder management approach // European Journal of Operational Research. 2013. vol. 224. no. 1. pp. 122–131.
9. *Mattila V., Virtanen K.* Ranking and selection for multiple performance measures using incomplete preference information // European Journal of Operational Research. 2015. vol. 242. no. 2. pp. 568–579.
10. *Микони С.В*. Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. Учебное пособие // СПб: Лань. 2009. 272 с.
11. *Ларичев О.И.* Вербальный анализ решений // М.: Наука. 2006. 181 с.
12. *Микони С.В*. Системный анализ методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив // Труды СПИИРАН. 2015. Вып. 4(41). С. 180–199.
13. *Волкова В.Н., Денисов А.А.* Теория систем: учебное пособие // М.: Высшая школа. 2006. 512 с.

14. *Mikoni S.V.* Ordering multiattribute optimization methods from the utility point of view // International Journal Information Technologies & Knowledge. 2013. vol. 7. no. 1. pp. 94–99.
15. *Микони С.В.* Оценивание альтернатив по полезности как завершающий этап их многокритериальной оптимизации // Труды СПИИРАН. 2013. Вып. 8(31). С. 6–19.
16. *Mikoni S.V.* Utility function design on the base of the paired comparison matrix // Artificial Intelligence Methods and Techniques for Business and Engineering Applications. ITHEA. Rzeszow – Sofia. 2012. pp. 325–333.
17. *Mikoni S.V.* Neural network approach to the formation models of multiattribute utility // International Journal Information Models & Analyses. Sofia. 2014. vol. 3. no. 1. pp. 3–9.
18. *Korhonen P.J., Silvennoinen K., Wallenius J., Öörni A.* Can a linear value function explain choices? An experimental study // European Journal of Operational Research. 2012. vol. 219. no. 2. pp. 360–367.
19. *Podinovski V.V.* Decision making under uncertainty with unknown utility function and rank-ordered probabilities // European Journal of Operational Research. 2014. vol. 239. no. 2. pp. 537–541.
20. *Mikoni S.V., Garina M.I.* Study relationship between utility function and membership function in the problem of object ranking // Artificial Intelligence Driven Solutions to Business and Engineering Problems. ITHEA. Rzeszow – Sofia. 2012. pp. 41–45.
21. *Микони С.В.* Мягкая условная оптимизация на дискретном множестве объектов // Вестник Томского Политехнического университета. 2011. №3. С. 39–44.
22. *Микони С.В*. Теория принятия управленческих решений. Учебное пособие // СПб: Лань. 2015. 448 с.

References

1. Trahtengerc Je.A. [Computer systems support management decisions]. *Problemy upravlenija – Management problems*. 2003. vol. 4. pp. 13–28. (In Russ.).
2. Chernoruckij I.G. *Metody prinjatija reshenij. Uchebnoe posobie* [Methods of decision-making. Tutorial]. SPb. BHV-Peterburg. 2005. 408 p. (In Russ.).
3. Petrovskij A.B. *Teorija prinjatija reshenij. Universitetskij uchebnik* [Decision theory. University textbook]. M. IC «Akademija». 2009. 391 p. (In Russ.).
4. Andrejchikov A.V., Andrejchikova O.N. *Analiz, sintez, planirovanie reshenij v jekonomike* [Analysis, synthesis, planning decisions in the economy]. M.: Finansy i statistika. 2004. 464 p. (In Russ.).
5. Litvak B.G. *Upravlencheskie reshenija. Praktikum* [Management decisions. Workshop]. M.: Moskovskaja Finansovo-Promyshlennaja Akademija. 2012. 448 p. (In Russ.).
6. Yeh C. H., Xu Y. Managing critical success strategies for an enterprise resource planning project. *European Journal of Operational Research*. 2013. vol. 230. no. 3. pp. 604–614.
7. Liesiö J, Punkka A. Baseline value specification and sensitivity analysis in multiattribute project portfolio selection. *European Journal of Operational Research*. 2014. vol. 237. no. 3. pp. 946–956.
8. De Brucker K., Macharis C., Verbeke A. Multi-criteria analysis and the resolution of sustainable development dilemmas: A stakeholder management approach. *European Journal of Operational Research*. 2013. vol. 224. no. 1. pp. 122–131.
9. Mattila V., Virtanen K. Ranking and selection for multiple performance measures using incomplete preference information. *European Journal of Operational Research*. 2015. vol. 242. no. 2. pp. 568–579.
10. Mikoni S.V. *Mnogokriterial'nyi vybor na konechnom mnozhestve al'ternativ. Uchebnoe posobie* [Multicriteria choice on a final set of alternatives. Tutorial]. SPb.: Lan'. 2009. 272 p. (In Russ.).
11. Larichev O.I. *Verbal'nyj analiz reshenij* [Verbal Decision Analysis]. M.: Nauka. 2006. 181 p. (In Russ.).

12. Mikoni S.V. [System analysis of multi-criteria optimization methods on a finite set of alternatives]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2015. vol. 4(41). pp. 180–199. (In Russ.).
13. Volkova V.N., Denisov A.A. *Teoriya sistem: uchebnoe posobie* [Theory of systems: manual]. M.: Vysshaya shkola. 2006. 512 p. (In Russ.).
14. Mikoni S.V. Ordering multiattribute optimization methods from the utility point of view. *International Journal Information Technologies & Knowledge*. 2013. vol. 7. no. 1. pp. 94–99.
15. Mikoni S.V. [Estimation of alternatives on usefulness as the final stage of their multicriteria optimization]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2013. vol. 8(31). pp. 6–19. (In Russ.).
16. Mikoni S.V. Utility function design on the base of the paired comparison matrix. *Artificial Intelligence Methods and Techniques for Business and Engineering Applications*. ITHEA. Rzeszow – Sofia. 2012. pp. 325–333.
17. Mikoni S.V. Neural network approach to the formation models of multiattribute utility. *International Journal Information Models & Analyses*. Sofia. 2014. vol. 3. no. 1. pp. 3–9.
18. Korhonen P.J., Silvennoinen K., Wallenius J., Öörni A. Can a linear value function explain choices? An experimental study. *European Journal of Operational Research*. 2012. vol. 219. no. 2. pp. 360–367.
19. Podinovski V.V. Decision making under uncertainty with unknown utility function and rank-ordered probabilities. *European Journal of Operational Research*. 2014. vol. 239. no. 2. pp. 537–541.
20. Mikoni S.V., Garina M.I. Study relationship between utility function and membership function in the problem of object ranking. *Artificial Intelligence Driven Solutions to Business and Engineering Problems*. ITHEA. Rzeszow – Sofia. 2012. pp. 41–45.
21. Mikoni S.V. [Soft conditional optimization on a discrete set of objects] *Vestnik Tomskogo Politehnicheskogo universiteta – Bulletin of Tomsk Polytechnical University*. 2011. vol. 3. pp. 39–44. (In Russ.).
22. Mikoni S.V. *Teorija prinjatija upravlencheskih reshenij. Uchebnoe posobie* [Theory of administrative decision-making. Tutorial]. SPb. Lan'. 2015. 448 p. (In Russ.).

Микони Станислав Витальевич — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры математики и моделирования, ФГБОУ ВПО Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий в системном анализе и моделировании, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: системный анализ, принятие решений, интеллектуальные технологии. Число научных публикаций — 254. svm@sm4265.spb.edu, http://www.mcd-svir.ru; Московский пр. 9, Санкт-Петербург, 190039; р.т.: +7(812) 436-9735.

Mikoni Stanislav Vitalyevitch — Ph.D., Dr. Sci., professor, professor of mathematics and modeling department, Petersburg State Transport University, leading researcher of information technologies in the system analysis and modeling laboratory, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS. Research interests: system analyses, decision making, intellect technologies. The number of publications — 254. svm@sm4265.spb.edu, http://www.mcd-svir.ru; 9, Moskovsky av., St. Petersburg, 190039, Russia; office phone: +7(812) 436-9735.
Поддержка исследований. Работа поддержана РФФИ (проект № 13-01-00912) и Программой фундаментальных исследований ОНИТ РАН (проект 2.11).

Acknowledgements. This research is supported by RFBR (grant 13-01-00912) and by ONITRAS (project 2.11).

РЕФЕРАТ

Микони С.В. **Аксиоматика методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив.**

Задачи организационного управления являются, как правило, многокритериальными, а область их определения не превышает нескольких десятков альтернатив. Главным отличием этих задач от задач, решаемых методами исследования операций, является необходимость непосредственного участия ЛПР в проектировании модели выбора. Именно объём участия ЛПР в проектировании модели выбора резонно принять за признак, выделяющий организационные управленческие решения от других задач принятия решений в сфере управления.

В основу теории принятия решений положены всего две аксиомы, отражающие отношение предпочтения. Это объясняет многообразие моделей и методов теории принятия решений. Сфера применения методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив ограничивается дополнительными аксиомами, касающимися шкал признаков и предпочтений на шкалах. Эти аксиомы различны для разных групп методов. На основе исключения из этих аксиом специфических свойств методов предложены аксиомы, применимые ко всем методам многокритериального выбора.

Предложенные аксиомы позволили создать общую теорию многокритериального выбора, увязав все методы в единую систему. Эта теория положена в основу учебника «Теория принятия управленческих решений».

SUMMARY

Mikoni S.V. **Axioms of Multicriteria Optimization Methods on a Finite Set of Alternatives.**

Organizational management tasks are usually multi-criteria ones, and the area of their determination does not exceed a few tens of alternatives. The main difference between these tasks and the problems solved by means of operations research methods is the need for the direct involvement of decision-makers in the design of the selection model. It is the amount of participation of the DM in the design of selection model, which is reasonable to take as a sign that distinguishes organizations managerial decisions from other tasks of decision-making in management.

The theory of decision-making is based on only two axioms reflecting preference of DM. This explains the variety of models and methods of decision theory. The scope of application of multi-criteria optimization on a finite set of alternatives is limited to the additional axioms concerning the scales of attributes and preferences of the scales. Based on excluding from these axioms specific properties of the methods, the axioms are proposed that apply to all methods of multi-criteria selection.

The proposed axioms allowed creating a general theory of multicriteria optimization, linking all the methods in a single system. This theory is the basis of the textbook "The theory of administrative decision making".