УДК 519.872

В.А. Гончаренко

КОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ АППРОКСИМАЦИОННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Гончаренко В.А. **Композиционный метод формирования аппроксимационных распределений с произвольной фазовой функцией.**

Аннотация. В статье рассмотрен подход к представлению распределений вероятностей в виде двухуровневой композиции интегрального ядра и фазовой функции, являющейся обобщением понятия плотности распределения случайного параметра. Показаны возможности гипердельтной аппроксимации фазовой функции, а также ее взаимосвязь с формированием распределений фазового типа. Предложен метод формирования аппроксимационных распределений на основе произвольной фазовой функции методом производных.

Ключевые слова: интегральное ядро, случайный параметр, гипердельтное распределение вероятностей, обобщенная функция, гиподельтная функция, распределение фазового типа, равномерно-экспоненциальное распределение, аппроксимация, метод моментов, метод производных, фазовая функция.

Goncharenko V.A. **Composite Method of Forming Approximating Distributions with an Arbitrary Phase Function.**

Abstract. In this article we consider an approach to representation of distributions of probabilities in the form of the two-level composition of an integral kernel and a phase function which is generalization of the concept of density of random parameter distribution. Possibilities of giper-delta approximation of the phase function and its interrelation with the formation of phase-type distributions are shown. The method of approximating distributions formation on the basis of the arbitrary phase function by the method of derivatives is offered.

Keywords: integral kernel; random parameter; hyper-delta probability distribution; generalized function; hypo-delta function; phase-type distribution uniformly exponential distribution; approximation; method of the moments; method of derivatives; phase function.

1. Введение. В исследованиях сложных систем для аппроксимации произвольных распределений случайных величин часто используют распределения фазового типа [1], описывающие случайные процессы в виде совокупности последовательных и/или параллельных экспоненциальных фаз. Этот метод фаз, предложенный А. Эрлангом, был развит Д. Коксом [2], М. Ньютсом [3] и другими учеными [4-6], найдя широкое применение в теории надежности и теории очередей при расчете немарковских систем [7-11]. Использование распределений фазового типа (Эрланга, Кокса, Ньютса и др.) позволяет разложить немарковские случайные процессы на совокупность фиктивных экспоненциальных фаз и существенно упростить расчет моделей.

Так, в [7] описан итерационный метод расчета немарковских многоканальных систем с гиперэкспоненциальными распределениями, а в [8] обобщены подходы к расчету систем массового обслуживания с фазовыми распределениями. В [9] предложен метод расчета немарковских сетей массового обслуживания на основе гиперэкспоненциальной аппроксимации распределений с произвольным числом начальных моментов. В [10] рассматривается двухмоментная аппроксимация с использованием фазовых распределений. В [11] фазовые распределения используются при расчете нестационарных моделей обслуживания с конечным источником заявок. Важными при этом являются и вопросы точности аппроксимации распределениями фазового типа [12].

Другой подход к расчету систем с распределениями фазового типа предполагает использование не дискретных, а *непрерывных фаз* [13-15]. При этом аппроксимирующее распределение представляется в виде композиции экспоненциального ядра и фазовой функции, в частном случае выступающей плотностью распределения случайного параметра экспоненциального ядра.

Также развиваются подходы на основе фазовых распределений с неэкспоненциальными фазами. Метод представления распределений в виде совокупности параллельных *детерминированных фаз* был использован в так называемой *гипердельтной аппроксимации* [16] на основе смеси дельта-функций Дирака и развит в работе [17].

В статье рассматривается композиционный подход для общего случая, когда произвольные распределения могут быть аппроксимированы фазовыми распределениями с *произвольной фазовой функцией*, в том числе и на основе гипердельтной аппроксимации.

2. Общий подход к аппроксимации распределений с использованием фазовой функции. Случайные пуассоновские процессы с интенсивностью, являющейся случайной величиной, исследованы Хинчиным [18]. Они представляют собой совокупность обычных пуассоновских потоков со случайными значениями параметра и называются *обобщенными пуассоновскими потоками*.

В [19] рассмотрен формальный аппарат представления случайных процессов со случайными параметрами. Функция распределения $F(x,\hat{\Theta})$, усредненная по случайным параметрам $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,..\hat{\theta}_m$, может быть использована для представления процессов восстановления:

$$M[F(x,\hat{\Theta})] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x,\theta_1,\ldots,\theta_m)h(\theta_1,\ldots,\theta_m)d\theta_1\ldots d\theta_m, \tag{1}$$

где $h(\theta_1,\ldots,\ \theta_m)$ — совместная плотность распределения случайных параметров $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,..\hat{\theta}_m$. В общем случае $h(\cdot)$ может служить оператором преобразования функции F с учетом неопределенности параметров.

В [20] предложены два подхода к моделированию случайных потоков со случайными параметрами: на основе случайности параметров распределений случайных величин и на основе случайности интенсивностей случайных потоков; также высказана идея о возможности использования усредненных по случайным параметрам распределений для аппроксимации произвольных распределений.

Рассмотрим обобщенный композиционный подход к формированию аппроксимирующих распределений с использованием так называемой *фазовой функции*. Для этого без потери общности будем использовать представление (1) с одномерной функцией $h(\cdot)$.

Под *фазовой функцией* будем понимать произвольную дифференцируемую функцию, принадлежащую пространству *основных и обобщенных функций* [21], описывающую структуру фазового построения распределения вероятностей фазового типа. В частных случаях фазовая функция выступает в качестве плотности распределения случайного (дискретного или непрерывного) параметра распределения.

Гипотеза. *Плотность распределения случайной величины t для $\forall t$ может быть представлена в виде уравнения Фредгольма 1-го рода как композиция интегрального ядра $f(t,\lambda)$ и фазовой функции h(λ):*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda)h(\lambda)d\lambda\,. \qquad (2)$$

Интегральное ядро $f(t,\lambda)$ может задаваться степенной, экспоненциальной, гиперболической, логарифмической, тригонометрической и другими функциями. Наибольшее количество известных аппроксимирующих распределений, описанных ниже, может быть представлено при *экспоненциальном интегральном ядре*. В частном случае $f(t,\lambda)$ может являться условной плотностью распределения вероятностей, случайный параметр которой $\hat{\lambda}$ принимает значение λ.

Фазовая функция $h(\lambda)$ в общем случае служит *оператором преобразования* функции $f(t,\lambda)$ к функции $f(t)$ и может не иметь физического смысла плотности распределения [13], являясь, например, производной от обобщенной функции. Может иметься информация о ее качественных свойствах, функциональном виде, области определения и т.д. В частном случае, при интерпретации $h(\lambda)$ в качестве ПР случайного параметра, используются как *обобщенные* (например, гипердельтное распределение [16, 17]), так и *основные* [21] функции (например, равномерное, нормальное, экспоненциальное распределения [20]).

3. Гипердельтная аппроксимация фазовой функции. Наиболее подходящей и естественной аппроксимацией по методу моментов для распределения случайного параметра $\hat{\lambda}$ можно считать гипердельтную аппроксимацию (ГДА) [16]. Аппроксимирующая гипердельтная ПР случайного параметра имеет вид

$$h_a(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} C_i \delta(\lambda - \lambda_i), \tag{3}$$

где C_i — вероятности, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$, а $\delta(\lambda)$ — дельта-функция Дирака.

ГДА довольно проста, лучше других приспособлена для использования реальной статистической информации или экспертных оценок, позволяет аппроксимировать как дискретные, так и непрерывные функции, может описывать как случайные, так и детерминированные величины. Кроме того, случайный параметр $\hat{\lambda}$ не является прямо измеряемой или наблюдаемой величиной, а определяется косвенно через наблюдения за интервалами между событиями или за количеством событий, наступающих на заданном интервале времени. Поэтому исходные данные могут выражаться в виде взвешенной суммы фиксированных наблюдений, т.е. в гипердельтном представлении.

При ГДА фазовой функции $h(\lambda)$, подставляя (3) вместо $h(\lambda)$ во (2), получим *гиперпредставление* ПР случайной величины t:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i f(t, \lambda_i). \tag{4}$$

При *экспоненциальном интегральном ядре* $f(t, \lambda_i)$ получим известную *гиперэкспоненциальную плотность распределения***,** часто используемую для аппроксимации реальных распределений в теории очередей и теории надежности:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}. \tag{5}$$

Таким образом, ГДА ПР случайного параметра экспоненциального распределения аналогична гиперэкспоненциальной аппроксимации распределения времени между событиями. Однако здесь имеются некоторые отличия. В случае гиперэкспоненциальной аппроксимации распределений времени обеспечивается равенство начальных моментов аппроксимирующего и аппроксимируемого распределения. В случае же ГДА распределения случайного параметра обеспечивается равенство начальных моментов распределений параметров, а не распределений времени между событиями. Для последних же будет обеспечиваться равенство их производных в точке t=0, что соответствует аппроксимации по методу производных [22].

Рассмотрим ГДА некоторых известных распределений по начальным моментам при различных ограничениях. При n=2 параметры C_i и λ_i для выражения (3), аппроксимирующего известные распределения, можно получить аналитически:

1) для равномерного распределения с параметрами a и b:

$$C_1 = C_2 = 1/2; \ \lambda_{1,2} = \frac{a+b}{2} \mp \frac{b-a}{2\sqrt{2}};$$

2) для нормального распределения с параметрами m и σ:

$$C_1 = C_2 = 1/2; \lambda_{1,2} = m \mp \sigma;$$

3) для экспоненциального распределения $f(\lambda) = \theta \cdot \exp(-\theta\lambda)$:

$$C_{1,2} = \frac{1 \pm 5/\sqrt{2}}{2}; \lambda_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{\theta}.$$

Если вид аппроксимируемого распределения неизвестен, но известны k его начальных моментов γ_i, $i = 1 \div k$, то параметры C_i и λ_i однозначно выражаются через γ_i. Для n=2 согласно [16] имеем:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\gamma_3 - \gamma_2\gamma_1 \mp \sqrt{(\gamma_3 - \gamma_2\gamma_1)^2 - 4(\gamma_3\gamma_1 - \gamma_2^2)(\gamma_2 - \gamma_1^2)}}{2(\gamma_2 - \gamma_1^2)}; \qquad (6)$$

$$C_{1,2} = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{3\gamma_2\gamma_1 - \gamma_3 - 2\gamma_1^2}{\sqrt{(\gamma_3 - \gamma_2\gamma_1)^2 - 4(\gamma_3\gamma_1 - \gamma_2^2)(\gamma_2 - \gamma_1^2)}}\right]. \qquad (7)$$

Однако использование аппроксимации при n=2 (2 пика дельта-функции) может оказаться недостаточным по точности аппроксимации. При n>2 необходимо использовать численные методы. Так, для n=3 система уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3 &= \gamma_1 \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2 &= \gamma_2 \\ C_1\lambda_1^3 + C_2\lambda_2^3 + C_3\lambda_3^3 &= \gamma_3 \\ C_1\lambda_1^4 + C_2\lambda_2^4 + C_3\lambda_3^4 &= \gamma_4 \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Но можно найти параметры аппроксимации и аналитически, если имеется дополнительная информация об аппроксимируемом распределении. Так, если известно, что $h(\lambda)$ — симметричная функция, то система уравнений упрощается, поскольку $C_1 = C_3 = C$, $(\lambda_1+\lambda_3)/2 = \lambda_2$, откуда $C_2 = 1–2C$ и $\lambda_2=\gamma_1$. Упрощенная система уравнений примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 2\gamma_1 \\ C\left(\lambda_1^2 + \lambda_3^2\right) &= \gamma_2 - \gamma_1^2 + 2C\gamma_1^2 \\ C\left(\lambda_1^3 + \lambda_3^3\right) &= \gamma_3 - \gamma_1^3 + 2C\gamma_1^3 \\ C\left(\lambda_1^4 + \lambda_3^4\right) &= \gamma_4 - \gamma_1^4 + 2C\gamma_1^4 \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

После решения системы уравнений (9) находим параметры аппроксимации:

$$\begin{gathered} \lambda_{1,3} = \gamma_1\left[1 \mp \sqrt{\frac{3\gamma_2\gamma_1 - 5\gamma_3 + 2\gamma_4/\gamma_1}{\gamma_3 - \gamma_2\gamma_1}}\right];\ \lambda_2 = \gamma_1; \\ C = \frac{\left(\gamma_2 - \gamma_1^2\right)\left(\gamma_3 - \gamma_2\gamma_1\right)}{2\gamma_1\left(3\gamma_2\gamma_1^2 - 5\gamma_3\gamma_1 + 2\gamma_4\right)}. \end{gathered} \qquad (10)$$

Если вид аппроксимируемого симметричного распределения известен, можно выразить параметры аппроксимации через параметры распределения. Так, для *равномерного закона:*

$$\lambda_{1,3} = \frac{a+b}{2} \mp \frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\sqrt{3}}{2\sqrt{5}};\ \lambda_2 = \frac{a+b}{2};\ C_1 = C_3 = 5/18;\ C_2 = 4/9.$$

Для *нормального закона:*

$$\lambda_{1,3} = m \mp \frac{\sigma\sqrt{3}}{2};\ \lambda_2 = m;\ C_1 = C_3 = 6;\ C_2 = 3.$$

Интересно отметить, что аппроксимация $h(\lambda)$ при n=2 завышает значение первого момента ν_1 распределения $f(t)$ времени между событиями, а при n=3, наоборот, занижает, хотя получаемые значения более точны. Поэтому можно использовать гипердельтную аппроксимацию распределения случайного параметра в качестве верхней и нижней оценки распределения $f(t)$ времени между событиями.

4. Аппроксимация распределением с произвольной фазовой функцией методом производных. Для аппроксимации распределения случайного параметра могут, помимо гипердельтной аппроксимации, использоваться и другие распределения, например, гиперэкспоненциальные и гипоэкспоненциальные [4], нормальные, треугольные и др. Однако часто в условиях неопределенности исходных данных нет возможности использовать слишком подробные многопараметрические распределения. В этом случае в качестве аппроксимирующего можно использовать *равномерное распределение*, характеризующее максимальную степень неопределенности (по мере устранения неопределенности гипотеза о виде распределения может быть скорректирована). Параметры аппроксимации в этом случае определяются первыми двумя начальными моментами γ_1, γ_2:

$$a = \gamma_1 - \sqrt{3D} = \gamma_1 - \sqrt{3(\gamma_2 - \gamma_1{}^2)}\,; b = \gamma_1 + \sqrt{3D} = \gamma_1 + \sqrt{3(\gamma_2 - \gamma_1{}^2)}\,. \qquad (11)$$

Таким образом, после выделения экспоненциального ядра в формуле (2) для представления условной ПР времени между событиями потока основная задача формирования аппроксимирующего распределения сводится к нахождению ПР $h(\lambda)$ случайного параметра и ее начальных моментов. Однако очевидно, что для представления произвольного распределения $f(t)$ в виде (2) функция $h(\lambda)$ по физическому смыслу может и не быть функцией плотности вероятности.

Пример. По аналогии с гипердельтным и гипоэкспоненциальным распределениями введем понятие *гиподельтной функции* для аппроксимации фазовой функции:

$$h_a(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} C_i \delta(\lambda - \lambda_i). \qquad (12)$$

Аппроксимирующая гиподельтная функция (12) не является плотностью распределения. Однако, подставляя (12) в (3), получаем *гипоэкспоненциальную* ПР случайной величины t:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} C_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}. \qquad (13)$$

Рассмотрим задачу аппроксимации произвольного распределения распределением с *произвольной фазовой функцией*. За основу возьмем метод производных [22], при котором аппроксимация производится на основе равенства производных аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в нулевой точке. Покажем взаимосвязь между аппроксимацией *методом производных* произвольной ПР и аппроксимацией *методом моментов* фазовой функции этой плотности.

Лемма. *Аппроксимация методом производных произвольной плотности распределения случайной величины, представленной формулой (3), соответствует аппроксимации методом моментов фазовой функции этой плотности.*

Доказательство: Пусть известна исходная ПР $f(t)$, удовлетворяющая условию непрерывности. Представим ее в виде ряда Тейлора:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)t^k}{k!}\cdot \tag{14}$$

Преобразование Лапласа-Стилтьеса от $f(t)$:

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}}\cdot$$

При замене $s=1/z$ получим:

$$\frac{F^*(1/z)}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(0)z^k\cdot$$

Тогда справедливо выражение:

$$\lim_{z\to 0}\left[\frac{F^*(1/z)}{z}\right]^{(k)}=f^{(k)}(0)=f_k,\ k=0,1,2,...,$$

что и требовалось доказать.

При экспоненциальности интегрального ядра $f(t,\lambda)$ ПР $f(t)$ согласно (3) определяется фазовой функцией (оператором) $h(\lambda)$:

$$f(t)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}h(\lambda)d\lambda\cdot \tag{15}$$

На основе формулы (15) при различных фазовых функциях можно получить целый ряд выражений для распределений времени между событиями. В таблице 1 приведены различные ПР $f(t)$ и соответствующие им согласно (15) фазовые функции, в частных случаях представляющие собой ПР случайного параметра $\hat{\lambda}$ (в таблице функция $\mathbf{1}(\lambda)$ — единичная ступенчатая функция Хевисайда).

Таблица 1. Представление распределений с произвольной фазовой функцией

Распределение	Плотность распределения	Фазовая функция
экспоненциальное	$\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$	$\delta(\lambda-\lambda_0)$
обобщенно-экспоненциальное	$C_1\delta(t)+(1-C_1)\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$	$\frac{C_1\delta(t)}{\lambda e^{-\lambda t}d\lambda}+(1-C_1)\delta(\lambda-\lambda_0)$
гипер-экспоненциальное	$\sum_{i=1}^{n} C_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}$	$\sum_{i=1}^{n} C_i\delta(\lambda-\lambda_i)$
гипо-экспоненциальное	$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}$	$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_i\delta(\lambda-\lambda_i)$
обобщенное Эрланга 2-го порядка	$\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)$	$\frac{\lambda_2\delta(\lambda-\lambda_1)-\lambda_1\delta(\lambda-\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}$
простое Эрланга 2-го порядка	$\lambda_0{}^2 t e^{-\lambda_0 t}$	$\frac{\lambda_0{}^2\cdot d\delta(\lambda-\lambda_0)}{\lambda d\lambda}$
равномерно-экспоненциальное	$\frac{(1+at)e^{-at}-(1+bt)e^{-bt}}{(b-a)t^2}$	$\frac{\mathbf{1}(\lambda-a)\cdot\mathbf{1}(b-\lambda)}{b-a}$
гиперравномерно-экспоненциальное	$\sum_{i=1}^{n} C_i\frac{(1+a_i t)e^{-a_i t}-(1+b_i t)e^{-b_i t}}{(b_i-a_i)t^2}$	$\sum_{i=1}^{n} C_i\frac{\mathbf{1}(\lambda-a_i)\cdot\mathbf{1}(b_i-\lambda)}{b_i-a_i}$
Кокса 2-го порядка	$C_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+$ $+\frac{(1-C_1)\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)$	$C_1\delta(\lambda-\lambda_1)+(1-C_1)*$ $*\frac{\lambda_2\delta(\lambda-\lambda_1)-\lambda_1\delta(\lambda-\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}$
Парето 1-го порядка	$\theta/(t+\theta)^2$	$\theta e^{-\theta\lambda}$

Для нахождения начальных моментов $h(\lambda)$ или в общем случае интегралов вида:

$$\gamma_k=\int_0^\infty \lambda^k h(\lambda)d\lambda\cdot$$

сформулируем следующее теорему.

Теорема. Начальные моменты случайного параметра $\hat{\lambda}$ случайного экспоненциального распределения $f(t,\hat{\lambda})$ определяются значениями усредненной по параметру плотности $f(t)$ и ее производных в точке t=0:

$$\gamma_k=(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(0)\,.$$

Доказательство: Возьмем (k-1)-ю производную от усредненной плотности распределения $f(t)=\int\limits_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}h(\lambda)d\lambda$ в точке t=0:

$$f^{(k-1)}(0)=\lim_{t\to 0}\left[\int\limits_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}h(\lambda)d\lambda\right]^{(k-1)}=\lim_{t\to 0}\int\limits_0^{\infty}h(\lambda)\left[\lambda e^{-\lambda t}\right]^{(k-1)}d\lambda$$

$$=(-1)^{k-1}\int\limits_0^{\infty}\lambda^k h(\lambda)d\lambda=(-1)^{k-1}\gamma_k\,.$$

Следовательно, $\gamma_k=(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(0)$, что и требовалось доказать**.**

5. Заключение. Таким образом, в случае отсутствия сведений о характере изменения параметров модели исходят из их максимально возможной неопределенности, и расчет системы проводится при допущении о равномерном распределении случайного параметра $\hat{\lambda}$. Для аппроксимации распределения $\hat{\lambda}$ можно воспользоваться формулой (11) и исследовать характеристики потока аналитическими методами, разработанными в [19, 20]. Если выдвигается гипотеза о другом виде распределения случайного параметра $\hat{\lambda}$ (например, нормальном) либо имеется информация о начальных моментах случайных параметров или о начальных значениях производных от исходных распределений, то характеристики потока находятся на основе предлагаемого аппроксимационного метода.

Также предложенный метод позволяет использовать единое представление для распределений случайных величин в виде композиции интегрального ядра и фазовой функции, даже если последняя по физическому смыслу не является плотностью распределения [13]. При построении фазовых функций используется математический аппарат обобщенных функций, представляющих собой линейные непрерывные функционалы на пространстве основных функций [21].

Дальнейшее исследование моделей обслуживания будет определяться сформированными исходными данными. Применение описанного композиционного метода формирования аппроксимирующих распределений позволяет использовать известные модели систем массового обслуживания с известными распределениями фазового типа [5, 6, 7], а также разрабатывать новые модели с произвольными фазовыми функциями. Кроме того, при наличии возмущений или неопределенности параметров распределений метод может быть использован для коррекции моделей в соответствии с гипотезами о распределениях возмущенных параметров [20].

Литература

1. *Buchholz P., Kriege J., Felko I.* Input Modeling with Phase-Type Distributions and Markov Models // Theory and Applications. 2014. 127 p.
2. *Cox D.R.* A use of complex probabilities in theory of stochastic processes // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1955. vol. 51. no 2. pp. 313–319.
3. *Neuts M.F.* Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: an Algorithmic Approach. Chapter 2: Probability Distributions of Phase Type // Baltimore: Johns Hopkins University Press. 1981. 352 p.
4. *Смагин В.А.* Об одном методе исследования немарковских систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 6. С .31–36.
5. *Рыжиков Ю.И.* Имитационное моделирование. Теория и технологии // СПб.: КОРОНА принт; М.:Альтекс-А, 2004. 384 с.
6. *Reinecke P., Horváth G.* Phase-type distributions for realistic modelling in discrete-event simulation // Proceedings of the 5th International ICST Conference on Simulation Tools and Techniques. 2012. pp. 283–290.
7. *Рыжиков Ю.И., Хомоненко А.Д.* Итерационный метод расчета многоканальных систем с произвольным законом обслуживания // Проблемы управления и теории информации. 1980. № 3. С. 203–213.
8. *Бочаров П.П., Литвин В.Г.* Методы анализа и расчета систем массового обслуживания с распределениями фазового типа // Автоматика и телемеханика. 1986. № 5. С. 5–23.
9. *Смагин В.А., Филимонихин Г.В.* Аппроксимационный метод расчета разомкнутых сетей массового обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 1986. № 4. С. 28–33.
10. *Алиев Т.И.* Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2(84). С. 88–93.
11. *Бубнов В.П., Тырва А.В., Еремин А.С.* Комплекс моделей нестационарных систем обслуживания с распределениями фазового типа // Труды СПИИРАН. 2014. Вып. 37. С. 61–71.
12. *Vatamidou E., Vlasiou M., Adan I.J.B.F., Zwart B.* On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models // Scandinavian Actuarial Journal. 2014. no. 6. pp. 510–534.
13. *Кочегаров В.А., Фролов Г.А.* Проектирование систем распределения информации. Марковские и немарковские модели. М.: Радио и связь. 1991. 216 с.
14. *Гончаренко В.А., Смагин В.А.* О влиянии неопределенности параметров распределений на характеристики узла сети // Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение. 1993. № 7–8. С.39–45.
15. *Гончаренко В.А.* Анализ реактивности узла вычислительной сети в условиях интервальной неопределенности // Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение. 2008. № 7. С. 34–39.
16. *Смагин В.А., Филимонихин Г.В.* О моделировании случайных процессов на основе гипердельтного распределения // Автоматика и вычислительная техника. 1990. № 1. С. 25–31.
17. *Смагин В.*А. Коррекция гипердельтного распределения в теории случайных процессов // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2015. №2. С 26–31.
18. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания // М.: Физматгиз. 1963. 236 с.
19. *Гончаренко В.А.* Формальный аппарат представления случайных процессов обслуживания с возмущающими воздействиями и неопределенностью параметров // Труды ВКА имени А.Ф.Можайского. 2015. Вып. 648. С. 13–18.

20. *Гончаренко В.А.* Моделирование и оценивание характеристик случайных потоков событий в компьютерных сетях при параметрической неопределенности // Труды ВКА имени А.Ф.Можайского. 2015. Вып. 649. С. 16–22.
21. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций // Обобщенные функции. М.: Физматгиз. 1958. Вып. 2. 307 с.
22. *Смагин В.А.* К аппроксимации законов распределений методом производных // Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение. 1993. № 2. С. 16–21.

References

1. Buchholz P., Kriege J., Felko I. Input Modeling with Phase-Type Distributions and Markov Models. Theory and Applications. 2014. 127 p.
2. Cox D.R. A use of complex probabilities in theory of stochastic processes. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 1955. vol. 51. no. 2. pp. 313–319.
3. Neuts M.F. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: an Algorithmic Approach. Chapter 2: Probability Distributions of Phase Type. Baltimore: Johns Hopkins University Press. 1981. 352 p.
4. Smagin V.A. [About one method of research of non-Markovian systems]. *Izv.AN SSSR. Tehnicheskaja kibernetika – Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*. 1983. no. 6. pp. 31–36. (In Russ.).
5. Ryzhikov Ju. I. *Imitacionnoe modelirovanie. Teorija i tehnologii.* [Imitating modeling. Theory and technologies]. SPb.: CORONA print; M.:Altex-A. 2004. 384 p. (In Russ.).
6. Reinecke P., Horváth G. Phase-type distributions for realistic modelling in discrete-event simulation. Proceedings of the 5th International ICST Conference on Simulation Tools and Techniques. 2012. pp. 283–290.
7. Ryzhikov Ju.I., Khomonenko A.D. [Iterative method for analysis of multichannel queueing systems with general service time distribution]. *Problemy upravlenija i teorii informacii – Problems of Control and Information Theory*. 1980. No 3. pp. 203-213. (In Russ.).
8. Bocharov P.P., Litvin V.G. [Analysis and calculation methods of queueing systems with phase-type distributions]. *Avtomatika i telemehanika – Automation and Telemechanics.* 1986. no. 5. pp. 5–23. (In Russ.).
9. Smagin V.A., Filimonihin G.V. [Approximation method of calculation of open queueing networks]. *Avtomatika i vychislitel'naja tehnika – Automation and Computer Engineering.* 1986. no. 4. pp. 28–33. (In Russ.).
10. Aliev T.I. [Approximation of probability distributions in queueing models]. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki – Scientific and technical journal of information technologies, mechanics and optics.* 2013. no. 2(84). p. 88–93. (In Russ.).
11. Bubnov V.P., Tyrva A.V., Eremin A.S. [Complex of models of non-stationary queuing systems with phase-type distributions]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings.* 2014. vol. 37. pp. 61–71. (In Russ.).
12. Vatamidou E., Vlasiou M., Adan I.J.B.F., Zwart B. On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models. *Scandinavian Actuarial Journal.* 2014, no. 6, pp. 510–534.
13. Kochegarov V.A., Frolov G.A. *Proektirovanie sistem raspredelenija informacii. Markovskie i nemarkovskie modeli*. [Designing of systems of information distribution. Markovian and non-Markovian models]. M.: Radio i svjaz', 1991. 216 p. (In Russ.).
14. Goncharenko V.A., Smagin V.A. [About influence of uncertainty of parameters of distributions on the characteristics of the network node]. *Izv. vyssh. uchebn. Zavedeni.: Priborostroenie – Proceedings of the higher educational institutions. Instrumentation.* 1993. no 7–8. pp 39–45. (In Russ.).

15. Goncharenko V.A. [Analysis of the reactivity of computer network node in conditions of interval uncertainty]. *Izv. vyssh. uchebn. zavedenij: Priborostroenie – Proceedings of the higher educational institutions: Instrumentation*. 2008. no 7. pp 34–39. (In Russ.).
16. Smagin V.A., Filimonihin G.V. [About modelling of stochastic processes on a basis of hyperdelta distribution]. *Avtomatika i vychislitel'naja tehnika – Automation and Computer Engineering*. 1990. no. 1. pp. 25–31. (In Russ.).
17. Smagin V.A. [Correction of the hyperdelta distribution in the theory of stochastic processes]. *Intellektual'nye tehnologii na transporte – Intellectual Technologies on Transport*. 2015. no. 2. pp. 26–31. (In Russ.).
18. Hinchin A.Ja. *Raboty po matematicheskoj teorii massovogo obsluzhivanija*. [Works on the mathematical queueing theory]. M.: Fizmatgiz. 1963. 236 p. (In Russ.).
19. Goncharenko V.A. [The formal apparatus of representation of stochastic processes of service with the disturbance and uncertainty parameters]. *Trudy VKA imeni A.F.Mozhajskogo – Proceedings of Military Space Academy named A.F.Mozhaysky*. 2015. vol. 648. pp. 13–18. (In Russ.).
20. Goncharenko V.A. [Modelling and estimation of characteristics of random flows of events in computer networks under parametric uncertainty]. *Trudy VKA imeni A.F.Mozhajskogo – Proceedings of Military Space Academy named A.F.Mozhaysky*. 2015. vol. 649. pp. 13–18. (In Russ.).
21. Gel’fand M.I., Shilov G.I. *Prostranstva osnovnyh i obobshhennyh funkcij. Obobshhennye funkcii* [Spaces of the test and generalized functions. Generalized functions]. M.: Fizmatlit. 1958. vol 2. 307 p. (In Russ.).
22. Smagin V.A. [To the approximation of the laws of distributions by the method of derivatives] *Izv. vyssh. uchebn. zavedenij: Priborostroenie – Proceedings of the higher educational institutions: Instrumentation*. 1993. no. 2. pp. 16–21. (In Russ.).

Гончаренко Владимир Анатольевич — к-т техн. наук, доцент, профессор кафедры информационно-вычислительных систем и сетей, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: теория очередей, математическое моделирование, информационная безопасность, устойчивость компьютерных систем. Число научных публикаций — 71. vlango@mail.ru; ул. Ждановская 13, Санкт-Петербург, 197198; р.т.: +7(812)347-95-24.

Goncharenko Vladimir Anatolievich — Ph.D., associate professor, professor of information and computing systems and networks department, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: queueing systems with uncertainty, mathematical modeling, stability of computer networks. The number of publications — 71. vlango@mail.ru; 13, Zhdanovskaya street, St.-Petersburg, 197198, Russia; office phone: +7(812)347-95-24.

РЕФЕРАТ

Гончаренко В.А. **Композиционный метод формирования аппроксимационных распределений с произвольной фазовой функцией.**

В статье рассматривается обобщенный подход к представлению распределений вероятностей фазового типа в виде двухуровневой композиции интегрального ядра и произвольной фазовой функции. Под фазовой функцией понимается произвольная функция, принадлежащая пространству основных и обобщенных функций, описывающая структуру фазового построения распределения вероятностей фазового типа, в частных случаях являющаяся плотностью распределения случайного параметра.

Показаны возможности гипердельтной аппроксимации фазовой функции и ее место в формировании распределений фазового типа. Проводится взаимосвязь между гипердельтной аппроксимацией распределения случайного параметра экспоненциального распределения и гиперэкспоненциальной аппроксимацией распределения времени между событиями.

Предложен метод аппроксимации произвольного распределения распределением с фазовой функцией на основе метода производных. Показана взаимосвязь между аппроксимацией методом производных плотности распределения и аппроксимацией методом моментов фазовой функции. Выведены формулы для фазовых функций различных распределений времени между событиями. Получено выражение для нахождения начальных моментов фазовой функции.

SUMMARY

Goncharenko V.A. **Composite Method of Forming Approximating Distributions with an Arbitrary Phase Function.**

The article discusses the generalized approach to representation of phase-type probabilities distributions in the form of two-level composition of an integral kernel and an arbitrary phase function. The phase function is understood as the arbitrary generalized function which belongs to the space of the main and generalized functions, describes the structure of phase construction of phase-type probabilities distribution, and in special cases is the density of distribution of a random parameter.

Possibilities of hyper-delta approximation of the phase function and its place in the formation of distributions of phase type are shown. The interrelation between hyper-delta approximation of distribution of a random parameter of exponential distribution and the hyperexponential approximation of distribution of time between events is carried out.

The method of approximation of an arbitrary distribution by distribution with the phase function on the basis of a method of derivatives is offered. The interrelation between approximation by method of derivatives of distribution density and approximation by method of the moments of phase function is shown. Formulas for phase functions of various distributions of time between events are derived. Expression for finding the initial moments of the phase function is obtained.