

О.И. Смоктий

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
ЯРКОСТИ ПЛОСКОГО ОДНОРОДНОГО СЛОЯ НА ОСНОВЕ
ПРИНЦИПА ЗЕРКАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И РЕШЕНИЙ
ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Смоктий О.И. Численное моделирование коэффициентов яркости плоского однородного слоя на основе принципа зеркального отображения и решений линейных сингулярных интегральных уравнений.

Аннотация. На основе принципа зеркального отображения и соответствующих решений модифицированных линейных сингулярных интегральных уравнений проведено численное моделирование единой функции внешнего поля излучения и фотометрических инвариантов коэффициентов яркости плоского однородного слоя конечной оптической толщины на его внешних границах. Показана эффективность этих уравнений при использовании метода угловой дискретизации в задачах численного моделирования полей излучения системы «атмосфера — подстилающая поверхность». Указанный новый подход позволяет обобщить основные результаты численного радиационного моделирования в частном случае полубесконечного однородного слоя. В этой связи рассмотрены основные математические аспекты и вычислительные особенности численной реализации метода угловой дискретизации. Вследствие линейности используемых базовых интегральных уравнений проведенный анализ можно обобщить на случай скалярных и поляризованных полей излучения при учете многократного анизотропного рассеяния излучения и его отражения от произвольной горизонтально-однородной подстилающей поверхности.

Ключевые слова: принцип зеркального отображения, плоский однородный слой, коэффициенты яркости, фотометрические инварианты, единая функция, основная краевая задача, линейные сингулярные интегральные уравнения, регуляризация, численное моделирование, метод дискретизации, характеристические корни, отражающая подстилающая поверхность.

1. Введение. До недавнего времени численное моделирование полей излучения плоского однородного слоя произвольной оптической толщины τ_0 проводилось в рамках традиционных представлений об их пространственно-угловой симметрии только на его внешних границах и на основе известной теоремы оптической обратимости для индикатрис рассеяния $x(\cos\gamma)$, где γ — угол рассеяния [1].

Вместе с тем, как было впервые показано автором [2], проблема пространственно-угловой симметрии внешних и внутренних полей излучения указанного слоя не ограничивается ее классическим рассмотрением [3-5]. Оказалось, что поле излучения данного слоя обладает скрытым внутренним свойством «зеркальной» пространственно-угловой симметрии относительно его середины ($\tau_0/2$). Указанное свойство симметрии определяется общим принципом зеркального отображения, сформу-

лированным в [6] для новых структурных функций теории переноса излучения — фотометрических инвариантов, которые обладают свойством инвариантности на симметричных уровнях $(\tau_0, \tau_0 - \tau)$ в зеркальных направлениях визирования $(\theta, \pi - \theta)$. С математической точки зрения существование этих функций определяется только оптической однородностью рассматриваемого слоя и свойствами пространственно-угловой симметрии (инвариантности) соответствующих решений симметризованной краевой задачи теории переноса излучения при групповых линейных преобразованиях интенсивности излучения типа сдвига по оптической глубине $(\tau \Rightarrow \tau_0 - \tau)$ и вращения линии визирования $\theta \Rightarrow \pi - \theta$. При этом новые фотометрические структуры и свойства их инвариантности в рамках упомянутых выше групповых линейных преобразований и локальной теоремы оптической обратимости [5] расширяют традиционные представления о пространственно-угловой симметрии полей излучения природных сред, позволяя модифицировать исходную несимметризованную форму классической краевой задачи теории переноса излучения [4] и приводя ее к фотометрически симметризованному виду [2]. При этом, как будет показано ниже, для реализации указанного подхода и связанных с ним преимуществ наиболее удобной математической формой представления исходного интегро-дифференциального уравнения переноса излучения является не само это уравнение, а адекватные ему линейные сингулярные интегральные уравнения [7]. Ниже на базе принципа зеркального отображения (симметрии) и численных решений регуляризованных линейных сингулярных интегральных уравнений рассмотрена реализация метода угловой дискретизации, а также его алгоритмические особенности для нахождения фотометрических инвариантов коэффициентов яркости плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$, ограниченного снизу произвольно отражающей горизонтально-однородной подстилающей поверхностью.

2. Принцип зеркального отображения для коэффициентов яркости плоского однородного слоя. В качестве модели природной среды, в которой происходят процессы поглощения и многократного рассеяния солнечных фотонов, рассмотрим плоский однородный слой конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$, ограниченный снизу горизонтально-однородной подстилающей поверхностью, отражающей падающее на нее излучение по произвольному анизотропному закону Y . Направление распространения фотонов на текущей оптической глубине τ будем задавать углом $\theta = \arccos \eta$, отсчитываемым от направления внутренней нормали к слою в сторону увеличения τ , зенитным расстоянием Солнца

$\theta_0 = \arccos \xi$ и азимутом $(\varphi - \varphi_0)$. В дальнейшем, не уменьшая общности рассмотрения, азимут Солнца φ_0 примем равным нулю. Интенсивность излучения на оптической глубине τ обозначим через $I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$. Поляризацией и рефракцией излучения будем пренебрегать.

Заданными базовыми оптическими параметрами рассматриваемого слоя являются вероятность выживания фотона Λ при элементарном акте рассеяния (альbedo частицы) и индикатриса рассеяния $x(\cos \gamma)$, где γ — угол рассеяния определяются согласно соотношению:

$$\cos \gamma = \pm \eta \xi + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \xi^2)} \cos \varphi, \quad \eta \in [-1, +1], \quad \xi \in [0, 1], \quad (1)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi].$$

Первоначально рассмотрим поле скалярного излучения плоского однородного слоя без отражающего дна на его нижней границе $\tau = \tau_0$ (рисунок 1а).

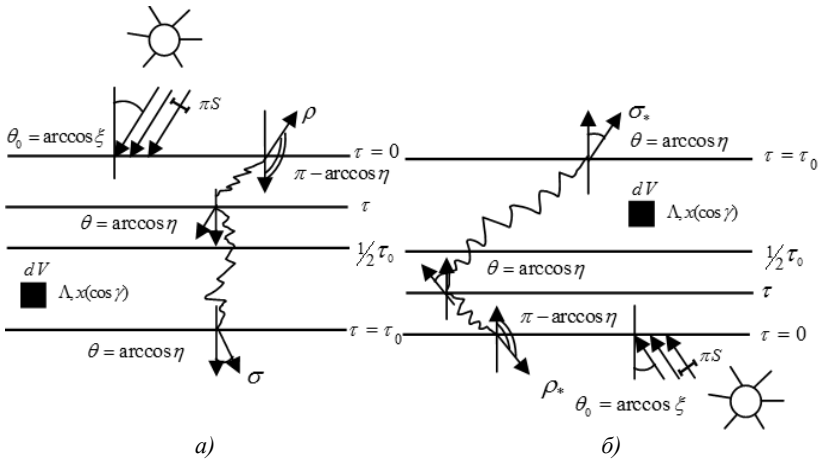


Рис. 1. Исходное (а) и «зеркальное» (б) поля скалярного излучения, отраженного и пропущенного плоским однородным слоем конечной оптической толщины τ_0

Далее, в частном случае полей излучения на внешних границах плоского однородного слоя $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ введем коэффициенты диффузного отражения $\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ и пропускания $\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ согласно соотношениям:

$$I(0, -\eta, \xi, \varphi, \tau_0) = S\xi\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0), \eta > 0, \xi \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

$$I(\tau_0, \eta, \xi, \varphi, \tau_0) = S\xi\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0), \eta > 0, \xi \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], \quad (3)$$

где πS — освещенность прямым солнечным излучением площадки, расположенной перпендикулярно к нему на уровне верхней границы слоя $\tau = 0$. Кроме того, для уменьшения числа независимых угловых переменных (η, ξ, φ) в исходной задаче представим индикатрису рассеяния $x(\cos\gamma)$, интенсивность излучения $I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$, коэффициенты яркости $\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ в виде соответствующих отрезков стандартных рядов Фурье:

$$x(\eta, \xi, \varphi) = \wp^0(\eta, \xi) + 2\sum_{m=1}^{M_1} \wp^m(\eta, \xi) \cos m\varphi; \quad (4)$$

$$I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0) = I^0(\tau, \eta, \xi, \tau_0) + 2\sum_{m=1}^{M_2} I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) \cos m\varphi; \quad (5)$$

$$\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0) = \rho^0(\eta, \xi, \tau_0) + 2\sum_{m=1}^{M_3} \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \cos m\varphi; \quad (6)$$

$$\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0) = \sigma^0(\eta, \xi, \tau_0) + 2\sum_{m=1}^{M_4} \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \cos m\varphi. \quad (7)$$

В дальнейшем в качестве общего значения числа азимутальных гармоник в (4-7) будем выбирать величин $M = \max\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

Рассмотрим теперь азимутальные гармоники коэффициентов диффузного отражения ρ^m и пропускания σ^m в задаче, «зеркальной» (рисунок 1б) по отношению к исходной задаче (рисунок 1а). Объединяя соответствующие коэффициенты яркости (ρ^m, σ^m) и (ρ_*^m, σ_*^m) в обеих задачах для излучения, выходящего из слоя на уровне его нижней ($\tau = \tau_0$) и верхней ($\tau = 0$) границ, имеем следующие соотношения (рисунок 2а):

$$\tau = 0 \Rightarrow \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma_*^m(\eta, \xi, \tau_0), m = 0, 1, \dots, M, \quad (8)$$

$$\tau = \tau_0 \Rightarrow \rho_*^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), m = 0, 1, \dots, M. \quad (9)$$

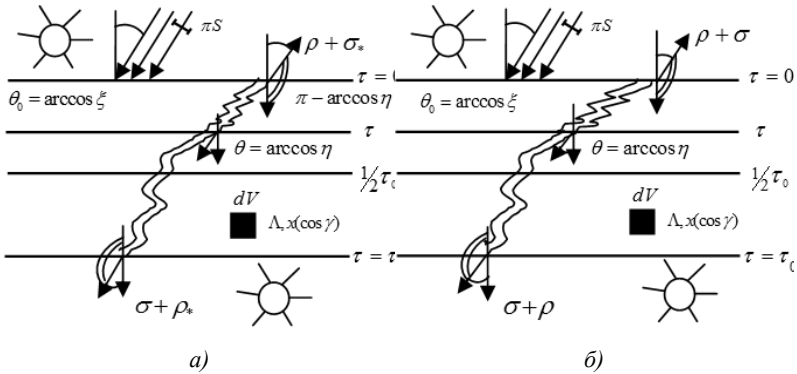


Рис. 2. Объединенные исходное (а) и «зеркальное» (б) поля скалярного излучения, отраженного и пропущенного плоским однородным слоем конечной оптической толщины τ_0 в задаче, симметризованной по коэффициентам яркости и освещению прямым солнечным излучением

Далее, пользуясь оптической однородностью рассматриваемого слоя, имеем базовые соотношения фотометрической эквивалентности для коэффициентов яркости исходного (рисунок 1а) и «зеркального» (рисунок 1б) полей излучения:

$$\sigma_*^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad \rho_*^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \rho^m(\eta, \xi, \tau_0). \quad (10)$$

Подставляя затем (10) в (8-9), получаем, что фотометрические инвариантные величины $R_+^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и $R_-^m(\eta, \xi, \tau_0)$, определяемые для оптически однородного плоского слоя согласно соотношениям (рисунок 2б):

$$\begin{aligned} R_+^m(\eta, \xi, \tau_0) &= \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) + \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \\ R_-^m(\eta, \xi, \tau_0) &= \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) - \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad m=0,1,\dots,M, \end{aligned} \quad (11)$$

не меняются по абсолютной величине при замене исходного поля излучения на его «зеркальное» отображение и наоборот. Другими словами, величины $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ при наличии известного локального свойства их симметрии при перестановке угловых переменных $\eta \leftrightarrow \xi$:

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv R_{\pm}^m(\xi, \eta, \tau_0), \quad m=0,1,\dots,M. \quad (12)$$

приобретают в масштабе всего слоя дополнительное свойство пространственно-угловой симметрии на его границах $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ при замене диффузно-отраженного излучения на диффузно-пропущенное излучение и наоборот. Именно:

$$\begin{aligned} R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) &= \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \\ &\equiv \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \pm \left[\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что симметризация положений внешних источников излучения относительно середины рассматриваемого слоя ($\tau_0/2$) в исходной задаче (рисунок 1а) не имеет принципиального значения для существования фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, а является только физическим приемом наглядного проявления их инвариантных свойств (13) на эвристическом уровне. Таким образом, соотношения (13) определяют в формальной математической форме основное физическое содержание принципа зеркального отображения (симметрии) для азимутальных гармоник фотометрических инвариантов R_{\pm}^m и коэффициентов яркости (ρ^m, σ^m) плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$. Именно, сумма или разность азимутальных гармоник коэффициентов диффузного отражения $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и пропускания $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$ плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$ не меняются по абсолютной величине в зеркальных направлениях визирования $(\eta, -\eta)$ и при замене на его внешних границах $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ диффузно-отраженного излучения на диффузно-пропущенное излучение и наоборот.

3. Модификация основной краевой задачи теории переноса излучения. Существование фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ как в частном случае внешних полей излучения на границах $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$, так и в общем случае фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, формируемых внутренними полями излучения на произвольной оптической глубине τ согласно соотношениям:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) \pm I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (14)$$

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \pm I_{\pm}^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad (15)$$

порождает проблему их адекватного включения в математический аппарат классической теории многократного анизотропного рассеяния света [3-5]. Одновременно возникает проблема соответствующего формального математического описания новых фотометрических величин в терминах решений основной краевой задачи, определяемой исходным интегро-дифференциальным уравнением переноса излучения при заданных граничных условиях. Как нетрудно показать, в общем случае скалярного поля излучения инвариантная (симметризованная) форма основной краевой задачи теории переноса излучения для фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ при отсутствии отражающего дна $Y = 0$ имеет вид [8]:

$$\eta \frac{\partial_{\tau}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)}{\partial \tau} = -I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) + B_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m=0, 1, \dots, M \quad (16)$$

при граничных условиях

$$I_{\pm}^m(0, \eta, \xi, \tau_0) = I_{\pm}^m(\tau_0, -\eta, \xi, \tau_0) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (17)$$

Аналогично (14) азимутальные гармоники для инвариантов функции источников $B_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ определяются следующим образом:

$$B_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = B^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) \pm B^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{2} \int_{-1}^1 \wp^m(\eta, \eta') I_{\pm}^m(\tau, \eta', \xi, \tau_0) d\eta', \quad (18)$$

$$R_{+}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) + \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad (19)$$

$$R_{-}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) - \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad m=0, 1, \dots, M,$$

где функции источников $B_{\pm,1}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ рассчитываются по точным формулам для однократно рассеянного излучения:

$$B_{\pm,1}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda S}{4} \left[\wp^m(-\eta, \xi) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\xi}} \pm \wp^m(\eta, \xi) e^{-\frac{\tau}{\xi}} \right], \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (20)$$

Отметим, что в отличие от классической (несимметризованной) формы основной краевой задачи, в которой независимые угловые переменные (η, ξ) и параметр τ_0 принадлежат интервалам $\eta \in [-1, 1]$,

$\xi \in [0, 1]$ и $\tau \in [0, \tau_0]$, в ее симметризованном виде (16-18) вследствие свойств инвариантности (15) и (19), они изменяются в более узких интервалах: $\eta \in [0, 1]$, $\xi \in [0, 1]$ и $\tau \in [0, \tau_0]$ или альтернативно $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \tau_0/2]$. Кроме того, использование концепции фотометрических инвариантов при численном решении симметризованной краевой задачи (16-18) позволяет дополнительно повысить эффективность основных методов и алгоритмов их расчетов, уменьшая объемы расчетного времени и оперативной памяти ЭВМ в 2,5-3 раза [8]. В дальнейшем для численного моделирования азимутальных гармоник коэффициентов яркости $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$, а также их фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, будут выбраны следующие интервалы изменения угловых переменных (η, ξ) и параметра: $\eta \in [0, 1]$, $\xi \in [0, 1]$ и $\tau \in [0, \tau_0]$.

Формальные решения неоднородных дифференциальных уравнений (16) при граничных условиях (17) имеют вид:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \int_0^{\tau} B_{\pm}^m(\tau', \eta, \xi, \tau_0) e^{\mp \eta \frac{\tau - \tau'}{\xi}} \frac{d\tau'}{\eta}, \quad \eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m=0, 1, \dots, M. \quad (21)$$

Подставляя (18) в (21), получаем при $\tau = \tau_0$ для фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ после очевидных преобразований, использующих соотношения (18), угловую симметрию индикатрисы рассеяния $\zeta^m(-\eta, -\eta') = \zeta^m(\eta, \eta')$ и свойство инвариантности (15), линейные интегральные уравнения Фредгольма II рода:

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{2S\xi} \int_0^{\tau_0} \left\{ \int_0^1 \left[\zeta^m(\eta, \eta') I_{\pm}^m(\tau', \eta', \xi, \tau_0) + \zeta^m(-\eta, \eta') I_{\pm}^m(\tau', -\eta', \xi, \tau_0) \right] d\eta' + \right. \\ \left. + \frac{S}{2} \left[\zeta^m(-\eta, \xi) e^{-\frac{\tau_0 - \tau'}{\xi}} \pm \zeta^m(\eta, \xi) e^{\frac{\tau'}{\xi}} \right] \right\} e^{\mp \eta \frac{\tau_0 - \tau'}{\xi}} \frac{d\tau'}{\eta},$$

$$\eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau' \in [0, \tau_0], \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (22)$$

Из уравнения (22) следует, что для нахождения численных значений функций $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, определяемых только в двух точках $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, необходимо провести трудоемкое интегрирование более сложных функций $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ по текущей оптической глубине τ в пределах

всего интервала ее изменения $[\tau \in \tau_0]$. Естественно, что подобная вычислительная процедура снижает эффективность применения принципа зеркального отображения и инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ в прикладных задачах оптики природных сред. С целью избежать указанного интегрирования по τ в расчетных схемах радиационного моделирования необходимо использовать другую альтернативную форму линейного представления исходного уравнения переноса излучения (16), отличную от (22). Очевидно, что основное требование, предъявляемое к подобной альтернативной форме, состоит в том, что она должна в полной мере обеспечивать преимущества, связанные с использованием принципа зеркального отображения и фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ [8]. Такую альтернативную форму для нахождения азимутальных гармоник фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ легко получить в виде двух отдельных линейных сингулярных интегральных уравнений на базе очевидных линейных алгебраических преобразований исходной системы этих уравнений, указанной в [4]:

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) T^m(\eta) = \frac{\Lambda}{2} \int_0^1 \frac{R_{\pm}^m(\eta', \xi, \tau_0) A^m(\eta, \eta') \eta'}{\eta' - \eta} d\eta' \mp \frac{\Lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_0^1 \frac{R_{\pm}^m(\eta', \xi) A^m(\eta, -\eta') \eta'}{\eta' + \eta} d\eta' + R_{\pm,1}^m(\eta, \xi, \tau_0),$$

$$\eta \in [0, 1], \xi \in [0, 1], m = 0, 1, \dots, M,$$
(23)

где функции $T^m(\eta)$ равны:

$$T^m(\eta) = 1 + \frac{\Lambda}{2} \eta \int_{-1}^1 \frac{A^m(\eta, \eta') \eta'}{\eta' - \eta} d\eta', m = 0, 1, \dots, M.$$
(24)

Функции $R_{\pm,1}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ в (23) определяются согласно точному соотношению:

$$R_{\pm,1}^m(\eta, \xi, \tau_0) = A^m(\eta, -\xi) \rho_1^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm A^m(\eta, \xi) \sigma_1^m(\eta, \xi, \tau_0),$$
(25)

где азимутальные гармоники коэффициентов диффузного отражения $\rho_1^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и пропускания $\sigma_1^m(\eta, \xi, \tau_0)$ находятся по строгим формулам для однократно рассеянного излучения:

$$\rho_1^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{4(\eta + \xi)} \left[1 - e^{-\tau_0(1/\eta + 1/\xi)} \right], \sigma_1^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{4(\eta - \xi)} \left[e^{-\tau_0/\eta} - e^{-\tau_0/\xi} \right].$$
(26)

Полиномиальные ядерные функции $A^m(\eta, \eta')$, играющие важную роль в общей аналитической теории многократного анизотропного рассеяния света, исследованы в [4] на основе полиномов Соболева $\mathfrak{R}_{im}^m(\eta)$, $i = m, m+1, \dots, M$ и присоединенных полиномов Лежандра $P_n^m(\eta)$. Эти функции, зависящие от вида индикатрисы рассеяния $x(\cos\gamma)$, номера ее азимутальных гармоник m и вероятности выживания фотона Λ , будут рассчитаны ниже для модельных оптических параметров однородного слоя в рамках реализации метода угловой дискретизации.

4. Регуляризованная форма линейных сингулярных интегральных уравнений. Необходимым этапом использования линейных сингулярных интегральных уравнений (23-24) в задачах численного радиационного моделирования является их предварительная регуляризация. Действительно, эти уравнения можно очевидным образом регуляризовать после проведения простых линейных операций, в результате которых сингулярные члены в их правых и левых частях сокращаются. Используя указанные преобразования, получаем регуляризованную форму линейных сингулярных интегральных уравнений (23-24) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) \hat{T}^m(\eta) &= \frac{\Lambda}{2} \int_0^1 A^m(\eta, \eta') R_{\pm}^m(\eta', \xi, \tau_0) d\eta' + \\
 &+ \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 A^m(\eta, \eta') \frac{R_{\pm}^m(\eta', \xi, \tau_0) - R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)}{\eta' - \eta} d\eta' \mp \\
 &\mp \frac{\Lambda}{2} e^{-\tau_0/\eta} \int_0^1 \frac{A^m(\eta, -\eta') R_{\pm}^m(\eta', \xi, \tau_0) \eta' d\eta'}{\eta' + \eta} + R_{\pm,1}^m(\eta, \xi, \tau_0), \\
 \eta &\in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = 0, 1, \dots, M,
 \end{aligned} \tag{27}$$

где функции $\hat{T}^m(\eta)$ определяются согласно выражению:

$$\hat{T}^m(\eta) = \begin{cases} 1 - \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 A^0(\eta, -\eta') \frac{d\eta'}{\eta + \eta'}, & m=0 \\ 1 - \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A^m(\eta', \eta')}{\eta' + \eta} d\eta' + \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A^m(\eta', \eta') - A^m(\eta, \eta')}{\eta' - \eta} d\eta', & m > 0. \end{cases} \tag{28}$$

Заметим, что в уравнениях (27-28) угловая переменная $\theta_0 = \arccos \xi$, наряду с Λ и τ_0 , играет роль независимого параметра, и

следовательно, в случае численного моделирования фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ достаточно использовать только одну угловую переменную, а именно угол направления визирования $0 \leq \theta = \arccos \eta \leq \pi/2$.

Перейдем теперь к изложению основного содержания используемого численного метода и его алгоритмических особенностей. Данный метод состоит в сведении рассматриваемой исходной задачи к системам линейных алгебраических уравнений, получаемых после дискретизации интегралов и подынтегральных функций в интегральных уравнениях (27-28) согласно выбранным квадратурам. Аналогично методу дискретных ординат [9] заменим интегральные члены в уравнениях (27-28) квадратурами Гаусса и используем соответствующие формулы численного дифференцирования. Подчеркнем, что сами по себе эти вычислительные процедуры являются стандартными операциями в методах численного анализа [10]. Однако, как будет показано ниже, использование именно их в рамках численного моделирования решений симметризованных линейных интегральных уравнений (27-28) приводит к эффективному алгоритму, автоматически учитывающему дополнительные соотношения, необходимые для устранения возможной неединственности их решений.

Представим интегральные члены в уравнениях (27-28) согласно квадратурной формуле Гаусса:

$$\int_0^1 h^m(\eta) d\eta \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i^m h_i^m, \quad (29)$$

где $h_i^m = h^m(\eta_i)$, $m = 0, 1, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots, N$, а α_i и η_i являются весами и узлами квадратуры (29) соответственно. Тогда вместо исходного интегрального уравнения (27) для величин $R_{\pm}^m(\eta_i, \xi, \tau_0) = R_{\pm, i}^m$ имеем следующее линейное дискретное представление:

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) \hat{I}^m(\eta) = \frac{\Lambda}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i^m A^m(\eta, \eta_i) R_{\pm, i}^m + \frac{\Lambda}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i^m A^m(\eta, \eta_i) \times \frac{R_{\pm, i}^m - R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)}{\eta_i - \eta} \mp \frac{\Lambda}{2} e^{-\tau_0/\eta} \sum_{i=1}^N \alpha_i^m A^m(\eta, -\eta_i) R_{\pm, i}^m \frac{\eta_i}{\eta_i + \eta} + R_{1, \pm}^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (30)$$

Последовательно полагая в (30) для угловых величин $\eta = \eta_n$, $n = 1, \dots, N$, получаем соответствующую систему линейных алгебраических уравнений N -го порядка относительно искомым дискретных значений $R_{\pm,i}^m = R_{\pm}^m(\eta_i, \xi, \tau_0)$, а именно:

$$R_{\pm,n}^m \hat{T}_n^m = \frac{\Lambda}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N \alpha_i^m \left[A^m(\eta_n, \eta_i) R_{\pm,i}^m + A^m(\eta_n, \eta_i) (R_{\pm,i}^m - R_{\pm,n}^m) \frac{\eta_n}{\eta_i - \eta_n} \mp \right. \\ \left. \mp e^{-\tau_0/\eta_n} \frac{A^m(\eta_n, -\eta_i) R_{\pm,i}^m \eta_i}{\eta_i + \eta_n} \right] + R_{1,\pm,n}^m, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (31)$$

где $\hat{T}_n^m = \hat{T}^m(\eta_n)$ и $R_{1,\pm,n}^m = R_{1,\pm}^m(\eta_n, \xi, \tau_0)$.

Подчеркнем, что применение указанного алгоритма для численных решений первоначальной системы линейных сингулярных интегральных уравнений, полученной в [4] для коэффициентов яркости ρ^m и σ^m , приводит к системам дискретных линейных алгебраических уравнений типа (31), ранг которых в два раза больше, то есть $2N$.

Отметим, что особенностями суммирования в (31) является наличие членов с четко выраженной неопределенностью, именно:

$$(R_{\pm,i}^m - R_{\pm,n}^m) / (\eta_i - \eta_n), \quad (32)$$

которые при совпадении индексов дискретизации $i = n$ необходимо заменять выражениями численного дифференцирования для частных производных функций $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ по угловой переменной η . Для этого воспользуемся известными трехчленными формулами ($n=3$) численного дифференцирования непрерывной функции $f(x)$ в случае равноотстоящих узлов $f(\bar{x}_i) = f_i$, $\bar{x}_i \Rightarrow \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_0 = \Delta$ [10]:

$$f_0' = \frac{1}{2\Delta\bar{x}} (-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{(\Delta\bar{x})^2}{3} f'''(\bar{x}), f_1' = \frac{1}{2\Delta\bar{x}} (-f_0 + f_2) - \frac{(\Delta\bar{x})^2}{6} f'''(\bar{x}), \\ f_2' = \frac{1}{2\Delta\bar{x}} (f_0 - 4f_1 + 3f_2) + \frac{(\Delta\bar{x})^2}{3} f'''(\bar{x}). \quad (33)$$

Применяя формулы (33), окончательно получаем вместо (31) систему линейных алгебраических уравнений N -го порядка относительно неизвестных дискретных величин $R_{\pm,i}^m$:

$$\sum_{i=1}^N \beta_{ni}^m R_{\pm,i}^m = R_{1,\pm,n}^m, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (34)$$

Коэффициенты β_{ni}^m в (34) выражаются очевидным образом через узлы η_i и веса α_i ; квадратурной формулы (29), а также через дискретные значения ядерных функций $A^m(\eta_n, \pm\eta_i)$ при $m = 0, 1, \dots, M$. Ввиду громоздкости конечных выражений для коэффициентов β_{ni}^m в данной работе они не приводятся.

5. Устранение неединственности численных решений линейных регуляризованных сингулярных интегральных уравнений. Существенным моментом в алгоритме получения единственных решений исходных сингулярных линейных интегральных уравнений (23-24) и их регуляризованной формы (27-28) является наличие или отсутствие у характеристических уравнений корней k_m , общее количество которых не превышает $(M + 1)$ [3]:

$$T^m(\eta) = T^m(1/k_m) = 0, \quad 0 \leq k_m < 1, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (35)$$

Если характеристические уравнения (35) не имеют корней k_m , то решения линейных интегральных уравнений (23-24) и (27-28) являются единственными и проблем в их нахождении не возникает. Если же характеристические корни k_m существуют, то указанные уравнения имеют не единственные решения.

Отметим, что проблема существования корней k_m в случае модельных аппроксимирующих атмосферных индикатрис рассеяния $x(\cos\gamma)$ с прикладной точки зрения рассмотрена в [11]. Кроме того, там предложен эффективный алгоритм нахождения их количества и численных значений для индикатрис рассеяния $x(\cos\gamma)$, содержащих произвольное, но конечное число членов в их разложениях по полиномам Лежандра $P_n(\cos\gamma)$.

Для устранения неединственности решений интегральных уравнений (23-24) и (27-28) первоначально рассмотрим случай, когда характеристические уравнения (35) имеют корни $k_m \in [0, 1)$, $m = 0, 1, \dots, M$. В

данном случае, как отмечено выше, указанные уравнения имеют неединственные решения, и для выделения решений, имеющих физический смысл, необходимо сконструировать дополнительные интегральные соотношения, которым также должны удовлетворять регулярные решения $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ этих уравнений.

С целью получения этих интегральных соотношений рассмотрим отдельно наличие характеристических корней k_m при $m \geq 1$ и $m = 0$. Пусть первоначально $m \geq 1$ и $k_m > 0$. Тогда, подставляя значение $\eta = 1/k_m$ в уравнения (23-24) или (27-28) и обобщая результаты [4], находим, что их единственные регулярные решения $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, имеющие физический смысл, должны удовлетворять дополнительным соотношениям следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda}{2} k_m \int_0^1 A^m \left(\frac{1}{k_m}, \eta' \right) R_{\pm}^m(\eta', \xi) \frac{\eta' d\eta'}{1 - k_m \eta'} \pm \frac{\Lambda}{2} k_m e^{-k_m \tau_0} \times \\ & \times \int_0^1 A^m \left(\frac{1}{k_m}, -\eta' \right) R_{\pm}^m(\eta', \xi) \frac{\eta' d\eta'}{1 + k_m \eta'} = R_{1,\pm}^m \left(\frac{1}{k_m}, \xi \right), \quad m = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя затем квадратурную формулу (29), вместо (36) получаем систему дискретных линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^m R_{\pm,i}^m = \tilde{R}_{1,\pm}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (37)$$

где величины ε_i^m определяются следующим образом:

$$\varepsilon_i^m = \frac{\Lambda}{2} k_m \alpha_i^m \eta_i \left[\frac{A^m \left(\frac{1}{k_m}, \eta_i \right)}{1 - k_m \eta_i} \pm e^{-k_m \tau_0} \frac{A^m \left(\frac{1}{k_m}, -\eta_i \right)}{1 + k_m \eta_i} \right], \quad \tilde{R}_{1,\pm}^m = R_{1,\pm}^m \left(\frac{1}{k_m}, \xi \right), \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (38)$$

Совместное рассмотрение (34) и (37) позволяет выразить в исходных системах алгебраических уравнений (34) одну из N неизвестных функций $R_{\pm,i}^m$, $m = 0, 1, \dots, M$ с помощью (37), используя остальные

ные $(N-1)$ неизвестных функций, что автоматически приводит к понижению ранга систем (34) ровно на 1. Таким образом, эта операция позволяет простым образом устранить неединственность дискретных решений указанных систем (34) и тем самым избежать исследования подобной сложной проблемы для непрерывных решений исходных линейных сингулярных (23-24) и регуляризованных (27-28) интегральных уравнений.

Действительно, если в (37-38) имеем $\varepsilon_N \neq 0$, то из (37) получаем соотношение:

$$R_{\pm, N}^m = \frac{\tilde{R}_{1, \pm}^m}{R_{\pm, N}^m} - \frac{1}{\varepsilon_N^m} \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i^m R_{\pm, i}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (39)$$

Таким образом, (34), (37) и (39) преобразуются в систему линейных дискретных алгебраических уравнений с меньшим рангом $(N-1)$, а именно:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\beta}_{ni}^m R_{\pm, i}^m = \tilde{R}_{1, \pm, n}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (40)$$

где величины $\tilde{\beta}_{ni}^m$ определяются следующим образом:

$$\tilde{\beta}_{ni}^m = \beta_{ni}^m - \beta_{nN}^m \frac{\varepsilon_i^m}{\varepsilon_N^m}, \quad \tilde{R}_{1, \pm, n}^m = R_{\pm, n}^m - \tilde{R}_{1, \pm}^m \frac{\beta_{nN}^m}{\varepsilon_N^m}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (41)$$

Пусть теперь $m=0$ и характеристический корень $k_m=0$ ($m=0 \wedge \Lambda=1$). Тогда получаем, что дополнительные соотношения, необходимые для устранения неединственности решений системы уравнений (34), имеют вид:

$$2 \int_0^1 R_{\pm}^m(\eta, \xi) \eta d\eta + \frac{2(1-\delta_{\pm})}{\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\tau_0} \int_0^1 R_{\pm}^m(\eta, \xi) \eta^2 d\eta^2 = 1 \pm e^{-\frac{\tau_0}{\xi}} - (1-\delta_{\pm}) \xi \frac{1-e^{-\frac{\tau_0}{\xi}}}{(1-x_1/3)\tau_0}, \quad m=0 \quad (42)$$

где $\delta_{\pm} = \pm 1$. Используя далее квадратурную формулу (29) вместо (42) находим систему линейных дискретных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^m R_{\pm}^m = \tilde{R}_{1,\pm}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (43)$$

где величины ε_i^m и $\tilde{R}_{1,\pm}^m$ определяются следующим образом:

$$\varepsilon_i = \alpha_i \eta \left[1 + \frac{1-\delta}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right) \tau_0} \eta \right], \quad \tilde{R}_{1,\pm}^m = \frac{1}{2} \left[1 \mp e^{\frac{\tau_0}{\xi}} - (1-\delta) \xi \frac{1 - e^{-\frac{\tau_0}{\xi}}}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right) \tau_0} \right], \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (44)$$

Использование дополнительных интегральных соотношений (43) для устранения неединственности дискретных решений исходных систем уравнений (34) аналогично рассмотренному выше случаю $m \geq 1$ для $R_{+,i}^m$ и $R_{-,i}^m$.

6. Единая функция для фотометрических инвариантов коэффициентов яркости. Замечательная особенность фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ состоит в возможности построения на их основе новой конструкции классической теории многократного рассеяния света — единой фотометрической функции $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $m = 0, 1, \dots, M$ для коэффициентов диффузного отражения $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и пропускания $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$. Эта функция позволяет одновременно и независимо определять коэффициенты яркости плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$ из решения только одного (вместо двух) линейного или нелинейного интегрального уравнения, которому она удовлетворяет.

В [12] единая фотометрическая функция $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ была построена с помощью простых линейных преобразований известных структурных формул для азимутальных гармоник коэффициентов ярко-

сти $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$, определяемых функциями Амбарцумяна [4]. Используя линейные интегральные уравнения (23) и определение единичных функций $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ согласно соотношениям:

$$\begin{aligned} E^m(\eta, \xi, \tau_0) &= (\eta + \xi)\rho^m(\eta, \xi, \tau_0) + (\eta - \xi)\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) = \\ &= \eta R_+^m(\eta, \xi, \tau_0) + \xi R_-^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [0, 1], \xi \in [0, 1], m = 0, 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (45)$$

получаем для них после несложных преобразований искомые линейные сингулярные интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} E^m(\eta, \xi, \tau_0) T^m(\eta) &= (\eta + \xi) A^m(\eta, -\xi) \rho_1^m(\eta, \xi, \tau_0) + (\xi - \eta) A^m(\eta, \xi) \sigma_1^m(\eta, \xi, \tau_0) - \\ &= \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 E^m(\eta'', \xi, \tau_0) A^m(\eta, \eta'') \frac{d\eta''}{\eta - \eta''} + \frac{\Lambda}{2} \eta e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_0^1 E^m(\eta'', \xi, \tau_0) A^m(\eta, -\eta'') \frac{d\eta''}{\eta + \eta''} + \\ &+ \frac{\Lambda}{2} \xi \int_0^1 \frac{\xi E^m(\eta'', \xi, \tau_0) - \eta'' E^m(\xi, \eta'', \tau_0)}{\xi^2 - \eta''^2} \left[A^m(\eta, \eta'') - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} A^m(\eta, -\eta'') \right] d\eta'', \\ \eta &\in [0, 1], \xi \in [0, 1], m = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (46)$$

Линейные интегральные уравнения (46) по своей структуре аналогичны уравнениям, рассмотренным выше для фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$. Они также могут быть решены после их регуляризации численным методом угловой дискретизации при сохранении всех указанных выше особенностей его реализации. В частности, при наличии у уравнений (35) характеристических корней k_m проблема неединственности численных решений интегральных уравнений (46) при $m = 0$ и $m \geq 1$ рассматривается отдельно на основе дополнительных интегральных соотношений, получение которых аналогично (37) и (43).

Располагая информацией об единой фотометрической функции $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $m = 0, 1, \dots, M$, которая является несимметричной функцией своих угловых переменных η и ξ , легко получить на основе (45) следующие выражения для величин ρ^m, σ^m, R_+^m и $R_-^m, m = 0, 1, \dots, M$:

$$\rho(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{E^m(\eta, \xi, \tau_0) + E^m(\xi, \eta, \tau_0)}{2(\eta + \xi)}, \quad \sigma(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{E^m(\eta, \xi, \tau_0) + E^m(\xi, \eta, \tau_0)}{2(\xi - \eta)}, \quad (47)$$

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\xi E^m(\eta, \xi, \tau_0) - \eta E^m(\xi, \eta, \tau_0)}{\xi^2 - \eta^2}, \quad R^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\eta E^m(\eta, \xi, \tau_0) + \xi E^m(\xi, \eta, \tau_0)}{\xi^2 - \eta^2}. \quad (48)$$

7. Результаты численного моделирования фотометрических инвариантов R_{\pm}^m и единой функции E^m . Совершенно очевидно, что для достижения высокой точности расчетов ($\geq 10^{-5} - 10^{-6}$) фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ по методу угловой дискретизации [13] или релаксационно-итерационным алгоритмам (метод Гаусса–Зайделя) [14] необходимым условием является быстрая сходимость дискретных решений системы уравнений (34) по сетке угловых переменных (η_i, ξ_k) и обеспечение их устойчивого поведения в случае увеличения числа узлов η_i и весов α_i в квадратурной формуле Гаусса (29) [15]. В этой связи важное значение приобретает учет знакопеременного характера осциллирующих ядерных функций $A^m(\eta, \xi)$, $m = 0, 1, \dots, M$ при $\eta \Rightarrow 1$ и $\xi \Rightarrow 1$. Кроме того, важен учет у этих функций градиентных значений при $m \geq 0$ и необходимость определения в данном экстремальном случае корней k_m характеристического уравнения (35) для всех $m = 0, 1, \dots, M$. Наконец, в случае $m \leq 1$ следует принимать во внимание сложное поведение фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ при увеличении их номеров азимутальных гармоник ($m \gg 1$). Учет всех указанных факторов приводит к существенному увеличению числа узлов η_i квадратурной формулы Гаусса (29) на интервале $\eta_i \in [0, 1]$ от нескольких десятков до сотен, особенно в случае сильно вытянутых аэрозольных индикатрис рассеяния $x(\cos\gamma)$. В свою очередь, это обуславливает значительное увеличение ранга N исходных дискретных систем линейных алгебраических уравнений (34), уменьшая устойчивость и скорость сходимости их численных решений. С целью избежать негативного влияния указанных факторов в дальнейшем вместо

первоначальных фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ будем использовать их модифицированную форму с более плавно меняющейся угловой зависимостью от (η, ξ) согласно соотношению:

$$\tilde{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \left[R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) - R_{1,\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) \right] (\eta + \xi), \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (49)$$

Разумеется, соответственно новой структуре (49) очевидным образом меняются и дополнительные интегральные соотношения (36) и (42) в применяемой выше вычислительной схеме.

Для получения численных решений линейных интегральных уравнений (27-28) и (46) необходимо задать репрезентативные модели оптических параметров плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$. Ниже для расчетов функций $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ была выбрана замкнутая в оптическом смысле аэрозольная модель земной атмосферы Элтермана, соответствующая в интервале длин волн $\lambda = 400\text{--}800$ нм метеорологической дальности видимости $V = 25$ км. Для последующего численного радиационного моделирования использовались также адекватные этой аэрозольной модели индикатрисы рассеяния Хеньи — Гринштейна:

$$x(\cos \gamma) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \gamma)^{3/2}}, \quad |g| \leq 1 \quad (50)$$

и аппроксимирующие их (после использования соотношений подобия) трехчленные индикатрисы рассеяния:

$$x(\cos \gamma) = 1 + x_1 P_1(\cos \gamma) + x_2 P_2(\cos \gamma), \quad x_n = (2n+1)g^n \leq 2n+1, \quad n=0, 1, \dots, M. \quad (51)$$

На рисунке 3 представлена общая блок-схема численной реализации метода угловой дискретизации, использованная при нахождении фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ с учетом их модификации (49), а также при расчетах единой фотометрической функции

$E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ для системы «атмосфера — подстилающая поверхность» в видимой области спектра $\lambda = 400\text{--}800$ нм.

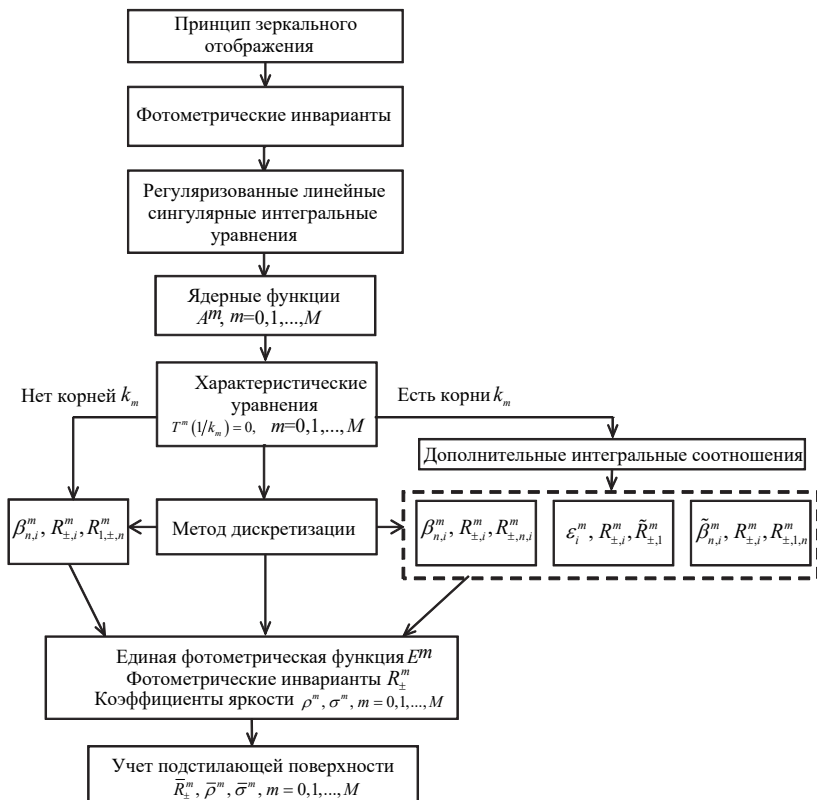


Рис. 3. Блок-схема численной реализации принципа зеркальной симметрии и метода угловой дискретизации

В реальном случае сильно вытянутых аэрозольных индикатрис рассеяния $x(\cos\gamma)$, когда $M \gg 1$, параметр $g \approx 0,8\text{--}0,9$ и необходимо учитывать для них большое число азимутальных гармоник ξ^m , ядерные функции $A^m(\eta, \xi)$, $m = 0, 1, \dots, M$ находились из точных линейных интегральных уравнений Фредгольма II рода [4]:

$$A^m(\eta, \xi) = \xi^m(\eta, \xi) - \frac{\Lambda}{2} \eta \int_{-1}^1 \frac{[\xi^m(\eta, \xi)(1-\eta^2)^{m/2} - \xi^m(\eta', \xi)(1-\eta'^2)^{m/2}] A^m(\eta', \xi)}{\eta - \eta'} \frac{d\eta'}{(1-\eta'^2)^{m/2}}. \quad (52)$$

Интегральные уравнения (52) решались численно методом угловой дискретизации согласно процедурам, изложенным выше при нахождении фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $m = 0, 1, \dots, M$. На рисунке 3 представлена блок-схема численной реализации принципа зеркальной симметрии и метода угловой дискретизации.

На рисунке 4 представлены значения функции $A^m(\eta, \xi)$ при $m = 0$ в зависимости от угловых переменных (η, ξ) для оптических параметров аэрозольной земной атмосферы $g = 0,850$ и $\Lambda = 0,918$. Осциллирующее поведение функции $A^0(\eta, \xi)$ вблизи $\eta \approx 1$ и $\xi \approx 1$ является характерным при выборе оптимального числа узлов η_i в квадратурной формуле (29), обеспечивающего заданную точность ($10^{-4} - 10^{-5}$) расчетов функций $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ для $m = 0, 1, \dots, M$.

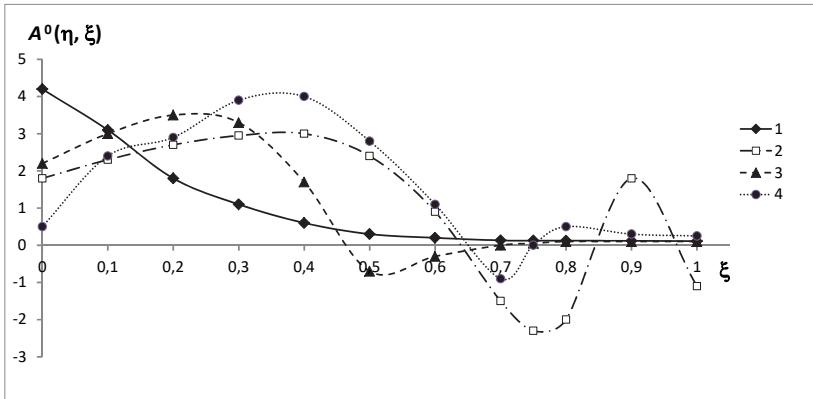


Рис. 4. Значения ядерной функции $A^0(\eta, \xi)$ в зависимости от угловых переменных (η, ξ) для $g = 0,850$ и $\Lambda = 0,918$: 1 - $\eta = 0,2$; 2 - $\eta = 0,5$; 3 - $\eta = 1$; 4 - $\eta = 0,8$

Располагая данными о функциях $A^m(\eta, \xi)$, $m = 0, 1, \dots, M$, в случае сильно вытянутых аэрозольных индикатрис рассеяния $x(\cos\gamma)$ были рассчитаны характеристические корни k_m согласно алгоритму,

указанному в [11]. В таблице 1 представлены их значения, соответствующие оптическим параметрам аэрозольной земной атмосферы $g = 0,850$ и $\Lambda = 0,918$.

Таблица 1. Характеристические корни k_m для оптических параметров $g = 0,850$, $\Lambda = 0,918$ и $m = 0, 1, 2$

Номер азимутальной гармоники	0	1	$m \geq 2$
Характеристические корни k_m	0,3495 0,9953	0,9641	-

Согласно классическим рекомендациям [4] при наличии нескольких характеристических корней k_m , например, из таблицы 1 следует, что их два, для устранения неединственности решений уравнений (31) необходимо использовать дополнительные соотношения (36) или (42) для их наименьших значений.

В таблицах 2 и 3 представлены значения фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и единой функции $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$, рассчитанные по методу угловой дискретизации при использовании модифицированной формы $\tilde{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ для $m = 0, 1, 2$ и значений оптических параметров аэрозольной атмосферы $x_1 = 1,475$, $x_2 = 1,524$, $\Lambda = 0,907$ и $\tau_0 = 0,334$ в видимой области спектра $\lambda = 400\text{--}800$ нм. При построении данных таблицы 2 использовалась возможность их компактного представления на основе угловой перестановочной симметрии инвариантов для $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ согласно (12): в ее верхней диагональной части указаны значения $R_{+}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, а в нижней — значения $R_{-}^m(\eta, \xi, \tau_0)$. Для числовых данных, представленных по диагонали в виде дробей, числитель соответствует значениям $R_{+}^m(\eta, \eta, \tau_0)$, а знаменатель — значениям $R_{-}^m(\eta, \eta, \tau_0)$.

Для обеспечения сходимости полученных численных решений по угловой сетке переменных (η_i, ξ_k) и достижения их устойчивости в пределах заданной точности ($10^{-4}\text{--}10^{-5}$) число узлов N квадратурной формулы (29) варьировалось согласно условию $50 \leq N \leq 200$. Для числовых данных, представленных в таблицах 2 и 3, оптимальное число узлов согласно данным таблицы 4 составляет $N \approx 30\text{--}40$.

Таблица 2. Численные значения фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$

$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $m = 0, 1, 2$	$R_{\pm}^0(\eta, \xi, \tau_0)$			$R_{\pm}^1(\eta, \xi, \tau_0)$			$R_{\pm}^2(\eta, \xi, \tau_0)$		
	$\xi \backslash \eta$	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5
0,1	<u>2,6859</u> 1,4265	1,1019	0,3708	<u>1,2098</u> 0,7080	0,5075	0,1640	<u>0,8463</u> 0,5483	0,3069	0,0499
0,5	0,0679	<u>0,5501</u> -0,1307	0,2832	-0,0003	<u>0,2376</u> -0,1492	0,0771	0,0529	<u>0,1248</u> 0,0052	0,0204
0,9	-0,0714	-0,1644	<u>0,3045</u> -0,1899	-0,0381	-0,0908	<u>0,0251</u> -0,0533	0,0096	0,0004	<u>0,0033</u> 0,0001

Таблица 3. Численные значения единой фотометрической функции

$$E^m(\eta, \xi, \tau_0), m = 0, 1, 2$$

$E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ $m = 0, 1, 2$	$E^0(\eta, \xi, \tau_0)$		$E^1(\eta, \xi, \tau_0)$		$E^2(\eta, \xi, \tau_0)$	
	$\xi \backslash \eta$	0,1	0,9	0,1	0,9	0,1
0,1	0,41124	-0,02712	0,19178	-0,01604	0,13946	0,00940
0,5	0,55774	-0,00636	0,25372	-0,04272	0,15874	0,01560
0,9	0,32658	0,10314	0,14426	-0,02540	0,04540	0,00306

Таблица 4. Сходимость численных решений $R_{\pm, N}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $m = 0, 1, 2$ в зависимости от числа узлов N дискретизации и угла визирования η : $\xi = 0,1$, $\Lambda = 0,907$, $x_1 = 1,475$, $x_2 = 1,524$, $\tau_0 = 0,334$

$R_{\pm, N}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ $m = 0, 1, 2$	$R_{\pm, N}^0(\eta, 0, 1, \tau_0)$		$R_{\pm, N}^1(\eta, 0, 1, \tau_0)$		$R_{\pm, N}^2(\eta, 0, 1, \tau_0)$		Среднее время расчетов
	$N \backslash \eta$	0,1	0,9	0,1	0,9	0,1	
20	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3716</u> -0,0715	<u>1,2214</u> 0,7078	<u>0,1683</u> -0,0344	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	6 сек
30	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3709</u> -0,0715	<u>1,2109</u> 0,7078	<u>0,1657</u> -0,0339	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	11 сек
40	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3709</u> -0,0715	<u>1,2098</u> 0,7079	<u>0,1640</u> -0,0334	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	17 сек
50	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3708</u> -0,0715	<u>1,2098</u> 0,7080	<u>0,1640</u> -0,0334	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	24 сек
точные решения	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3708</u> -0,0715	<u>1,2098</u> 0,7080	<u>0,1640</u> -0,0334	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	~20 мин

Числовые данные таблицы 4 представлены в виде дробей, в числителе которых указаны значения R_+^m , а в знаменателе — значения R_-^m для $m = 0, 1, 2$. Точные решения, приведенные в этой таблице, получены на основе результатов [5].

Таблица 5. Устойчивость численных решений $R_+^m(\eta, \xi, \tau_0)$ в зависимости от уровня возмущения δ_* оптических параметров: $\xi = 0,1$, $\Lambda = 0,907$, $x_1 = 1,475$, $x_2 = 1,524$, $\tau_0 = 0,334$

$R_+^m(\eta, \xi, \tau_0)$ $m=0,1,2$	$R_+^0(\eta, 0, 1, \tau_0)$			$R_+^1(\eta, 0, 1, \tau_0)$			$R_+^2(\eta, 0, 1, \tau_0)$		
δ η	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
0	2,6859	1,1019	0,3708	1,2098	0,5075	0,1640	0,8463	0,3069	0,0499
1	2,6501	1,0909	0,3708	1,1832	0,5075	0,1601	0,8340	0,3069	0,0499
5	2,4945	1,0130	0,3719	1,0970	0,4675	0,1412	0,7817	0,2771	0,0437
10	2,2683	0,8916	0,3856	0,9875	0,4006	0,1215	0,6833	0,2411	0,0385

Данные таблицы 5 иллюстрируют уровень устойчивости численных решений $R_+^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $m = 0, 1, 2$ в зависимости от уровня возмущения δ_* (%) оптических параметров среды: $\tilde{\Lambda} \Rightarrow \Lambda + \delta_* \Lambda$, $\tilde{x}_1 \Rightarrow x_1 + \delta_* x_1$, $\tilde{x}_2 \Rightarrow x_2 + \delta_* x_2$, $\tilde{\tau}_0 \Rightarrow \tau_0 + \delta_* \tau_0$.

8. Учет подстилающей поверхности на уровне нижней границы плоского однородного слоя. Ниже представлено аналитическое решение важной прикладной задачи, связанной с расчетом азимутальных гармоник фотометрических инвариантов $\bar{R}_\pm^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $m = 0, 1, \dots, M$ при наличии подстилающей поверхности, расположенной на уровне нижней границы ($\tau = \tau_0$) плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$. В этом случае решение указанной проблемы основывается на использовании классических систем точных линейных интегральных уравнений Фредгольма II рода, полученных для составляющих функции $\bar{R}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, а именно азимутальных гармоник коэффициентов яркости $\bar{\rho}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и $\bar{\sigma}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ при наличии горизонтально-однородного отражающего дна в несимметризованной теории переноса излучения [4]. Вводя соответствующие фотометрические инварианты $\bar{R}_\pm^m(\eta, \xi, \tau_0)$ согласно определению:

$$\bar{R}_\pm^m(\eta, \xi, \tau_0) = \bar{\rho}^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \bar{\sigma}^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (53)$$

получаем для их нахождения вместо систем линейных интегральных уравнений отдельные линейные интегральные уравнения Фредгольма II рода:

$$\bar{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) = R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) + \bar{\beta}^m(\eta, \xi, \tau_0) e^{\frac{\tau_0}{n}} + 2 \int_0^1 R_{\pm}^m(\eta, \eta', \tau_0) \bar{\beta}^m(\eta', \xi, \tau_0) \eta' d\eta', \quad (54)$$

$$\eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau < \infty, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Азимутальные гармоники коэффициента отражения $\bar{\beta}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ неортоотропной подстилающей поверхности определяются в (54) согласно точному соотношению:

$$S_{\xi} \bar{\beta}^m(\eta, \xi, \tau_0) = I_{\text{пов}}^m(-\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta > 0, \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau_0 < \infty, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (55)$$

где функции $I_{\text{пов}}^m(-\eta, \xi, \tau_0)$ являются азимутальными гармониками яркости горизонтально-однородного отражающего дна для произвольного закона отражения $Y^m(\eta, \eta')$ и считаются заданными. Таким образом, численные значения искомым величин $\bar{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ находятся из уравнений (54-55) простым интегрированием по текущему углу $\theta' = \arccos \eta'$ в случае произвольно заданного закона отражения $Y^m(\eta, \eta')$, $m = 0, 1, \dots, M$ для горизонтально-однородной подстилающей поверхности и заранее рассчитанных фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $m = 0, 1, \dots, M$ при ее отсутствии ($Y^m \equiv 0$). Отметим, что численные расчеты величин $\bar{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$, проведенные по формулам (54-55) для различных функций отражения $Y^m(\eta, \eta')$, показали существенное влияние степени неортоотропности горизонтально-однородной подстилающей поверхности по сравнению с ее ортоотропной моделью [16].

9. Заключение. Проведенное на основе решений линейных сингулярных интегральных уравнений и принципа зеркального отображения определение фотометрических инвариантов коэффициентов яркости плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$, ограниченного снизу произвольным горизонтально-однородным отражающим дном, показали эффективность применения метода угловой дискретизации в задачах численного моделирования внешних полей из-

лучения системы «атмосфера — подстилающая поверхность». В частном случае полубесконечной среды $\tau_0 = \infty$ обоснование подобного подхода ранее было детально рассмотрено в [11]. Отметим также, что проведенный выше анализ в силу линейности используемых базовых интегральных уравнений может быть обобщен на случай внутренних полей скалярного и поляризованного излучения при учете многократного анизотропного рассеяния фотонов и их отражения от произвольной горизонтально-однородной подстилающей поверхности. При этом использование модифицированных Фурье-разложений индикатрис рассеяния $\chi(\cos\gamma)$ и интенсивностей излучения $I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ [17–19] совместно с усовершенствованными вариантами многосеточных релаксационно-итерационных алгоритмов [20–22] позволяет ускорить сходимость дискретных решений соответствующих линейных алгебраических систем высокого ранга ($N \gg 1$) и одновременно повысить их устойчивость в задачах численного моделирования полей излучения природных сред.

Литература

1. Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2005. 664 с.
2. Smokty O.I. Development of radiative transfer theory methods on the base of mirror symmetry principle // Proc. of IRS'2000, Current Problems in Atmospheric Radiation IRS'2000. Hampton. USA. A. Deepak Publ. Co. 2001. pp. 341–344.
3. Chandrasekhar S. Radiative transfer // Oxford: Oxford Univ. Press. 1950. 394 p.
4. Sobolev V.V. Light scattering in planetary atmosphere // Oxford: Pergamon Press. 1975. 254 p.
5. van de Hulst H.G. Multiple light scattering: Tables, Formulas and Applications // New York, Academic Press. 1980. 739 p.
6. Смоктий О.И. Общий принцип зеркальной симметрии и инвариантные свойства полей поляризованного излучения природных сред // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Том 2. С. 333–340.
7. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих средах. Стандартные методы расчета / Под ред. Ж. Ленобль // Л.: Гидрометеиздат. 1990. 264 с.
8. Smokty O.I. Improvements of methods of radiation fields numerical modeling on the basis of mirror reflection principle // Proc. of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'13). Berlin. Springer. 2013. pp. 1–17.
9. Jeong U., Kim J. Development of the MATALB version of DISORT for atmospheric research purposes // Proc. of IRS'2012, Current Problems in Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 215–219.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы // М.: БИНОМ. 2004. 636 с.
11. Смоктий О.И., Аниконов А.С. Рассеяние света в средах большой оптической толщины // СПб.: Наука. 2008. 440 с.
12. Smokty O.I. Analytical spatial-angular structure of uniform slab radiation field for strongly elongated phase functions // Proc. of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'2016). Berlin. Springer. 2016. pp. 110–128.

13. *Hamre B., Stamnes S., Stamnes K., Stamnes J.J.* C-DISORT: A versatile tool for radiative transfer in coupled media like the atmosphere-ocean system // Proc. of IRS'2012, Current Problems in Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 926–926.
14. *Yuan J.Y., Zontini D.D.* Comparison theorems of preconditioned Gauss–Seidel methods for M-matrices // Applied Mathematics and Computation. 2012. vol. 219. pp. 1947–1957.
15. *Doicu A., Efremenko D., Loyola D.* Acceleration of the discrete ordinates method for nadir viewing geometries // Proc. of IRS'2012, Current Problems in Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 81–85.
16. *Смоктый О.И.* Теория образования слабых спектральных линий в атмосфере, ограниченной снизу горизонтально-однородной подстилающей поверхностью // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. №5. Том 51. С. 550–561.
17. *Olver S.* On the convergence rate of a modified Fourier series // Mathematics of Computation. 2009. vol. 78. pp. 1629–1645.
18. *Adcock B.* Convergence acceleration of modified Fourier series in one or more dimensions // Mathematics of Computation. 2011. vol. 80. pp. 225–261.
19. *Li W.* Alternative Fourier series expansions with accelerated convergence // Applied Mathematics. 2016. vol. 7. no. 15. pp. 1824–1845.
20. *Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W.* Numerical Recipes. The art of Scientific Computing (Fortran Version) // Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1989. 702 p.
21. *Nazari A.M., Zia Borujeni S.* A modified precondition in the Gauss-Seidel method // Advances in Linear Algebra & Matrix Theory. 2012. vol. 2. no. 3. pp. 31–37.
22. *Ishida I.* Development of solution scheme applying the multigrid method for three-dimensional radiative transfer // Proc. IRS'2012, Current Problems of Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 220–224.

Смоктый Олег Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, академик Международной Академии Астронавтики (Франция), главный научный сотрудник лаборатории прикладной информатики и проблем информатизации общества, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: теория переноса излучения, моделирование полей излучения в задачах дистанционного зондирования Земли из космоса, космическая геоинформатика. Число научных публикаций — 280. soi@iias.spb.su; 14-я линия В.О., 39, Санкт-Петербург, 199178; р.т.: +7-(812)-328-44-50.

O.I. SMOKTY

NUMERICAL MODELING OF UNIFORM SLAB BRIGHTNESS COEFFICIENTS BASED ON THE MIRROR REFLECTION PRINCIPLE AND LINEAR SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS SOLUTIONS

Smokty O.I. Numerical Modeling of Uniform Slab Brightness Coefficients based on the Mirror Reflection Principle and Linear Singular Integral Equations Solutions.

Abstract. Based on the mirror reflection principle and solutions of modified linear singular integral equations, the numerical modeling of the unified exit function of the outside radiation field and photometrical invariants of brightness coefficients for a uniform slab of finite optical thickness has been carried out. The efficacy of applying the angular discretization method for problems of numerical modeling of outer radiation fields in the «atmosphere — underlying surface» system has been proved. This new approach allows generalizing the basic results in the particular case of a semi-infinite uniform slab. In this connection the main mathematical aspects and computational peculiarity of the numerical realization of the angular discretization method have been considered. Due to linearity of the used basic integral equations, the conducted analysis can be generalized to the case of scalar and polarized inner radiation fields taking into account the multiple anisotropic scattering of photons and their reflection from an arbitrary horizontally uniform underlying surface.

Keywords: mirror reflection principle, uniform slab, brightness coefficients, photometrical invariants, unified exit function, main boundary problem, linear singular integral equations, regularization, numerical modeling, discretization method, characteristic roots, reflecting underlying surface.

Smokty Oleg Ivanovich — Ph.D., Dr. Sci., professor, Honored Scientist of Russian Federation, Full Member of the International Academy of Astronautics (France), chief researcher at the Laboratory of Applied Informatics and Problems of Society Informatization, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: radiative transfer theory, radiation field modeling in problems of the earth remote sensing from space, geoinformatics. The number of publications — 280. soi@iiias.spb.su; 39,14th Line VO, 199178 St. Petersburg, Russia; office phone: +7-(812)-328-44-50.

References

1. Sushkevich T.A. *Matematicheskie modeli perenosa izlucheniya* [Mathematical models of radiation transfer]. Moscow: BINOM. Laboratorija znanii. 2005. 664 p. (In Russ.).
2. Smokty O.I. Development of radiative transfer theory methods on the base of mirror symmetry principle. Proceedings of IRS'2000, Current Problems in Atmospheric Radiation IRS'2000. Hampton. USA. A. Deepak Publ. Co. 2001. pp. 341–344.
3. Chandrasekhar S. Radiative transfer. Oxford: Oxford Univ. Press. 1950. 394 p.
4. Sobolev V.V. Light scattering in planetary atmosphere. Oxford: Pergamon Press. 1975. 254 p.
5. van de Hulst H.G. Multiple light scattering: Tables, Formulas and Applications. New York, Academic Press. 1980. 739 p.
6. Smokty O.I. [General mirror symmetry principle and invariant's properties of environment polarimetric radiation fields]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2005. vol. 2(34). pp. 333–340. (In Russ.).

7. *Perenos radiacii v rasseivajushhii i pogloshhajushhii sredah. Standartnye metody rascheta. Pod red. Zh. Lenobl'* [Radiative transfer in scattering and absorbing atmospheres: Standard computational procedures. Edited by Lenoble J.]. L.: Gidrometeoizdat. 1990. 264 p. (In Russ.).
8. Smokty O.I. Improvements of methods of radiation fields numerical modeling on the basis of mirror reflection principle. Proceedings of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'13). Berlin. Springer. 2013. pp. 1–17.
9. Jeong U., Kim J. Development of the MATABL version of DISORT for atmospheric research purposes. Proceedings of IRS'2012, Current Problems in Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 215–219.
10. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow: BINOM. Laboratorija znanii. 2004. 636 p. (In Russ.).
11. Smokty O.I., Anikonov A.S. *Rassejanie sveta v sredah bol'shoj opticheskoi tolshhiny* [Light Scattering in Media with Large Optical Depth]. St. Petersburg: Nauka. 2008. 440 p. (In Russ.).
12. Smokty O.I. Analytical spatial-angular structure of uniform slab radiation field for strongly elongated phase functions. Proceedings of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'2016). Berlin. Springer. 2016. pp. 110–128.
13. Hamre B., Stamnes S., Stamnes K., Stamnes J.J. C-DISORT: A versatile tool for radiative transfer in coupled media like the atmosphere-ocean system. Proceedings of Current Problems in Atmospheric Radiation (IRS'2012). American Institute of Physics. 2013. pp. 926–926.
14. Yuan J.Y., Zontini D.D. Comparison theorems of preconditioned Gauss–Seidel methods for M-matrices. *Applied Mathematics and Computation*. 2012. vol. 219. pp. 1947–1957.
15. Doicu A., Efremenko D., Loyola D. Acceleration of the discrete ordinates method for nadir viewing geometries. Proceedings of Current Problems in Atmospheric Radiation (IRS'2012). American Institute of Physics. 2013. pp. 81–85.
16. Smokty O.I. [Theory of weak spectral lines formation in an atmosphere bounded from below by a horizontally homogeneous underlying surface]. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii nauk, Fizika atmosfery i okeana – Izvestiya, Atmospheric and oceanic physics*. 2015. vol. 5. pp. 550–561. (In Russ.).
17. Olver S. On the convergence rate of a modified Fourier series. *Mathematics of Computation*. 2009. vol. 78. pp. 1629–1645.
18. Adcock B. Convergence acceleration of modified Fourier series in one or more dimensions. *Mathematics of Computation*. 2011. vol. 80. pp. 225–261.
19. Li W. Alternative Fourier series expansions with accelerated convergence. *Applied Mathematics*. 2016. vol. 7. no. 15. pp. 1824–1845.
20. Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W. Numerical Recipes. The art of Scientific Computing (Fortran Version). Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1989. 702 p.
21. Nazari A.M., Zia Borujeni S. A modified precondition in the Gauss-Seidel method. *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*. 2012. vol. 2. no. 3. pp. 31–37.
22. Ishida I. Development of solution scheme applying the multigrad method for three-dimensional radiative transfer. Proceedings of IRS'2012, Current Problems of Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 220–224.