

И.С. Полянский  
**ВЕКТОРНЫЙ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

---

*Полянский И. С.* **Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике.**

**Аннотация.** В статье разработан векторный барицентрический метод, предлагаемый для решения внутренней задачи электродинамики — решение уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в ограниченной расчетной области с заданными граничными условиями. Разработанный метод относится к методам прямого решения краевых и начально-краевых задач математической физики, основой для формирования которых служат результаты, полученные В. Ритцем, И.Г. Бубновым и Б.Г. Галеркиным. Основная идея метода заключается в обобщении процедуры аппроксимации векторного потенциала, реализуемой полиномами лагранжевого типа. Аппроксимирующий полином формируется в барицентрической системе координат для всей области анализа в целом без ее разбиения на элементарные подобласти. Предполагается, что область анализа является областью с кусочно-линейной границей, а размерность барицентрической системы координат определяется числом вершин анализируемой области. С учетом ряда особенностей реализация векторного барицентрического метода выполнена как в частотной, так и во временной областях. Рассмотрено решение задачи управления электромагнитным полем в приближении векторного барицентрического метода.

**Ключевые слова:** векторный барицентрический метод, барицентрические координаты, векторный потенциал, уравнение Гельмгольца.

---

**1. Введение.** В условиях бурного развития производительности современных средств вычислительной техники и систем автоматизированного проектирования актуален вопрос, связанный с разработкой эффективных методов математического моделирования СВЧ структур, экспериментальное исследование электромагнитного поля (ЭМП) которых является весьма сложной и дорогостоящей процедурой.

Известные научные труды [1-5] освящают отдельные результаты в указанной области, выполняя исследование СВЧ структур прямыми (метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод матрицы линий передачи), непрямыми (метод моментов) и асимптотическими (методы физической оптики, геометрической теории дифракции и пр.) методами решения краевых задач электродинамики. Отличительной и наиболее привлекательной чертой прямых методов является их универсальность — возможность анализировать практически любую структуру. В связи с привлекательностью относительно указанной универсальности среди прямых методов в большинстве современных САПР моделирования высокочастотных электромагнитных полей (Ansis-Ansoft HFSS, CST Microwave Studio Suite, QWAVE QuickWave3D, Remcom XFDTD, EMSS-SA FEKO, Russian R&D Center

LG Electronics RFS и др. [6]) наибольшее распространение получил метод конечных элементов [1]. При этом платой за универсальность являются большие вычислительные и емкостные затраты. С точки зрения пользователя последнее приводит к существенному недостатку — необходимо больше времени для анализа [7]. Это обусловлено тем, что все прямые методы так или иначе связаны с разбиением области анализа или некоторой проводящей поверхности на большое число одинаковых подобластей простой формы. Подобный недостаток в ряде случаев затрудняет решение задач, связанных с проектированием СВЧ структур.

Для устранения указанного недостатка и в дополнение к прямым методам вычислительной электродинамики в работе [8] предложен барицентрический метод для решения скалярных волновых уравнений. Как известно, большинство задач электродинамики допускают решение волновых уравнения относительно оценки распределения в области анализа  $\Omega$  продольных составляющих напряженностей электрического  $\dot{E}_z$  и магнитного  $\dot{H}_z$  полей [3]. При этом поперечные составляющие ЭМП  $\dot{E}_x, \dot{E}_y$  и  $\dot{H}_x, \dot{H}_y$  могут быть выражены через  $\dot{E}_z$  и  $\dot{H}_z$ . Однако в ряде случаев возникает потребность в непосредственном расчете распределения векторного ЭМП в  $\Omega$ . Подобный расчет предполагает решение векторных волновых уравнений. Необходимость векторного решения связана с заданием требуемых граничных условий [1], когда, например, обеспечение непрерывности тангенциальных составляющих ЭМП на границе раздела разнородных сред невозможно по одной лишь продольной компоненте.

Цель статьи заключается в разработке векторного барицентрического метода (ВБМ) в дополнение к прямым методам решения внутренних задач электродинамики.

## 2. Векторный барицентрический метод в частотной области.

Рассмотрим численное решение ВБМ однородного векторного уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = \vec{0}, \quad (1)$$

в области анализа  $\Omega$ , заданной последовательность неповторяющихся вершин  $P_1, P_2, \dots, P_N$  и ограниченной ломаной  $\Gamma$ .

В выражении (1)  $k$  — волновое число в среде распространения;  $\vec{A}$  — векторный потенциал, задающий значения или векторов

напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного полей  $\vec{H}$  в зависимости от заданных граничных условий, или вектор Герца [1].

Решение задачи (1) выполняется в соответствии с принципом минимума потенциала запасенной энергии:

$$F(\vec{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{A}) - k^2 (\vec{A} \cdot \vec{A}) d\Omega \rightarrow \min. \quad (2)$$

Суть ВБМ заключается в задании векторного аппроксимирующего полинома для всей области анализа  $\Omega$  в целом без ее разбиения на элементарные подобласти. Аппроксимирующий полином формируется в  $N$ -мерной барицентрической системе координат  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ , которая для  $\Omega$  вводится по правилам [15] и применяется в качестве аппроксимации Ритца для сведения (2) к системе линейных уравнений.

*Теорема 1.* Функция  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$ , задающая

аппроксимацию порядка  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) потенциала  $\vec{A}$  в векторном уравнении Гельмгольца (1), при

$$\vec{\beta}_i(P) = \sum_{\substack{j=1 \\ i_j > 0}}^N \hat{\alpha}_i^j(P) \vec{\Theta}_j(P), \quad (3)$$

является аппроксимацией Ритца.

В аппроксимации  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$   $A_i$  —

аппроксимационные коэффициенты в  $i$ -х узловых точках при аппроксимации векторного потенциала  $\vec{A}(P)$  для  $P \in \Omega$ .

В выражении (3)  $\hat{\alpha}_i^j(P)$  — вспомогательный интерполяционный сдвинутый полином Сильвестра–Лагранжа [10] относительно  $j$ -ой вершины  $\Omega$ , заданный через сдвинутые полиномы Лагранжа  $\hat{R}_{i_k}(P)$ :

$$\hat{\alpha}_i^j(P) = \hat{R}_{i_j}(P) \prod_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^N R_{i_{j'}}(P);$$

$$\hat{R}_{i_j}(P) = \begin{cases} \frac{1}{(i_j - 1)!} \prod_{h=1}^{i_j-1} (m\zeta_j(P) - h), & \text{if } 2 \leq i_j \leq m; \\ 1, & \text{if } i_j = 1. \end{cases} \quad (4)$$

$\bar{\Theta}_j(P)$  — краевые базисные векторные функции Неделека относительно  $j$ -ой вершины  $\Omega$ , задаваемые через дифференциальные формы Уитни [11]:

$$\bar{\Theta}_j(P) = (\zeta_j(P) \nabla \zeta_{j+1}(P) - \zeta_{j+1}(P) \nabla \zeta_j(P)) |P_{j+1} - P_j|; \quad (5)$$

$i$  — мультииндекс из множества  $M_m$  [9]:

$$M_m = \left\{ i = (i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_N) : i_j \in \mathbb{Z}, i_j \geq 0, \sum_{j \in [1; N]} i_j = m \right\}. \quad (6)$$

В выражении (4)  $R_{i_{j'}}(P) = \prod_{k=1}^{i_{j'}} [(m\zeta_{j'}(P) - k + 1)/k]$  при  $i_{j'} > 0$ ,

$R_0(P) = 1$  — полином Лагранжа [3, 8].

*Доказательство.* Из [1, 10-14] известно, что векторные функции (5) для симплекса являются краевыми базисными функциями. Из свойств гармонических барицентрических координат (БК) [15] следует, что векторные функции (5) для произвольного многоугольника  $\Omega$  являются краевыми базисными функциями.

Предположим, что в  $\Omega$  для барицентрической системы координат в точках  $\zeta_j^h = h/m$  ( $h = \overline{1, m}$ ), расположенных на расстоянии  $1/m$ , определены значения некоторого скалярного потенциала  $\Phi_i$ . Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа, задающий аппроксимацию этого потенциала  $\Phi(P)$  в  $P \in \Omega$ , будет определен суммой  $\Phi(P) = \sum_{i \in M_m} \Phi_i \alpha_i(P)$ , где  $\alpha_i(P)$  — базисный полином:

$$\alpha_i(P) = \prod_{h_1=0}^{i_1-1} \prod_{h_2=0}^{i_2-1} \dots \prod_{h_N=0}^{i_N-1} \left[ \frac{\zeta_1(P) - \zeta_1^{h_1}}{\zeta_1^{i_1} - \zeta_1^{h_1}} \cdot \frac{\zeta_2(P) - \zeta_2^{h_2}}{\zeta_2^{i_2} - \zeta_2^{h_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\zeta_N(P) - \zeta_N^{h_N}}{\zeta_N^{i_N} - \zeta_N^{h_N}} \right] \quad (7)$$

при этом, если  $i_j - 1 < 0$ , то сомножителем под знаком произведения является 1.

Представим  $\alpha_i(P)$  соотношением:

$$\alpha_i(P) = \prod_{j=1}^N R_{i_j}(P); \quad R_{i_j}(P) = \prod_{h=0}^{i_j-1} \frac{\zeta_j(P) - \zeta_j^h}{\zeta_j^{i_j} - \zeta_j^h}. \quad (8)$$

Учитывая, что  $\zeta_j^h = h/m$ , преобразуем  $R_{i_j}(P)$  к виду:

$$R_{i_j}(P) = \prod_{h=0}^{i_j-1} \frac{\zeta_j(P) - h/m}{i_j/m - h/m} = \prod_{h=1}^{i_j} \frac{m\zeta_j(P) - h + 1}{h}. \quad (9)$$

Предположим, что  $\alpha_i(P)$  гармоническая функция, тогда по теореме о среднем справедливо тождество:

$$\prod_{j=1}^N R_{i_j}(P) = \prod_{j=1}^N \left[ \frac{1}{|B_P^r|} \int_{\partial B_P^r} R_{i_j}(\zeta') dS(\zeta') \right], \quad (10)$$

которое выполняется при:

$$R_{i_j}(P) = \frac{1}{|B_P^r|} \int_{\partial B_P^r} R_{i_j}(\zeta') dS(\zeta'). \quad (11)$$

Справедливость (11) с учетом (9) следует из равенства:

$$\frac{m}{h} \zeta_j(P) - 1 + \frac{1}{h} = \frac{1}{|B_P^r|} \int_{\partial B_P^r} \left( \frac{m}{h} \zeta_j(\zeta') - 1 + \frac{1}{h} \right) dS(\zeta'). \quad (12)$$

Выражение (12) при применении нетрудных преобразований определяет требование того, что БК  $\zeta_j(P)$  гармонические, что соответствует [15]. Следовательно, исходное предположение и

тождества (10) верно и функция  $\Phi(P) = \sum_{i \in M_m} \Phi_i \alpha_i(P)$  гармоническая и для заданного порядка  $m$  базисного полинома  $\alpha_i(P)$  является аппроксимацией Рунта в  $\Omega$ .

С учетом определения в [10] предела  $\lim_{i_j \rightarrow 0} \hat{R}_{i_j}(P)/i_j = (m\zeta_j)^{-1}$  от сдвинутого полинома Лагранжа и выявленных свойств интерполяционной формы  $\alpha_i(P)$  для гармонических БК определим расширение краевых базисных функций  $\bar{\Theta}_j(P)$  для узловых точек, расположенных на ребре  $e_j = (P_j, P_{j+1})$  области  $\Omega$ , соотношением:

$$\bar{\beta}_i(P) = \sum_{\substack{j=1 \\ i_j > 0}}^N \hat{\alpha}_i^j(P) \bar{\Theta}_j(P). \quad (13)$$

Заметим, что с учетом свойств БК [15] интерполяционной формы  $\alpha_i(P)$  и функции (5) для  $j$ -го ребра следует:

$$\frac{P_{j+1} - P_j}{|P_{j+1} - P_j|} \cdot \sum_{\substack{i \in M_m \\ i_j \neq 0}} \bar{\beta}_i(P) = 1; \quad (14)$$

$$\nabla \times \sum_{i \in M_m} \frac{\bar{\beta}'_i(P)}{J_i} = \sum_{j=1}^N (\nabla \zeta_j(P)) \times (\nabla \zeta_{j+1}(P)) = \text{const}; \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \sum_{i \in M_m} \frac{\bar{\beta}'_i(P)}{J_i} = 0, \quad (16)$$

где

$$\bar{\beta}'_i(P) = \sum_{\substack{j=1 \\ i_j > 0}}^N \hat{\alpha}_i^j(P) \frac{\bar{\Theta}_j(P)}{|P_{j+1} - P_j|}; \quad J_i = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{j=1}^N \frac{i_j}{m} P_j \in \Gamma; \\ N, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (17)$$

Тождества (14-16) обеспечивают отсутствие ложных решений [1] векторного уравнения Гельмгольца (1) при использовании

аппроксимации  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$ . Таким образом, для произвольной

узловой точки многоугольника  $\Omega$  справедливо расширение краевых базисных функций  $\vec{\Theta}_j(P)$  соотношением (3), что и требовалось доказать. ■

На рисунке 1 отражено графическое представление векторного поля, описываемого векторной базисной функцией  $\vec{\Theta}_1(P)$  внутри треугольника, квадрата и пятиугольника.

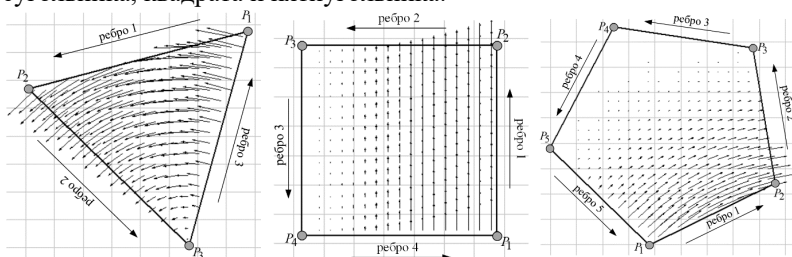


Рис. 1. Представление векторной базисной функции  $\vec{\Theta}_1(P)$  внутри треугольника, четырехугольника и пятиугольника

На рисунке 2 отражено графическое представление векторного поля, описываемого расширенными векторными базисными функциями  $\vec{\beta}_i(P)$  внутри пятиугольника для различных узловых точек при  $m = 2$ .

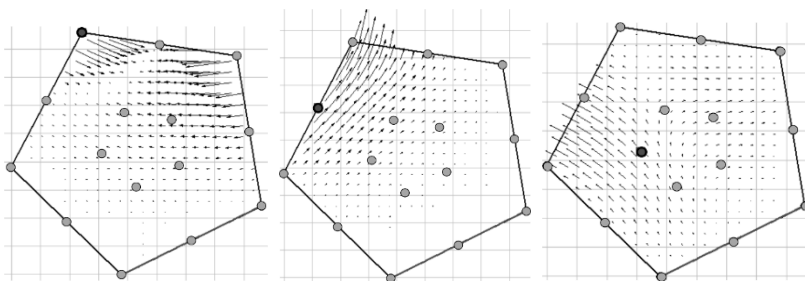


Рис. 2. Представление расширенных векторных базисных функций  $\vec{\beta}_i(P)$  внутри пятиугольника при  $m = 2$

Подстановка аппроксимации  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$  в

выражение (2) дает возможность получить новый функционал в матричной форме:

$$F(\vec{A}) = (\vec{A} \mathbf{S} \vec{A}^T - k^2 \vec{A} \mathbf{T} \vec{A}^T) / 2, \quad (18)$$

где  $\vec{A}$  — вектор коэффициентов разложения в аппроксимации  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$ ;  $\mathbf{S} = (s_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$ ,  $\mathbf{T} = (t_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$  — квадратные матрицы размерностью  $|M_m| \times |M_m|$ , элементы которых определяются соответствующими выражениями:

$$s_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{\beta}_i) \cdot (\nabla \times \vec{\beta}_j) d\Omega; \quad i, j \in M_m, \quad (19)$$

$$t_{i,j} = \int_{\Omega} \vec{\beta}_i \vec{\beta}_j d\Omega; \quad i, j \in M_m. \quad (20)$$

В выражениях (19), (20) значения  $\vec{\beta}_i$  для заданных координат точки  $P \in \Omega$  задаются соотношением (3).

Определение экстремума (2) выполняется сведением задачи (18) к системе линейных уравнений:

$$\mathbf{S} \vec{A} - k^2 \mathbf{T} \vec{A} = \vec{0}, \quad (21)$$

полученной путем дифференцирования  $\partial F(\vec{A}) / \partial A_i$ .

Решение системы уравнений (21) относительно  $\vec{A}$  определяет приближенное значение векторного потенциала в  $i$ -х узлах аппроксимации Рунца при сведении (21) к известной задаче на собственные числа и собственные векторы [3]:

$$\det(\mathbf{A} - k^2 \mathbf{E}) = 0; \quad (\mathbf{A} - k^2 \mathbf{E}) \vec{A} = \vec{0}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S}$ ;  $\mathbf{E}$  — единичная матрица размера  $|M_m| \times |M_m|$ .

**3. Векторный барицентрический метод во временной области.** Рассмотренное в предыдущем пункте решение уравнения



Гельмгольца (1) в приближении векторного барицентрического метода выполняет решение уравнений Максвелла в приближении метода комплексных амплитуд. Получаемые соотношения справедливы для ЭМП, подчиняющемуся гармонической зависимости от времени. В случае, когда, например, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сигнала источника возбуждения моделируемого СВЧ устройства отличается от монохроматического сигнала, оценка истинных составляющих ЭМП в частотной области может быть выполнена взвешенным суммированием составляющих напряженностей электрического и магнитного поля, рассчитанных на различных частотах [2]. Такой подход может быть не всегда удобен с точки зрения вычислительных затрат, особенно для широкополосных сигналов и сигналов с АЧХ сложной формы. Более того, такой подход затрудняет решение задач управления при оценке распределение мгновенных значений напряженностей электрического и магнитного поля в заданной области анализа в конкретный момент времени  $t$ . Оценка мгновенных составляющих ЭМП с учетом [1] может быть сведена к решению уравнения второго порядка, заданного для напряженности электрического поля  $\vec{E}$  относительно поля электрического типа:

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{E}) + \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_r \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \quad (23)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно;  $\sigma$  — электропроводимость;  $\vec{J}$  — плотность электрического тока.

Подставив в (23) аппроксимацию векторного потенциала вида  $\vec{E}(P, t) = \sum_{i \in M_m} A_i(t) \vec{\beta}_i(P)$ , где  $A_i(t)$  — значения коэффициентов разложения  $\vec{E}(P, t)$  в  $i$ -х узловых точках в момент времени  $t$ , сведем дифференциальное уравнение второго порядка к решению системы дифференциальных уравнений (СДУ), представленной в матричном виде:

$$\mathbf{S}\vec{A}(t) + \mathbf{U}\dot{\vec{A}}(t) + \mathbf{T}\ddot{\vec{A}}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (24)$$

где  $\mathbf{S} = (s_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$ ,  $\mathbf{U} = (u_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$ ,  $\mathbf{T} = (t_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$  — квадратные матрицы при:

$$s_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \times \bar{\gamma}_i) \cdot (\mu_r^{-1} \nabla \times \bar{\gamma}_j) d\Omega; \quad (25)$$

$$u_{i,j} = \mu_0 \int_{\Omega} \sigma \bar{\gamma}_i \cdot \bar{\gamma}_j d\Omega; \quad t_{i,j} = c^{-2} \int_{\Omega} \epsilon_r \bar{\gamma}_i \cdot \bar{\gamma}_j d\Omega.$$

$\mathbf{F}(t) = (\bar{f}(t)_i)_{|M_m|}$  — вектор-столбец при:

$$\bar{f}_i(t) = -\mu_0 v(t) \int_{\Omega} \bar{\gamma}_i \bar{J} d\Omega, \quad (26)$$

где  $v(t)$  — некоторая функция входного сигнала возбуждения при

представлении  $\frac{\partial \bar{J}(t)}{\partial t} = v(t) \bar{J}$ ;  $\bar{A}(t) = (A_i(t))_{|M_m|}$ ;  $\dot{\bar{A}}(t) = \left( \frac{\partial A_i(t)}{\partial t} \right)_{|M_m|}$ ;

$\ddot{\bar{A}}(t) = \left( \frac{\partial^2 A_i(t)}{\partial t^2} \right)_{|M_m|}$ ;  $t \in [t_0, t_1]$ ;  $[t_0, t_1]$  — отрезок времени анализа.

Сведем полученную систему (24) к СДУ первого порядка, введя дополнительные переменные  $\bar{Y}(t) = \dot{\bar{A}}(t)$ ;  $\dot{\bar{Y}}(t) = \ddot{\bar{A}}(t)$ , к виду:

$$\dot{\bar{Y}}(t) = \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{F}(t) - \mathbf{S}\bar{A}(t) - \mathbf{U}\bar{Y}(t)], \quad (27)$$

Решение задачи (27) предполагается выполнять численно с использованием современных методов разделения систем обыкновенных дифференциальных уравнений для построения экономичных явных схем типа Рунге — Кутты [16] для заданных начальных условиях  $\bar{A}(t_0) = \bar{A}_0^*$ .

В целом заданная постановка задачи (27) анализа ЭМП позволяет сформировать задачу оптимального управления ЭМП, например, в виде:

$$t_1 - t_0 \rightarrow \min; \quad \dot{\bar{Y}}(t) = \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{F}(v,t) - \mathbf{S}\bar{A}(t) - \mathbf{U}\bar{Y}(t)]; \quad (28)$$

$$\bar{Y}(t) = \dot{\bar{A}}(t); \quad \bar{A}(t_0) = \bar{A}_0^*; \quad \dot{\bar{A}}(t_0) = \dot{\bar{A}}_0^*; \quad \bar{A}(t_1) = \bar{A}_1^*,$$

где  $\bar{A}_i^* = (A_{i,i}^*)_{|M_m|}$  — требуемые значения векторного потенциала в узлах аппроксимации.

Решение задачи (28) выполним с учетом принципа максимума Понтрягина [17]. Функцию Гамильтона определим в виде:

$$H(\bar{Y}, v, \bar{\Psi}) = -\bar{\Psi}(t) \left\{ \mathbf{T}^{-1} \left[ \mathbf{F}(v, t) - \mathbf{S}\bar{A}(t) - \mathbf{U}\bar{Y}(t) \right] \right\}, \quad (29)$$

где  $\bar{\Psi}(t) = (\Psi_i(t))_{|M_m|}$  — вспомогательный вектор импульсов управления.

С учетом (28), (29) итоговая задача управления ЭМП сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Y}}(t) &= \mathbf{T}^{-1} \left[ \mathbf{F}(v, t) - \mathbf{S}\bar{A}(t) - \mathbf{U}\bar{Y}(t) \right] + \bar{\lambda}(t) \otimes (\bar{A}_1^* - \bar{A}(t)); \\ \bar{Y}(t) &= \dot{\bar{A}}(t); \quad \dot{\bar{\Psi}}(t) = (-\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})^T \bar{\Psi}(t), \end{aligned} \quad (30)$$

для заданных начальных условий  $\bar{A}(t_0) = \bar{A}_0^*$ ,  $\dot{\bar{A}}(t_0) = \dot{\bar{A}}_0^*$ .

В выражении (30)  $\dot{\bar{\Psi}}(t) = \left( \frac{\partial \Psi_i(t)}{\partial t} \right)_{|M_m|}$ ;  $\otimes$  — оператор поэлементного произведения векторов;  $\bar{\lambda}(t) = (\lambda_i(t))_{|M_m|}$  — вектор множителей Лагранжа.

**4. Результаты вычислительных экспериментов.** В качестве примера применения ВБМ в частотной области рассмотрим распределение составляющих напряженности электрического поля (рисунок 3а) и оценки критической частоты  $f_{кр}$  для основного типа волны ( $H_{10}$ ) в Н-волноводе с параметрами:  $l = 357,24$  мм,  $c = 134,06$  мм,  $a = 301,87$  мм,  $h = 321,51$  мм. Оценка точности ВБМ выполнена в сравнении с векторным методом конечных элементов (ВМКЭ) при определении зависимости ошибки нахождения  $f_{кр}$  от порядка аппроксимации  $m$ . Результат представлен на рисунке 3б.

Примеры распределения тангенциальной составляющей напряженности ЭМП для ТЕ типов волн в раскрыве прямоугольного волновода, полученные аналитическим решением [18], ВБМ, ВМКЭ представлены на рисунках 4 и 5.

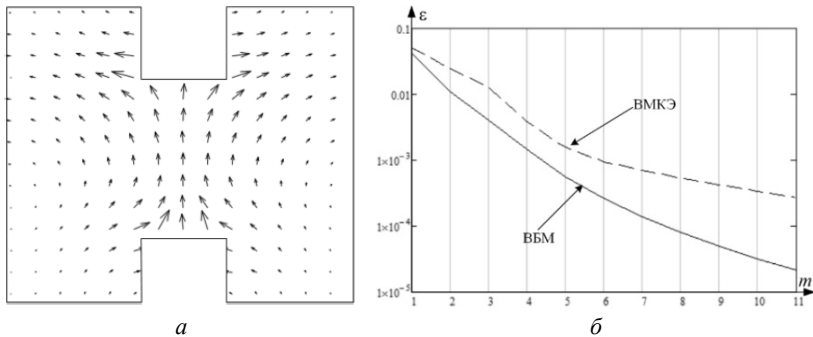


Рис. 3. Анализ электромагнитного поля в Н-волноводе:  $a$  — распределение волны  $H_{10}$ ;  $b$  — зависимость ошибки оценки  $f_{кр}$  от  $m$

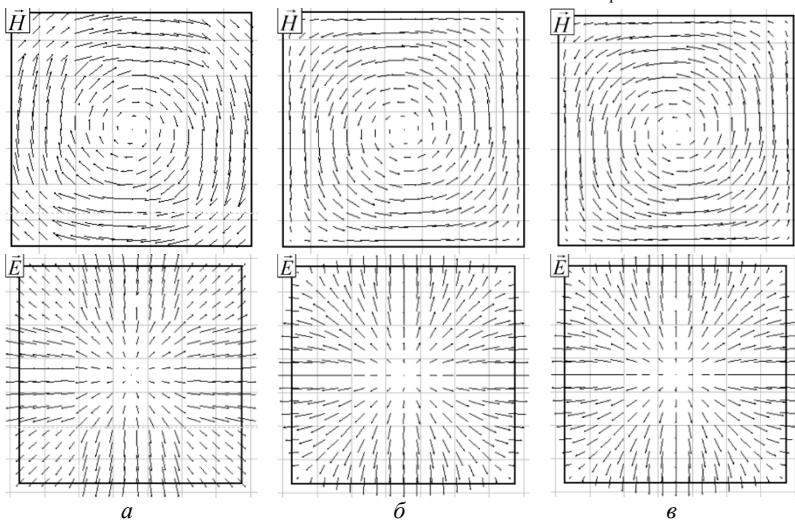
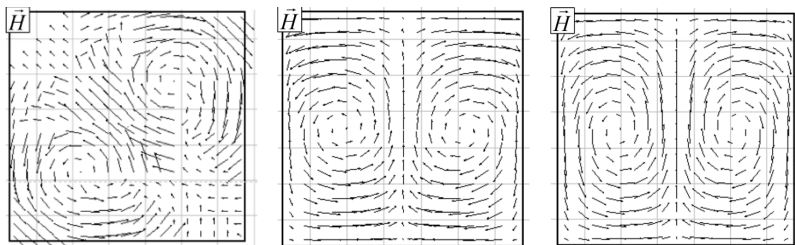


Рис. 4. Пример распределения тангенциальной составляющей  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  полей  $TE_{11}$  типа в раскрытие прямоугольного волновода, рассчитанный ВМКЭ ( $a$ ), ВМ ( $б$ ) при  $|M_m| = 25$  и аналитическим решением ( $в$ )



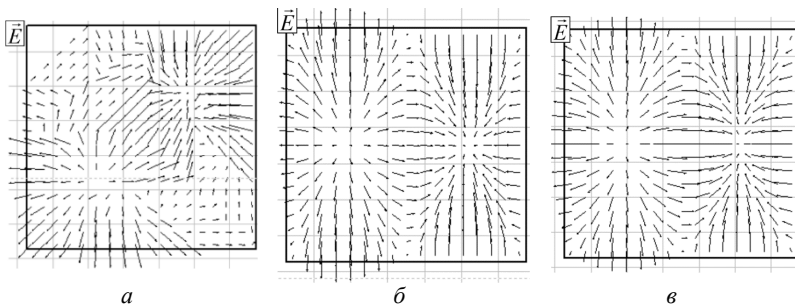
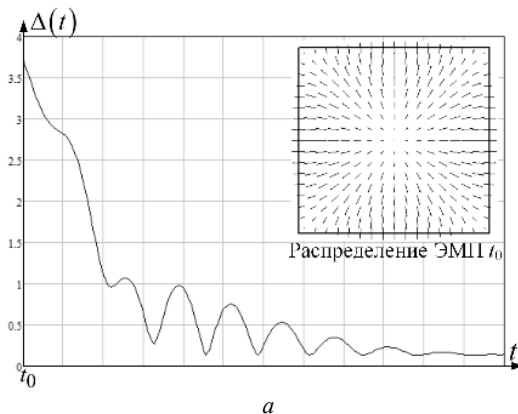


Рис. 5. Пример распределения тангенциальной составляющей  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  полей ТЕ<sub>21</sub> типа в раскрыве прямоугольного волновода, рассчитанный ВМКЭ (а), ВБМ (б) при  $|M_m| = 25$  и аналитическим решением (в)

Для заданного решения волнового уравнения ВБМ во временной области рассмотрим задачу оптимального управления ЭМП, формируемом в раскрыве прямоугольного волновода, для различных значений порядка аппроксимации  $m$ . На рисунке ба представлена

зависимость  $\Delta(t) = \sqrt{\iint_{\Omega} (\vec{E}(x, y, t) - \vec{E}_{\text{тр}}(x, y, t))^2 dx dy}$  — отклонение

реализуемого  $\vec{E}(x, y, t)$  в раскрыве прямоугольного волновода от требуемого  $\vec{E}_{\text{тр}}(x, y, t)$  на интервале времени  $[t_0, t_1]$  при  $m = 4$  и  $v(t) = \sin(2\pi t)$ . На рисунке бб представлена зависимость  $\Delta(t_1)$  от  $m$ .



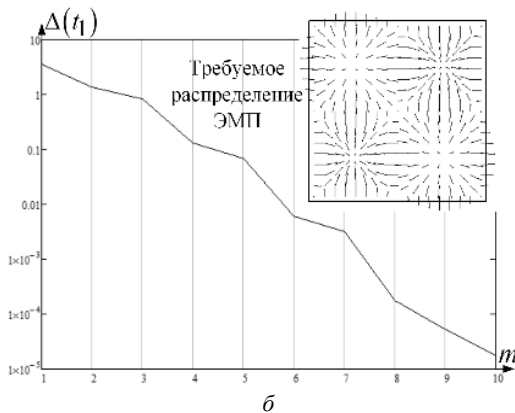


Рис. 6. Отклонение реализуемого ЭМП в раскрыве прямоугольного волновода от требуемого:  $a$  – на интервале времени управления для  $m = 4$ ;  $b$  –  $\Delta(t_1)$  от  $m$

**5. Заключение.** Из полученных результатов численной оценки (рисунки 3-5) следует, что ВБМ позволяет повысить точность численного решения векторных волновых уравнений при одинаковой размерности аппроксимирующего полинома в сравнении с ВМКЭ.

Заданные зависимости (23-29) определяют пример решения задачи оптимального управления ЭМП в области анализа  $\Omega$  с кусочно-линейной границей в целом без ее разбиения на конечные элементы в приближении ВБМ во временной области. Повышение точности решения достигается увеличением порядка аппроксимации  $m$  (рисунок 6). В целом разработанный векторный барицентрический метод имеет широкую прикладную направленность, поскольку может быть также использован в решении задач механики деформируемого твердого тела, теплопроводности, гидродинамики и пр. Векторный барицентрический метод может стать хорошим дополнением или альтернативой к численным методам решения краевых задач математической физики.

## Литература

1. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2012. 432 с.
2. Russer P. Electromagnetics, microwave circuit and antenna design for communications engineering / Edited by C.F. Balanis // N.-Y.: Morgan and Claypool. 2006. 123 p.
3. Архипов Н.С., Полянский И.С., Сомов А.М. Анализ и структурно-параметрический синтез зеркальных антенн // М.: Горячая линия телеком. 2017. 226 с.
4. Christopoulos C. The Transmission-Line Modeling Method // Oxford: Morgan and Claypool. 2006. 124 p.
5. Gibson W.C. The Method of Moments in Electromagnetics: 2nd Edition // N.-Y. : Chapman and Hall/CRC. 2014. 450 p.

6. *Григорьев А.Д.* Современные программные средства моделирования высокочастотных электромагнитных полей // Радиотехника и электроника. 2014. № 8(59). С. 804–808.
7. *Банков С.Е., Курушин А.А.* Электродинамика и техника СВЧ для пользователей САПР // М.: Солон-Пресс. 2008. 276 с.
8. *Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е.* Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. № 1(212). С. 32–40.
9. *Родионов В.И.* О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в числовом анализе // Вестник удмуртского университета. Матем. Мех. Компьют. науки. 2010. № 4. С. 146–153.
10. *Graglia R.D., Wilton D.R., Peterson A.F.* Higher-order interpolatory vector bases for computational electromagnetics // IEEE transactions on antennas and propagation. 1997. vol. 45(3). pp. 329–342.
11. *Nedelec J.C.* Mixed finite elements in R3 // Numer. meth. 1980. vol. 35. pp. 315–341.
12. *Graglia R.D., Lombardi D.* Singular higher order complete vector bases for finite methods // IEEE transactions on antennas and propagation. 2004. vol. 52(7). pp. 1672–1685.
13. *Davidson D.B.* High-order (LT/QN) vector finite elements for waveguide analysis // Aces Journal. 2002. vol. 17(1). pp. 1–10.
14. *Graglia R.D., Peterson A.F.* Higher-order techniques in computational electromagnetics // Series on Electromagnetism in Information and Communication. Published by SciTech Publishing, an imprint of the IET. 2016. 392 p.
15. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона–Римана // Труды СПИИРАН. 2016. №6(49). С. 32–48.
16. *Olemskoy I.V., Eremin A.S., Kovrizhnykh N.A.* Embedded methods of order six for special systems of ordinary differential equations // Appl. Math. Sci. 2017. vol. 11. no. 1. pp. 31–38.
17. *Cassel K.W.* Variational Methods with Applications in Science and Engineering // Cambridge University Press. 2013. 433 p.
18. *Ida N.* Engineering Electromagnetics: 3rd Edition // N.-Y.: Springer Cham Heidelberg. 2015. 1046 p.

**Полянский Иван Сергеевич** — к-т техн. наук, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения. Число научных публикаций — 115. [van341@mail.ru](mailto:van341@mail.ru); Приборостроительная, 35, Орел, 302034; р.т.: +7(953) 618-71-00.

I.S. POLANSKY  
**VECTOR BARYCENTRIC METHOD IN COMPUTATIONAL  
 ELECTRODYNAMICS**

---

*Polansky I.S. Vector Barycentric Method in Computational Electrodynamics.*

**Abstract.** A vector barycentric method for solving the internal problem of electrodynamics, i.e. solving Maxwell's equations or their respective wave equations in a bounded computational domain with prescribed boundary conditions is considered. The developed method refers to the method of direct solution of the boundary value problems of mathematical physics, the basis for the formation of which are the results obtained by V. Ritz, I.G. Bubnov and B.G. Galerkin. The basic idea of the method lies in the synthesis of a procedure of the vector potential approximation, done by the polynomials of the Lagrange type. The approximating polynomial is formed in the barycentric coordinate system for the entire region of analysis as a whole without partitioning into elementary sub-areas. It is assumed that the scope of analysis is a region with a piecewise linear boundary, and the dimension of the barycentric coordinate system is determined by the number of vertices of the analyzed region. The vector barycentric method is implemented both in the frequency and time domains. The solution to the problem of controlling the electromagnetic field in the approximation of the vector barycentric method is considered.

**Keywords:** vector barycentric method, barycentric coordinates, vector potential, the Helmholtz equation.

---

**Polansky Ivan Sergejevich** — Ph.D., researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: mathematical modeling, dynamical systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mapping. The number of publications — 112. van341@mail.ru; 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(953) 618-71-00.

### References

1. Grigorev A.D. *Metody vychislitel'noj elektrodinamiki* [Methods for computational electrodynamics]. Moscow : FIZMATLIT. 2012. 432 p. (In Russ.).
2. Russer P. *Electromagnetics, microwave circuit and antenna design for communications engineering*. Edited by C.F. Balanis. N.-Y.: Morgan and Claypool. 2006. 123 pp.
3. Arkhipov N.S., Polansky I.S., Somov A.M. *Analiz i strukturno-parametricheskij sintez zerkal'nyh antenn* [Analysis of structural-parametric synthesis of reflector antennas]. Moscow: Hotline Telekom. 2017. 226 p. (In Russ.).
4. Christopoulos C. *The Transmission-Line Modeling Method*. Oxford: Morgan and Claypool. 2006. 124 p.
5. Walton C. Gibson. *The Method of Moments in Electromagnetics: 2nd Edition*. N.-Y.: Chapman and Hall/CRC. 2014. 450 p.
6. Grigorev A.D. [Modern software tools for modeling high-frequency electromagnetic fields]. *Radiotekhnika i elektronika – Technology and electronics*. 2014. vol. 8(59). pp. 804–808. (In Russ.).
7. Bankov S.E., Kurushin A.A. *Elektrodinamika i tehnika SVCh dlja polzovatelej SAPR* [Electrodynamics and microwave techniques for CAD users]. Moscow: Solon-Press. 2008. 276 p. (In Russ.).
8. Arkhipov N.S., Polansky I.S., Stepanov D.E. [Barycentric method in problems of analysis of the field in a regular waveguide with arbitrary cross section]. *Antenny – Antenna*. 2015. vol. 1(212). pp. 32–40. (In Russ.).



9. Rodionov V.I. [Finite element method for radio engineers and electrical engineers]. *Vestnik udmurtskogo universiteta. Matem. Meh. Kompjut. nauki. – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 2010. vol 4. pp. 146–153. (In Russ.).
10. Graglia R.D., Wilton D.R., Peterson A.F. Higher-order interpolatory vector bases for computational electromagnetics. *IEEE transactions on antennas and propagation.* 1997. vol. 45(3), pp. 329–342.
11. Nedelec J.C. Mixed finite elements in R3. *Numer. meth.* 1980. vol. 35. pp. 315–341.
12. Graglia R.D., Lombardi D. Singular higher order complete vector bases for finite methods. *IEEE transactions on antennas and propagation.* 2004. vol. 52(7). pp. 1672–1685.
13. Davidson D.B. High-order (LT/QN) vector finite elements for waveguide analysis. *Aces Journal.* 2002. vol. 17(1). pp. 1–10.
14. Graglia R.D., Peterson A.F. Higher-order techniques in computational electromagnetics. Series on Electromagnetism in Information and Communication. Published by SciTech Publishing, an imprint of the IET. 2016. 392 p.
15. Polansky I.S. [Barycentric coordinates of Poisson–Riemann]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings.* 2016. vol 6(49). pp. 32–48. (In Russ.).
16. Olemskoy I.V., Eremin A.S., Kovrizhnykh N.A. Embedded methods of order six for special systems of ordinary differential equations. *Appl. Math. Sci.* 2017. vol. 11. no. 1. pp. 31–38.
17. Cassel K.W. Variational Methods with Applications in Science and Engineering. Cambridge University Press. 2013. 433 p.
18. Ida N. Engineering Electromagnetics: 3rd Edition. N.-Y.: Springer Cham Heidelberg. 2015. 1046 p.