

В.В. САПОЖНИКОВ, ВЛ.В. САПОЖНИКОВ, Д.В. ЕФАНОВ, А.Г. КОТЕНКО  
**МОДУЛЬНЫЕ КОДЫ С СУММИРОВАНИЕМ  
ВЗВЕШЕННЫХ ПЕРЕХОДОВ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ  
ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ОБРАЗУЮЩЕЙ  
НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД ЧИСЕЛ**

---

*Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Котенко А.Г. Модульные коды с суммированием взвешенных переходов с последовательностью весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел.*

**Аннотация.** При синтезе надежных дискретных систем используются разделимые коды с простыми правилами построения и небольшой избыточностью. Часто применяются коды с суммированием с постоянным значением количества контрольных разрядов вне зависимости от длины информационного вектора. В статье показано, что характеристики обнаружения ошибок данными кодами могут быть улучшены за счет модификации правил вычисления значений разрядов контрольных векторов. Предложен алгоритм построения кода с суммированием, основанный на взвешивании переходов между разрядами, занимающими соседние позиции в информационных векторах, и подсчете суммарного веса информационного вектора по модулю, равному степени числа 2. В статье детально анализируются свойства новых кодов с суммированием в сравнении с известными кодами. Установлены условия построения помехоустойчивых модульных взвешенных кодов с суммированием с максимальным количеством обнаруживаемых ошибок в информационных векторах. Улучшение характеристик обнаружения ошибок в новых кодах по сравнению с классическими кодами с суммированием достигается за счет равномерного распределения информационных векторов между всеми контрольными векторами, что, в свою очередь, вносит в класс необнаруживаемых помимо симметричных, некоторую долю монотонных и асимметричных ошибок. В отличие от модульных кодов с суммированием единичных разрядов модульные взвешенные коды обнаруживают большее количество симметричных ошибок, однако доминирующим их видом практически при любой длине информационного вектора являются асимметричные ошибки. Модульные коды с суммированием взвешенных переходов являются перспективным классом разделимых кодов для решения задач технической диагностики дискретных систем.

**Ключевые слова:** техническая диагностика, функциональный контроль, разделимый код, код Бергера, модульный код с суммированием, код с суммированием взвешенных переходов, необнаруживаемая ошибка, характеристики кода.

---

**1. Введение.** При решении задач обеспечения надежности и безопасности дискретных систем, реализующих ответственные технологические процессы, часто используются методы избыточного кодирования [1, 2]. Один из важных классов избыточных кодов составляют разделимые коды: в них выделяется информационный и контрольный векторы, а значения разрядов последних получаются по значениям информационных разрядов. Разделимые коды, или  $(m,k)$ -коды ( $m$  и  $k$  — длины информационных и контрольных векторов соответственно) с простыми правилами построения и небольшим количеством разрядов в контрольных векторах используют при передаче и обработке дан-

ных, а также при решении задач технической диагностики дискретных систем [3, 4]. Например, известным приложением  $(m,k)$ -кодов является их использование при организации систем функционального (рабочего, *on-line*) контроля комбинационных логических устройств [5-13].

Одними из наиболее известных  $(m,k)$ -кодов, нашедших широкое применение при решении задач построения надежных дискретных устройств, являются классические коды с суммированием, или коды Бергера, предложенные в 1961 г. [14]. Данные коды принадлежат к классу несистематических разделимых кодов и строятся следующим образом: к информационному вектору добавляется контрольный вектор, в разряды которого записывается двоичное число, равное весу информационного вектора. Количество разрядов в контрольных векторах кодов Бергера  $k = \lceil \log_2(m+1) \rceil$  (запись  $\lceil \dots \rceil$  обозначает целое сверху от вычисляемого значения). Указанные правила построения кодов Бергера позволяют снабдить их свойством обнаружения любых монотонных ошибок в информационных векторах, что, например, используется при организации схем встроенного контроля [15-17]. В [18] установлено, что от свойств обнаружения ошибок в информационных векторах кодами Бергера зависит такой важный показатель схем контроля, как свойства обнаружения неисправностей в контролируемых объектах. При этом сами коды Бергера не обнаруживают достаточно большое количество ошибок в информационных векторах, в особенности в области малой кратности (например, ими не обнаруживается 50% двукратных ошибок в информационных векторах).

Для упрощения контрольного оборудования в дискретных системах применяются модульные коды с суммированием [19, 20]. Они получаются путем незначительного изменения правил построения кодов Бергера: вес информационного вектора подсчитывается по заранее установленному модулю  $M \in \{2; 4; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}\}$  (определяется наименьший неотрицательный вычет веса информационного вектора по модулю  $M$ ), а полученное значение записывается в разряды контрольного вектора. Данные правила построения модульных кодов с суммированием (далее будем обозначать их как  $SM(m,k)$ -коды) приводят к увеличению количества не обнаруживаемых кодом ошибок по сравнению с кодом Бергера, но позволяют сохранять их главное свойство — способность обнаружения любых монотонных ошибок, однако до определенной кратности.

Характеристики обнаружения ошибок  $SM(m,k)$ -кодами в информационных векторах изучены в большом количестве работ, например, в [21-23]. Отметим наиболее важные их свойства, учет которых

может оказаться полезным при организации систем функционального контроля:

–  $SM(m,k)$ -коды не обнаруживают любые симметричные ошибки в информационных векторах;

–  $SM(m,k)$ -коды не обнаруживают 100% монотонных ошибок с кратностью  $d = jM$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ,  $p \leq \left\lfloor \frac{m}{M} \right\rfloor$ , где запись  $\left\lfloor \dots \right\rfloor$  обозначает целое снизу от вычисляемого значения;

–  $SM(m,k)$ -коды не обнаруживают некоторую долю асимметричных ошибок с кратностями  $d = M + 2j$ , где  $j = 1, 2, \dots (d \leq m)$ ;

– доля необнаруживаемых ошибок четной кратностью  $d$  от общего количества ошибок данной кратностью является постоянной величиной для  $SM(m,k)$ -кода с установленным значением модуля и не зависит от длины информационного вектора.

Часто в качестве модуля при построении  $SM(m,k)$ -кодов используют значения  $M=4$  и  $M=8$ . Такие модульные коды называют кодами Боуза-Лина [19]. В [24] приводятся методы синтеза контрольного оборудования для вычисления разрядов контрольных векторов данных кодов.

Следует отметить, что при построении модульных кодов с суммированием в качестве модуля может выступать любое натуральное число  $2 \leq M \leq m+1$  [21]. Тем не менее наиболее частого применения среди модульных кодов с суммированием достигли именно коды Боуза-Лина.

Помимо классических и модульных кодов с суммированием при построении надежных дискретных систем также применяются взвешенные коды с суммированием, принцип построения которых впервые описан в работе [14]. Взвешенный код с суммированием строится путем приписывания весовых коэффициентов разрядам, подсчета суммарного значения веса единичных информационных разрядов и последующей записи полученного числа в двоичном виде в разряды контрольного вектора. В качестве весовых коэффициентов могут выступать любые натуральные числа [25].

Принципы взвешивания разрядов и подсчета суммарного веса по заранее установленному модулю могут применяться совместно, что дает целые семейства модульно взвешенных кодов с суммированием с небольшой избыточностью [26].

Классические и модульные коды с суммированием при любых значениях модуля (за исключением  $M=2$ ) имеют крайне неравномерное распределение информационных векторов между всеми контрольными векторами, что является причиной большого общего количества необнаруживаемых ими ошибок. Исследования показывают, что путем

модификации правил вычисления разрядов контрольных векторов можно добиться улучшения характеристик модульных кодов с суммированием. Например, в [27, 28] были получены коды с суммированием с равномерным распределением информационных векторов между всеми контрольными векторами с таким же количеством разрядов в контрольных векторах, как и у кодов Бергера. Такие коды имеют теоретический минимум общего количества необнаруживаемых ошибок в информационных векторах при заданных значениях  $m$  и  $k$ .

Опишем здесь класс модульных кодов с суммированием с уменьшенным количеством разрядов в контрольных векторах по сравнению с кодами Бергера и его известными модификациями и имеющих уменьшенное количество необнаруживаемых ошибок по сравнению с последними.

**2. Модульные коды с суммированием взвешенных переходов.** Коды с фиксированным значением количества разрядов в контрольных векторах с улучшенными характеристиками обнаружения ошибок в информационных векторах по сравнению с классическими  $SM(m,k)$ -кодами могут быть построены путем установления неравноправия между разрядами информационных векторов. Подобное свойство достигается путем приписывания специальных весовых коэффициентов непосредственно разрядам или же переходам между разрядами, занимающими соседние позиции [29].

В [28] рассмотрен способ построения кода с суммированием взвешенных информационных разрядов с установленной последовательностью весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел. При формировании кода используется модульный принцип подсчета суммарного веса информационного вектора, при этом устанавливается модуль  $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}$  (он соответствует модулю классического кода Бергера). Такие коды обозначаются как  $WSM(m,k)$ -коды. Они обладают улучшенными характеристиками обнаружения ошибок в информационных векторах по сравнению с классическими кодами Бергера, однако сохраняют и их недостаток — с увеличением длины информационного вектора увеличивается и количество разрядов в контрольных векторах.

Проводя по аналогии с  $SM(m,k)$ -кодами модификацию  $WSM(m,k)$ -кодов, связанную с уменьшением значения модуля  $M$  и выбора его из множества  $M \in \{2, 4, \dots, 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}\}$ , в результате анализа характеристик получаемых кодов мы приходим к важному выводу.

*Теорема 1.* Не существует помехоустойчивых модульно взвешенных кодов с суммированием с последовательностью весовых ко-

эффицентов, образующей ряд натуральных чисел, с модулем  $M \in \{2; 4; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}\}$ .

*Доказательство.* Свойство помехоустойчивости  $(m, k)$ -кода теряется в том случае, если при его построении не контролируется хотя бы один из разрядов в информационном векторе. При установлении в качестве модуля величины  $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}$  любой наименьший неотрицательный вычет из имеющих для информационного вектора длиной  $m$  весовых коэффициентов  $[m; m-1; \dots; 2; 1]$  будет принадлежать множеству  $\{1; 2; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil} - 2; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil} - 1\}$ , а значит, будет влиять на значение суммарного веса информационного вектора. Это следует из того факта, что значение модуля в указанном случае будет всегда больше длины информационного вектора:

$$2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil} > m. \quad (1)$$

Уменьшение значения модуля и выбор его из множества  $M \in \{2; 4; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}\}$  приводит к тому, что разряд, занимающий в информационном векторе позицию  $2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$ , контролироваться не будет. В таком  $WSM(m, k)$ -коде всегда будет присутствовать часть одиночных необнаруживаемых ошибок, что и характеризует не помехоустойчивый код. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы 1.

Теорема доказана.

Единственным способом построения помехоустойчивого кода при последовательности весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел, является выбор значения модуля, исходя из следующего соотношения:

$$M > m. \quad (2)$$

Для значений модулей из множества  $M \in \{2; 4; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}\}$  неравенство (2) выполнить нельзя. Отсюда следует, что любой  $WSM(m, k)$ -код с модулем, выбранным из указанного множества, помехоустойчивым являться не будет.

Таким образом, на основании принципа взвешивания разрядов информационного вектора весовыми коэффициентами из натурального ряда чисел построить класс кодов с постоянными значениями  $k$  вне зависимости от значения  $m$  невозможно.

Однако решить поставленную задачу позволяет использование принципа взвешивания не разрядов в информационном векторе, а переходов между ними (рисунок 1).

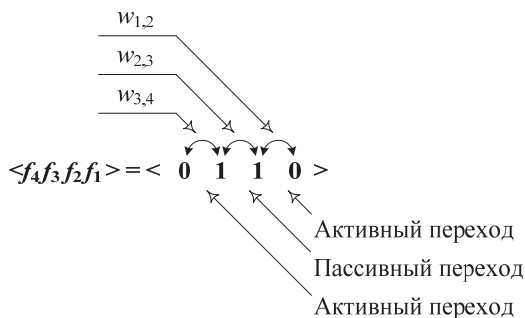


Рис. 1. Элементы информационного вектора

*Алгоритм.* Получение значений разрядов контрольных векторов модульных кодов с суммированием взвешенных переходов:

1. Устанавливается последовательность весовых коэффициентов переходов между разрядами, занимающими соседние позиции в информационных векторах, образующая натуральный ряд чисел, начиная с младшего разряда информационного вектора:

$$[w] = [w_{m-1,m}; w_{m-2,m-1}; \dots; w_{2,3}; w_{1,2}] = [m-1; m-2; \dots; 2; 1].$$

2. Определяются активные переходы между разрядами в информационных векторах:

$$q_{i,i+1} = f_i \oplus f_{i+1} = 1, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (3)$$

3. Суммируются весовые коэффициенты активных переходов:

$$W = \sum_{i=1}^{m-1} q_{i,i+1} w_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{m-1} (f_i \oplus f_{i+1}) w_{i,i+1}. \quad (4)$$

4. Выбирается значение модуля

$$M \in \{2; 4; \dots; 2^{\lceil \log_2 (M_{\max} + 1) \rceil}\} \quad (5)$$

где  $M_{\max} = \frac{(m-1)m}{2}$  — сумма максимального количества активных переходов в информационном векторе.

5. Определяется наименьший неотрицательный вычет числа  $W$  по модулю  $M$ :

$$W_M = W \pmod{M}. \quad (6)$$

6. Число  $W_M$  представляется в двоичном виде и записывается в разряды контрольного вектора.

Получаемые по алгоритму коды с суммированием будем обозначать как  $WTM(m,k)$ -коды.

Следует отметить, что интерес с практической точки зрения будут представлять такие  $WTM(m,k)$ -коды, у которых значение модуля выбирается из множества меньшей мощности, чем множество (5), —  $M \in \{2; 4; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}\}$  (значение модуля  $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}$ , как отмечалось выше, соответствует модулю классического кода Бергера). Такие  $WTM(m,k)$ -коды будут иметь небольшое количество разрядов в контрольных векторах, что будет сказываться на меньшей сложности технической реализации контрольного оборудования в дискретной системе.

Действия алгоритма иллюстрируются в таблице 1, где приводятся все кодовые слова  $WT4(4,2)$ -кода.

Таблица 1. Кодовые слова  $WT4(4,2)$ -кода

№	Информационный вектор				$W$	$W \pmod{4}$	Контрольный вектор	
	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$			$g_2$	$g_1$
	$w_{3,4}=3$	$w_{2,3}=2$	$w_{1,2}=1$					
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1
2	0	0	1	0	3	3	1	1
3	0	0	1	1	2	2	1	0
4	0	1	0	0	5	1	0	1
5	0	1	0	1	6	2	1	0
6	0	1	1	0	4	0	0	0
7	0	1	1	1	3	3	1	1
8	1	0	0	0	3	3	1	1
9	1	0	0	1	4	0	0	0
10	1	0	1	0	6	2	1	0
11	1	0	1	1	5	1	0	1
12	1	1	0	0	2	2	1	0
13	1	1	0	1	3	3	1	1
14	1	1	1	0	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0	0	0	0

Проанализируем свойства  $WT4(4,2)$ -кода. С этой целью представим его в табличной форме, где по столбцам перечислены все контрольные векторы кода (они составляют контрольные группы), каждому из которых сопоставлены все соответствующие информационные векторы [18] (таблица 2). Для рассматриваемого модульного взвешенного кода с суммированием распределение информационных векторов на контрольные группы является равномерным. В [30] показано, что  $(m,k)$ -коды, имеющие равномерное распределение информационных векторов между всеми контрольными векторами, имеют минимальное общее количество обнаруживаемых ошибок в информационных векторах при заданных значениях  $m$  и  $k$  и являются оптимальными по данному критерию:

$$N_{m,k}^{\min} = 2^m (2^{m-k} - 1) \quad (7)$$

Помимо выполнения условия (7)  $(m,k)$ -код должен являться помехоустойчивым, чтобы относиться к классу оптимальных кодов с суммированием.

Таблица 2. Распределение информационных векторов  $WT4(4,2)$ -кода на контрольные группы

Контрольные группы			
00	01	10	11
Информационные векторы			
0000	0001	0011	0010
0110	0100	0101	0111
1001	1011	1010	1000
1111	1110	1100	1101

Таким образом,  $WT4(4,2)$ -код является оптимальным  $(m,k)$ -кодом и не обнаруживает 48 ошибок в информационных векторах. К примеру, классический модульный код с суммированием  $S4(4,2)$ -код таковым не является и не обнаруживает 56 ошибок в информационных векторах.

Табличная форма задания  $(m,k)$ -кода удобна при анализе характеристик обнаруживаемых им ошибок и установления их количества по



каждой кратности  $d \in \{1; 2; \dots; m\}$  и виду (одионочная, мононононная, симметричная или асимметричная [21]). На рисунке 2 показан такой анализ.

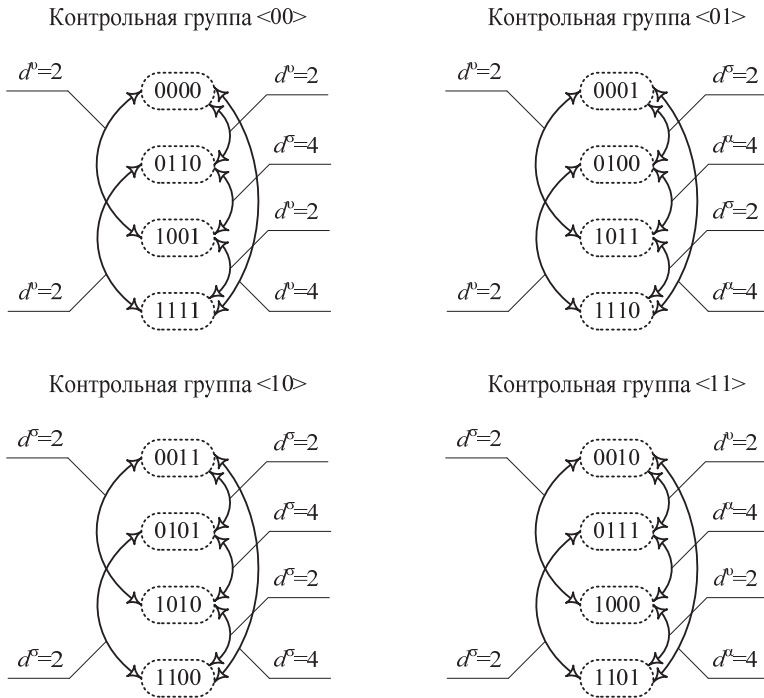


Рис. 2. Характеристики необнаруживаемых переходов внутри каждой контрольной группы

Все возможные переходы внутри каждой контрольной группы соответствуют искажениям, приводящим к необнаруживаемым ошибкам в информационных векторах. Для  $WT_4(4,2)$ -кода каждая контрольная группа дает по 12 необнаруживаемых ошибок (количество необнаруживаемых ошибок внутри группы определяется как удвоенное число всех возможных парных переходов; для оптимального кода оно равно  $2C_2^{2-n}$ ). На рисунке 2 на каждом переходе указана кратность  $d$  и в виде верхнего индекса — вид ( $v$  — мононононная,  $\sigma$  — симметричная или  $\alpha$  — асимметричная) необнаруживаемой ошибки. Рассматриваемым кодом не обнаруживается 18 мононононных ошибок (16 двукратных и 2 четырехкратных), 22 симметричных ошибки (16 двукратных и 6 четырехкратных) и 8 асимметричных четырехкратных оши-

бок. Наличие необнаруживаемых ошибок различных видов характерно для любых  $WTM(m,k)$ -кодов, при этом их кратности  $d \in \{1; 2; \dots; m\}$ .

Отметим следующую важную особенность  $WTM(m,k)$ -кодов.

*Теорема 2.* Модульно взвешенный код с суммированием переходов между разрядами, занимающими соседние позиции в информационных векторах, с модулем  $M \in \{2; 4; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}\}$  будет помехоустойчивым тогда и только тогда, когда значение длины информационного вектора будет удовлетворять соотношению:

$$m \neq jM + 1, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad p = \left\lfloor \frac{m}{M} \right\rfloor. \quad (8)$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $WTM(m,k)$ -код с последовательностью весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел, начиная с младшего разряда информационного вектора  $[m-1; m-2; \dots; 2; 1]$ , с длиной информационного вектора  $m=M+1$ . Весовые коэффициенты для такой длины информационного вектора образуют ряд  $[M; M-1; \dots; 2; 1]$ . Наименьшие неотрицательные вычеты каждого из весовых коэффициентов, за исключением  $w_{m-1,m}$ , будут являться натуральными числами. Поскольку  $w_{m-1,m}=M$  значение наименьшего неотрицательного вычета для данного весового коэффициента будет равно  $w_{m-1,m} \pmod{M} = M \pmod{M} = 0$ . Другими словами, вне зависимости от значения активационной функции  $q_{m-1,m} = f_{m-1} \oplus f_m = f_M \oplus f_{M+1}$  в суммарный вес информационного вектора не будет добавляться никакого значения ни при  $f_m=0$ , ни при  $f_m=1$ . Таким образом, информационные векторы вида  $\langle 0 f_{m-1} f_{m-2} \dots f_2 f_1 \rangle$  и  $\langle 1 f_{m-1} f_{m-2} \dots f_2 f_1 \rangle$  при одинаковых значениях  $m-1$  младших разрядов будут иметь одинаковый суммарный вес и одинаковые контрольные векторы. Расстояние Хэмминга между такими векторами будет равно  $d=1$ . Поскольку существует ровно  $2^{m-1}$  векторов вида  $\langle 0 f_{m-1} f_{m-2} \dots f_2 f_1 \rangle$ , то взаимные переходы их в векторы  $\langle 1 f_{m-1} f_{m-2} \dots f_2 f_1 \rangle$  при наличии искажения старшего разряда приводят к возникновению  $2^m$  необнаруживаемых одиночных ошибок. Таким образом,  $WTM(m,k)$ -код при  $m=M+1$  не будет являться помехоустойчивым. При длине информационного вектора  $m=M+2$  весовые коэффициенты  $WTM(m,k)$ -кода образуют ряд  $[M+1; M; M-1; \dots; 2; 1]$ , а их наименьшие неотрицательные вычеты —  $[1; 0; M-1; \dots; 2; 1]$ . В таком случае разряд  $f_{M+1}$  будет влиять на значение активационных функций  $q_{M,M+1} = f_M \oplus f_{M+1}$  и  $q_{M+1,M+2} = f_{M+1} \oplus f_{M+2}$ . Для функции  $q_{M,M+1}$  значение разряда  $f_{M+1}$  не будет существенным, так как вне зависимости от ее значения будет умножено на нулевой весовой коэффициент.

ент. Данная функция при формировании суммарного веса информационного вектора при  $f_m=0, f_{m-1}=0$  и  $f_m=1, f_{m-1}=1$  будет вносить в значение суммарного веса информационного вектора значение 0, а в случае  $f_m=1, f_{m-1}=0$  или  $f_m=0, f_{m-1}=1$  — значение  $w_{m,m-1}=1$ . Таким образом, разряд  $f_{M+1}$  будет контролироваться хотя бы одной активационной функцией, а его значение будет влиять на суммарный вес информационного вектора.

На рисунке 3 дается иллюстрация описываемых случаев для примера  $WT4(5,2)$  и  $WT4(6,2)$  кодов.

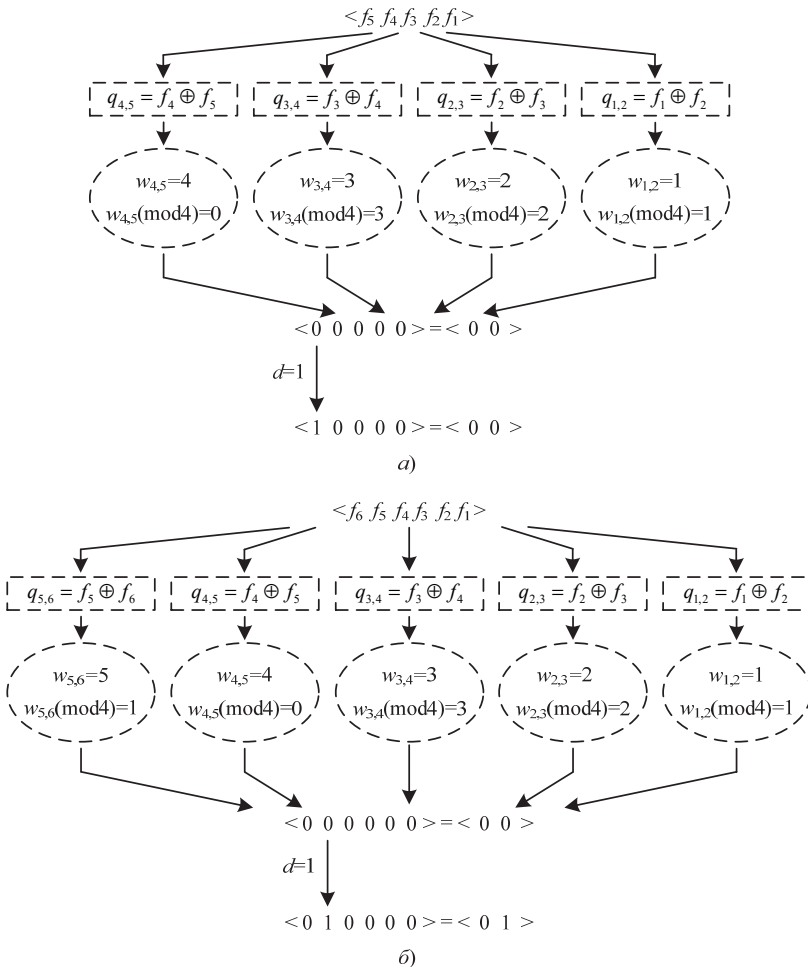


Рис. 3. Модульный взвешенный код: а) не помехоустойчивый; б) помехоустойчивый

Исходя из вышеизложенного, не помехоустойчивым будет только такой  $WTM(m,k)$ -код, у которого длина информационного вектора  $m=M+1$ .

Уменьшение значения модуля и выбор его из множества  $M \in \{2;4;\dots;2^{\lceil \log_2 (m+1) \rceil - 1}\}$  приводит к тому, что описанная выше ситуация с информационными векторами и разрядами, занимающими в них позиции  $jM$ ,  $j \in \{1,2,\dots,p\}$ ,  $p = \left\lfloor \frac{m}{M} \right\rfloor$ , повторяется. Неконтролируемым в

любом случае при  $m \neq jM + 1$ ,  $j \in \{1,2,\dots,p\}$ ,  $p = \left\lfloor \frac{m}{M} \right\rfloor$  остается старший

разряд информационного вектора. Остальные  $WTM(m,k)$ -коды являются помехоустойчивыми.

Теорема доказана.

Теорема 2 определяет условия построения помехоустойчивого  $WTM(m,k)$ -кода.

К примеру, помехоустойчивый  $WT4(5,2)$ -код построен быть не может. В табл. 3 для  $WTM(m,k)$ -кодов с небольшими значениями модулей  $M=2, 4, 8$  указаны длины информационных векторов, при которых возможно построение помехоустойчивых кодов.

Исследования  $WTM(m,k)$ -кодов показали справедливость следующих положений.

*Свойство 1.* При длинах информационных векторов  $m \neq jM + 1$ ,

$j \in \{1,2,\dots,p\}$ ,  $p = \left\lfloor \frac{m}{M} \right\rfloor$   $WTM(m,k)$ -код со значением модуля

$M \in \{2;4;\dots;2^{\lceil \log_2 (m+1) \rceil - 1}\}$  не является помехоустойчивым и имеет в классе необнаруживаемых следующее количество одиночных ошибок:

$$N_{m,1} = 2^{jM+1}, \quad j \in \{1,2,\dots,p\}, \quad p = \left\lfloor \frac{m}{M} \right\rfloor. \quad (9)$$

*Свойство 2.*  $WTM(m,k)$ -коды со значением модуля  $M \in \{2;4;\dots;2^{\lceil \log_2 (m+1) \rceil - 1}\}$  являются оптимальными в том случае, если длина информационного вектора удовлетворяет выражению (8) и следующему соотношению:

$$m \geq \frac{M}{2} + 1. \quad (10)$$

Таблица 3. Значения  $m$  при которых могут быть построены  $WTM(m,k)$ -коды

Код	Длина информационного вектора, $m$															
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
$WT2(m,k)$	×	–	×	–	×	–	×	–	×	–	×	–	×	–	×	
$WT4(m,k)$	×	×	×	–	×	×	×	–	×	×	×	–	×	×	×	
$WT8(m,k)$	–	–	×	×	×	×	×	–	×	×	×	×	×	×	×	

*Свойство 3.* Помехоустойчивые  $WT2(m,k)$ -коды являются классическими кодами паритета и не обнаруживают 100% ошибок с четными кратностями.

*Свойство 4.* Любой  $WTM(m,k)$ -код при четном значении длины информационного вектора обнаруживает любые ошибки в информационных векторах с нечетными кратностями.

*Свойство 5.* Любой  $WTM(m,k)$ -код при нечетном значении длины информационного вектора в классе необнаруживаемых имеет ошибки с кратностями  $d \in \{2;3;...;m-2;m\}$ , причем, не обнаруживается 100% ошибок с максимальной кратностью  $d=m$ :

$$N_{m,m} = 2^m. \quad (11)$$

**3. Сравнительные характеристики классических и взвешенных модульных кодов с суммированием.**  $SM(m,k)$ -коды получили широкое распространение за счет того, что при фиксированной длине контрольных векторов их использование при синтезе дискретных устройств дает небольшую структурную избыточность и приемлемые характеристики обнаружения ошибок [20, 21]. Сравним  $SM(m,k)$ -коды с соответствующими  $WTM(m,k)$ -кодами на примере кодов с количеством контрольных разрядов  $k=2$  и  $k=3$ .

В таблицах 4 и 5 приводятся рассчитанные значения числа не обнаруживаемых описываемыми кодами ошибок в информационных векторах. В последних графах таблиц приводится значение доли необнаруживаемых ошибок в  $WTM(m,k)$ -кодах по сравнению с  $SM(m,k)$ -кодами (значение величины  $\zeta_m$ , %).  $WTM(m,k)$ -коды имеют минимально возможное общее количество необнаруживаемых ошибок в информационных векторах, тогда как  $SM(m,k)$ -коды не обнаруживают большее количество ошибок.

С увеличением длины информационного вектора при фиксированном значении  $M$  распределения информационных векторов по контрольным группам в классических модульных кодах приближаются к равномерному распределению. По этой причине с увеличением длины информационного вектора значение величины  $\zeta_m$  приближается к 100%. При этом скорость приближения величины  $\zeta_m$  к 100% увеличивается с уменьшением значения  $M$ , а наиболее существенный эффект по сравнению с  $SM(m,k)$ -кодами достигается на малых длинах информационных векторов.

Таблица 4. Характеристики необнаруживаемых ошибок для кодов с двумя контрольными разрядами

$m$	$k$	$S4(m,k)$	$WT4(m,k)$	$\zeta_m, \%$
4	2	56	48	85,7143
5	2	240	224	93,3333
6	2	992	960	96,7742
7	2	4032	3968	98,4127
8	2	16256	16128	99,2126
9	2	65280	65024	99,6078
10	2	261632	261120	99,8043
11	2	1047552	1046528	99,9022
12	2	4192180	4190208	99,9530
13	2	16773120	16769024	99,9756
14	2	67100672	67092480	99,9878
15	2	268419072	268402688	99,9939
16	2	1073709056	1073676288	99,9969
17	2	4294901760	4294836224	99,9985
18	2	17179738112	17179607040	99,9992
19	2	68719214592	68718952448	99,9996
20	2	274877382656	274876858368	99,9998

При решении задач технической диагностики определяющее значение имеют характеристики обнаружения  $(m,k)$ -кодом ошибок различных видов (монотонных (*unidirectional*), симметричных (*symmetrical*) и асимметричных (*asymmetrical*)). Анализ распределений необнаруживаемых ошибок в информационных векторах  $WTM(m,k)$ -кодов (рисунок 4 и рисунок 5) показывает, что доминирующим видом

необнаруживаемых ошибок в них являются асимметричные ошибки. Их доля в общем количестве необнаруживаемых ошибок с увеличением длины информационного вектора возрастает, тогда как доля монотонных и симметричных ошибок уменьшается. При этом доля монотонных ошибок от общего количества необнаруживаемых ошибок (величина  $\nu_m$ , %) с увеличением длины информационного вектора убывает постепенно. Характер же изменения долей симметричных и асимметричных ошибок от общего количества необнаруживаемых ошибок (величины  $\sigma_m$  и  $\alpha_m$  соответственно, %), напротив, характеризуется некоторым разбросом относительно аппроксимирующей кривой. При четных значениях  $m$  происходит увеличение величины  $\sigma_m$  относительно предыдущего значения длины информационного вектора  $m-1$ , при нечетных значениях  $m$  — наоборот, уменьшение относительно предыдущего значения. Однако сохраняется общая тенденция уменьшения величины  $\sigma_m$ . Прямо противоположный характер изменения зависимости имеет величина  $\alpha_m$ .

Таблица 5. Характеристики необнаруживаемых ошибок для кодов с тремя контрольными разрядами

$m$	$k$	$S8(m,k)$	$WT8(m,k)$	$\zeta_m$ , %
8	3	12616	7936	62,9042
9	3	48144	32256	66,9990
10	3	184112	130048	70,6353
11	3	706464	522240	73,9231
12	3	2721236	2093056	76,9156
13	3	10523968	8380416	79,6317
14	3	40853696	33538048	82,0931
15	3	159156352	134184960	84,3102
16	3	622051456	536805376	86,2960
17	3	2438377728	2147352576	88,0648
18	3	9583248128	8589672448	89,6322
19	3	37751400960	34359214080	91,0144
20	3	149019369984	137437904896	92,2282

Например, для  $WT4(m,k)$  и  $WT8(m,k)$  кодов уже при длине информационных векторов  $m=8$  свыше 50% необнаруживаемых ошибок являются асимметричными и менее 40% необнаруживаемых ошибок – симметричными.

Совершенно иной характер изменения величин  $\sigma_m$ ,  $\nu_m$  и  $\alpha_m$  имеют классические  $SM(m,k)$ -коды (рисунок 6 и рисунок 7). При малых длинах информационных векторов ( $m < 20$ ) в классе необнаруживаемых у данных кодов доминируют симметричные ошибки, однако происходит постепенное уменьшение значения  $\sigma_m$  с увеличением длины информационного вектора. Скорость такого уменьшения различна для  $SM(m,k)$ -кодов с различными значениями модулей: чем меньше значение  $M$ , тем быстрее изменяется процентное соотношение между симметричными ошибками и другими их видами. При увеличении длины информационного вектора постепенно увеличивается значение величины  $\alpha_m$ , а значение величины  $\nu_m$  уменьшается.

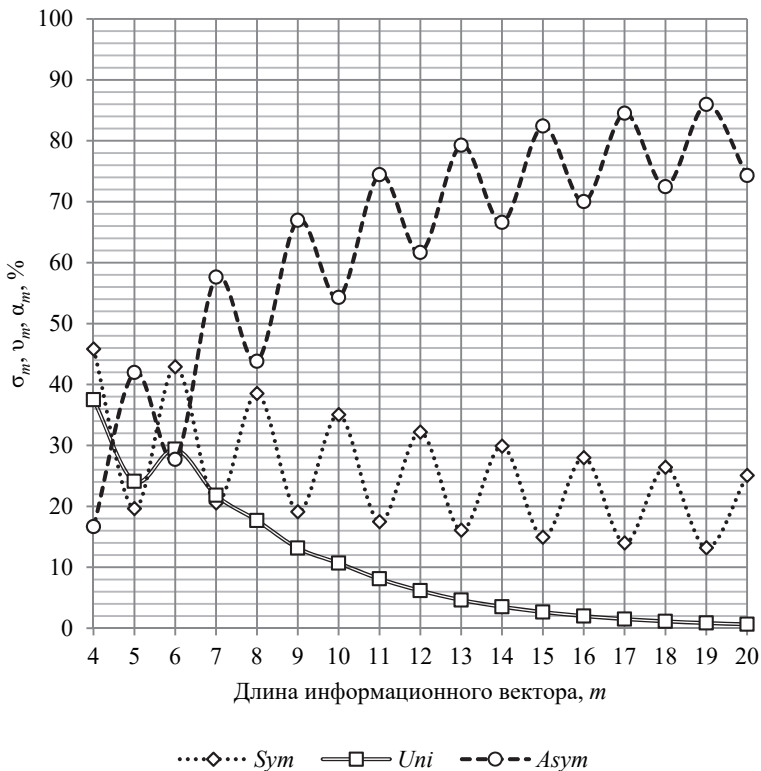


Рис. 4. Распределение необнаруживаемых ошибок по видам в  $WT4(m,k)$ -кодах



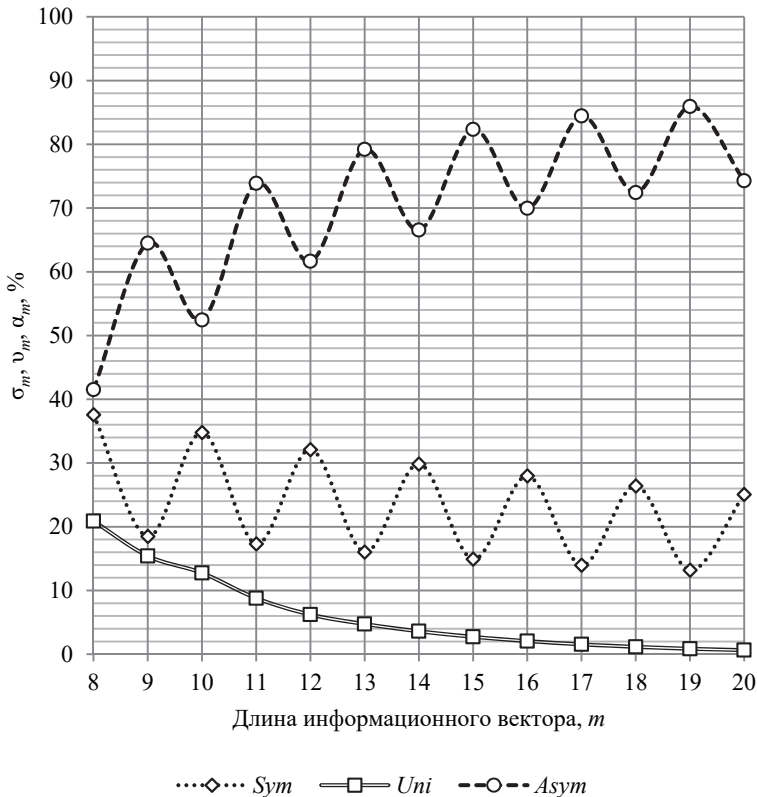


Рис. 5. Распределение необнаруживаемых ошибок по видам в  $WT8(m,k)$ -кодах

Следует отметить, что некоторым предельным случаем для модульных кодов является выбор значения модуля  $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}$ . Такой модуль соответствует модулю кода Бергера, для которого в классе необнаруживаемых присутствуют только симметричные ошибки, а значение величины  $\sigma_m = 100\%$  вне зависимости от длины информационного вектора [21]. Таким образом, чем ближе для данной длины информационного вектора значение  $M$  к величине  $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}$ , тем ближе и значение величины  $\sigma_m$  к  $100\%$  (сравните графики на рисунке 6 и рисунке 7 при одинаковом значении длины информационного вектора).



Рис. 6. Распределение необнаруживаемых ошибок по видам в  $S4(m,k)$ -кодах

Одной из важных характеристик  $(m,k)$ -кодов, которые следует учитывать при организации систем функционального контроля, является обнаруживающая способность в области ошибок малых кратностей, и прежде всего — в области двукратных ошибок. На рисунке 8 и рисунке 9 даются графики долей необнаруживаемых двукратных ошибок от общего количества двукратных ошибок (величин  $\beta_2$ , %) для кодов с суммированием с двумя и тремя контрольными разрядами. Известно [21], что для  $SM(m,k)$ -кодов значение величины  $\beta_2$  не зависит от длины информационного вектора и является постоянным. Для любого  $SM(m,k)$ -кода с  $M > 2$  значение  $\beta_2 = 50\%$ . Значение же величины  $\beta_2$  для модульных кодов со взвешенными переходами является меньшим. Например, для  $WT4(m,k)$ -кодов с длинами информационных векторов  $m = 4 \div 20$  среднее значение величины  $\beta_2 = 40,2347\%$ , а для  $WT8(m,k)$ -кодов с длинами информационных векторов  $m = 8 \div 20$  —  $\beta_2 = 25,4582\%$ .

Чем выше значение  $M$  для  $WTM(m,k)$ -кода, тем меньше значение величины  $\beta_2$ .

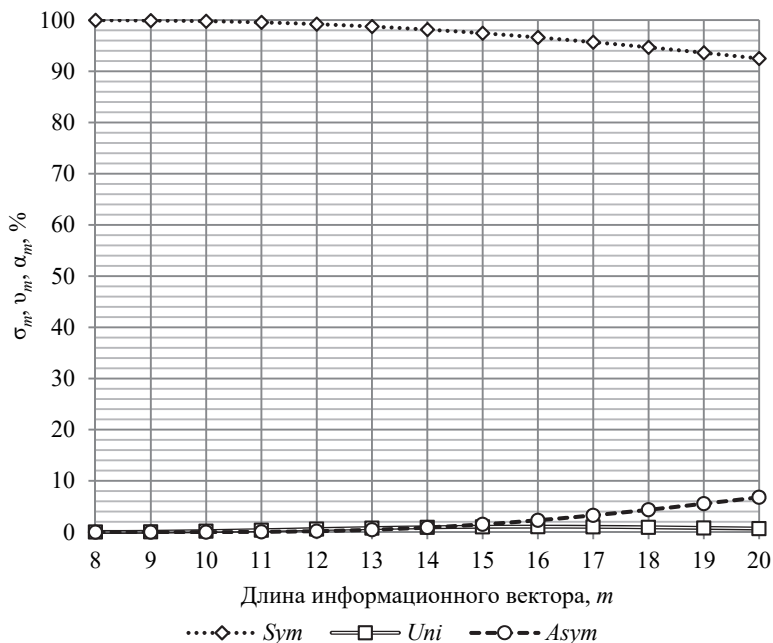


Рис. 7. Распределение необнаруживаемых ошибок по видам в  $S8(m,k)$ -кодах

В таблицах 6 и 7 даются более детальные характеристики рассматриваемых кодов с суммированием: указаны доли не обнаруживаемых кодами ошибок различных кратностей  $d \in \{1;2;\dots;8\}$  от общего количества ошибок данных кратностей для  $SM(m,k)$  и  $WTM(m,k)$  кодов с модулями  $M=4$  и  $M=8$ .

При четных значениях  $m$  значения долей не обнаруживаемых  $WT4(m,k)$ -кодами ошибок кратностью  $d$  от общего количества ошибок данной кратностью при  $m \geq 6$  соизмеримы с данным показателем для  $S4(m,k)$ -кода.

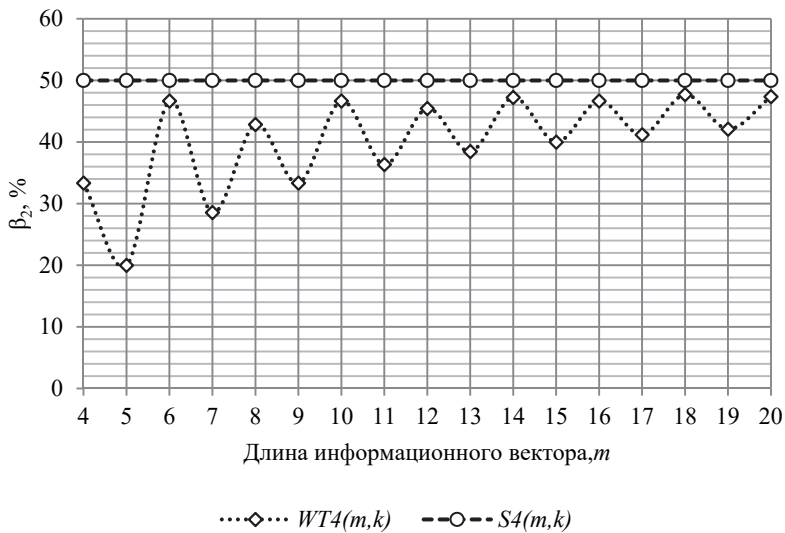


Рис. 8. Доля необнаруживаемых двукратных ошибок в  $WT4(m,k)$  и  $S4(m,k)$  кодах

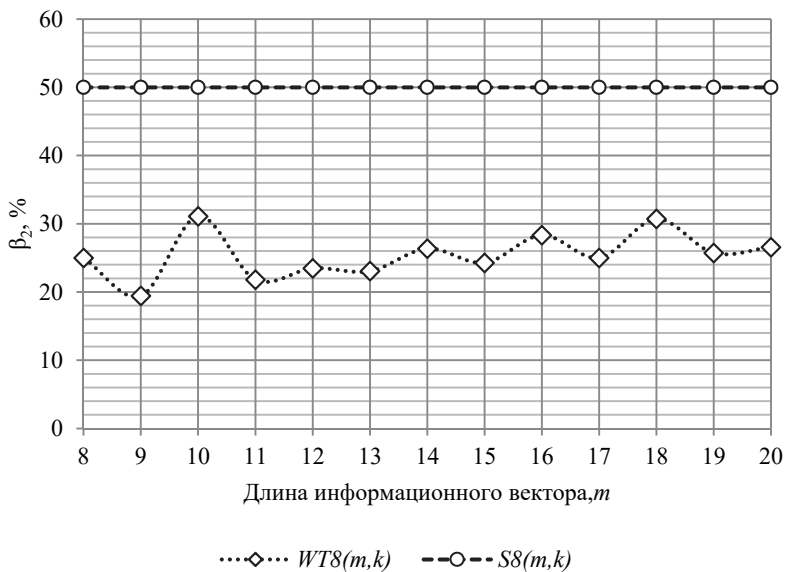


Рис. 9. Доля необнаруживаемых двукратных ошибок в  $WT8(m,k)$  и  $S8(m,k)$  кодах

Таблица 6. Доли не обнаруживаемых ошибок  $S4(m,k)$  и  $WT4(m,k)$  кодами по каждой кратности

$m$	Значение доли необнаруживаемых ошибок кратностью $d$ от общего количества ошибок данной кратностью, %							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$S4(m,k)$ -коды								
$\forall m$	0	50	0	50	0	50	0	50
$WT4(m,k)$ -коды								
4	0	33,3333	0	100	–	–	–	–
5	20	20	20	20	100	–	–	–
6	0	46,6667	0	46,6667	0	100	–	–
7	0	28,5714	25,7143	25,7143	28,5714	0	100	–
8	0	42,8571	0	54,2857	0	42,8571	0	100
9	11,1111	33,3333	14,2857	30,1587	30,1587	14,2857	33,3333	11,1111
10	0	46,6667	0	50,4762	0	50,4762	0	46,6667
11	0	36,3636	15,1515	33,3333	21,645	21,645	33,3333	15,1515
12	0	45,4545	0	51,5152	0	48,9177	0	51,5152
13	7,6923	38,4615	10,4895	35,6643	19,8135	26,3403	26,3403	19,8135
14	0	47,2527	0	50,4496	0	49,9167	0	49,9167
15	0	40	10,7692	37,4359	16,317	29,6503	23,6053	23,6053
16	0	46,6667	0	50,7692	0	49,6503	0	50,272
17	5,8824	41,1765	8,2353	38,8235	14,9321	32,1267	20,4443	26,6146
18	0	47,7124	0	50,3268	0	49,9246	0	50,016
19	0	42,1053	8,3591	39,9381	13,0031	34,0557	18,5044	29,0307
20	0	47,3684	0	50,4644	0	49,8452	0	50,0834

При нечетных значениях  $m$  значения долей необнаруживаемых  $WT4(m,k)$ -кодами ошибок кратностью  $d$  от общего количества ошибок данной кратностью существенно меньше указанного показателя для  $S4(m,k)$ -кода, что связано с присутствием для взвешенных кодов с суммированием в классе необнаруживаемых ошибок с нечетными кратностями.

Следует отметить, что  $WT4(m,k)$ -коды с четными значениями  $m$  даже несколько «проигрывают»  $S4(m,k)$ -кодам по характеристикам обнаружения ошибок с кратностями  $d=4$  и  $d=8$ . Такая закономерность характерна и для ошибок с большими кратностями (в таблице 6 они не представлены).

Более заметны преимущества модульных взвешенных кодов с суммированием при сравнении между собой  $WT8(m,k)$  и  $S8(m,k)$  кодов (таблица 7).

Таблица 7. Доли не обнаруживаемых ошибок  $S8(m,k)$  и  $WT8(m,k)$  кодами по каждой кратности

$m$	Значение доли необнаруживаемых ошибок кратностью $d$ от общего количества ошибок данной кратностью, %							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$S8(m,k)$ -коды								
$\forall m$	0	50	0	37,5	0	31,25	0	28,125
$WT8(m,k)$ -коды								
8	0	25	0	22,8571	0	25	0	100
9	11,1111	19,4444	8,3333	12,6984	12,6984	8,3333	19,4444	11,1111
10	0	31,1111	0	23,3333	0	23,3333	0	31,1111
11	0	21,8182	8,4848	15,4545	10,8225	10,8225	15,4545	8,4848
12	0	23,4848	0	25,0505	0	25	0	25,0505
13	0	23,0769	4,1958	16,7832	10,4895	13,1702	13,1702	10,4895
14	0	26,3736	0	24,1758	0	25,2081	0	25,2081
15	0	24,2857	4,9451	18,1319	8,0753	14,7053	12,0124	12,0124
16	0	28,3333	0	24,7253	0	24,6503	0	25,439
17	5,8824	25	5	18,9076	7,2721	15,9502	10,1501	13,4677
18	0	30,719	0	25,098	0	24,6283	0	25,1291
19	0	25,731	4,4376	19,711	6,5703	16,9099	9,1927	14,5855
20	0	26,5789	0	24,871	0	24,9329	0	25,0742

$WT8(m,k)$ -коды обнаруживают большее количество ошибок как кратностью  $d=2$ , так и ошибок других представленных в таблице 7 четных кратностей, по сравнению с  $S8(m,k)$ -кодами. Тем не менее  $WT8(m,k)$ -коды с нечетными значениями длин информационных векторов в классе необнаруживаемых имеют некоторую долю ошибок с нечетными кратностями. В среднем их доля от общего количества ошибок соответствующей кратности для диапазона нечетных значений длин информационных векторов 8÷20 равна:  $d=3$  — 5,8994%;  $d=5$  — 9,3214%;  $d=7$  — 13,2374%. С увеличением значения  $d$  (с учетом только нечетных  $d$ ) доля необнаруживаемых ошибок от общего количества ошибок данной кратностью увеличивается.

Следует отметить, что в целом улучшение обнаруживающей способности в  $WTM(m,k)$ -кодах по сравнению с  $SM(m,k)$ -кодами достигается не только за счет более сбалансированного распределения ин-

формационных векторов между всеми контрольными векторами, но и для нечетных значений  $m$  — за счет добавления в класс необнаруживаемых ошибок с нечетными кратностями.

**4. Заключение.** Характеристики обнаружения ошибок в информационных векторах  $SM(m,k)$ -кодов улучшают за счет простых правил модификации, связанных с установлением неравноправия между разрядами в информационных векторах. Описанный в статье алгоритм модификации, основанный на операции взвешивания переходов между разрядами, занимающими соседние позиции в информационных векторах, а также вычислении суммарного веса информационного вектора по модулю  $M \in \{2; 4; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}\}$ , позволяет уменьшить число необнаруживаемых  $SM(m,k)$ -кодами ошибок.

В статье показано, что модульные взвешенные коды с суммированием, в отличие от классических модульных кодов с суммированием единичных разрядов, не обнаруживают минимальное общее количество ошибок в информационных векторах при своих значениях  $m$  и  $k$ . Улучшение свойств модульных кодов с суммированием достигается за счет перераспределения информационных векторов между всеми контрольными векторами. При этом в класс необнаруживаемых добавляется существенное количество (по сравнению с количеством таких ошибок в  $SM(m,k)$ -кодах) так называемых асимметричных ошибок в информационных векторах.

Предложенные в работе семейства  $WTM(m,k)$ -кодов расширяют множество разделимых кодов с простыми правилами построения и небольшой избыточностью, пригодных для решения задач технической диагностики дискретных систем автоматики и вычислительной техники.

## Литература

1. *Кравцов Ю.А., Архипов Е.В., Бакин М.Е.* Перспективные способы кодирования рельсовых цепей тональной частоты // Автоматика на транспорте. 2015. Том 1. № 2. С. 119–126.
2. *Шаманов В.И.* Обобщенная математическая модель процесса эксплуатации систем автоматики и телемеханики // Автоматика на транспорте. 2016. Том 2. № 2. С. 163–179.
3. *Ubar R., Raik J., Vierhaus H.-T.* Design and Test Technology for Dependable Systems-on-Chip (Premier Reference Source) // Information Science Reference. Hershey—New York. IGI Global. 2011. 578 p.
4. *Fujiwara E.* Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications // New Jersey: John Wiley & Sons. 2006. 720 p.
5. *Nicolaidis M., Zorian Y.* On-Line Testing for VLSI – A Compendium of Approaches // Journal of Electronic Testing: Theory and Application. 1998. vol. 12. Issue 1-2. pp. 7–20.
6. *Дрозд А.В. и др.* Рабочее диагностирование безопасных информационно-управляющих систем / Под ред. А.В. Дрозда и В.С. Харченко // Харьков: Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 2012. 614 с.

7. *Drozdz A. et al.* Objects and Methods of On-Line Testing: Main Requirements and Perspectives of Development // Proceedings of 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2016). 2016. pp. 72–76.
8. *Kharchenko V., Kondratenko Yu., Kasprzyk J.* Green IT Engineering: Concepts, Models, Complex Systems Architectures // Springer Book series "Studies in Systems, Decision and Control". 2017. vol. 74. 305 p.
9. *Mitra S., McCluskey E.J.* Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? // Proceedings of International Test Conference. USA. 2000. pp. 985–994.
10. *Blyudov A.A.* On the Synthesis of Test Equipment for Modulo Codes with Summation // Proceedings of Petersburg Transport University. 2013. vol. 1. pp. 53–58.
11. *Пархоменко П.П., Согомонян Е.С.* Основы технической диагностики (оптимизация алгоритмов диагностирования, аппаратурные средства) // М.: Энергоатомиздат. 1981. 320 с.
12. *Matrosova A.Yu., Ostantin S.A., Kirienko I.E.* All Stuck-at Fault Test Patterns and Incompletely Specified Boolean Functions // Proceeding of the 11th International Workshop on Boolean Problems. Freiberg. Germany. 2014. pp. 165–170.
13. *Черкасова Т.Х.* Об обнаружении ошибок в системах автоматики и вычислительной техники с помощью кодов Бергера и его модификаций // Сборник трудов научно-практической конференции Проблемы безопасности и надежности микропроцессорных комплексов. СПб: ИГУПС. 2015. С. 167–172.
14. *Berger J.M.* A Note on Error Detecting Codes for Asymmetric Channels // Information and Control. 1961. vol. 4. Issue 1. pp. 68–73.
15. *Согомонян Е.С., Слабаков Е.В.* Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы // М.: Радио и связь. 1989. 207 с.
16. *Busaba F.Y., Lala P.K.* Self-Checking Combinational Circuit Design for Single and Unidirectional Multibit Errors // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1994. vol. 5. no. 1. pp. 19–28.
17. *Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D.* New Methods of Concurrent Checking: Edition 1 // Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V. 2008. 184 p.
18. *Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* О свойствах кода с суммированием в схемах функционального контроля // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 155–162.
19. *Bose B., Lin D.J.* Systematic Unidirectional Error-Detection Codes // IEEE Transactions on Computers. 1985. vol. C-34. pp. 1026–1032.
20. *Das D., Toubia N.A.* Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1999. vol. 15. no. 1-2. pp. 145–155.
21. *Sapozhnikov V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.* Modular Sum Code in Building Testable Discrete Systems // Proceedings of 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015). 2015. pp. 181–187.
22. *Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* Применение модульных кодов с суммированием для построения систем функционального контроля комбинационных логических схем // Автоматика и телемеханика. 2015. № 10. С. 152–169.
23. *Черпанова М.Р.* Исследование влияния значения модуля кода с суммированием на структурную избыточность систем функционального контроля // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2016. № 2. С. 279–288.
24. *Piestrak S.J.* Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes // Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. 111 p.
25. *Das D., Toubia N.A.* Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits // Proceedings of 17th IEEE Test Symposium. 1999. pp. 370–376.



26. *Das D., Touba N.A., Seuring M., Gossel M.* Low Cost Concurrent Error Detection Based on Modulo Weight-Based Codes // Proceedings of the 6th IEEE International On-Line Testing Workshop (IOLTW). Spain. 2000. pp. 171–176.
27. *Sapozhnikov V. et al.* Optimum Sum Codes, that Effectively Detect the Errors of Low Multiplicities // Radioelectronics & Informatics. 2015. Issue 1. pp. 17–22.
28. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Никитин Д.А.* Модульно взвешенный код с суммированием для систем технического диагностирования // Информатика и системы управления. 2015. № 3. С. 53–62.
29. *Дмитриев В.В.* О двух способах взвешивания и их влиянии на свойства кодов с суммированием взвешенных переходов в системах функционального контроля логических схем // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2015. № 3. С. 119–129.
30. *Блюдов А.А., Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* Построение модифицированного кода Бергера с минимальным числом необнаруживаемых ошибок информационных разрядов // Электронное моделирование. 2012. Том 34. № 6. С. 17–29.

**Сапожников Валерий Владимирович** — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры автоматки и телемеханики на железных дорогах, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (ПГУПС). Область научных интересов: надежностный синтез дискретных устройств, синтез безопасных систем, синтез самопроверяемых схем, техническая диагностика дискретных систем. Число научных публикаций — 600. port.at.pgups@gmail.com; Московский пр., 9, Санкт-Петербург, 190031; р.т.: +7(812)310-0788, Факс: +7(812)457-8579.

**Сапожников Владимир Владимирович** — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры автоматки и телемеханики на железных дорогах, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (ПГУПС). Область научных интересов: надежностный синтез дискретных устройств, синтез безопасных систем, синтез самопроверяемых схем, техническая диагностика дискретных систем. Число научных публикаций — 600. at.pgups@gmail.com; Московский пр., 9, Санкт-Петербург, 190031; р.т.: +7(812)310-0788, Факс: +7(812)457-8579.

**Ефанов Дмитрий Викторович** — к-т техн. наук, доцент кафедры автоматки и телемеханики на железных дорогах, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (ПГУПС). Область научных интересов: дискретная математика, надежность и техническая диагностика дискретных систем. Число научных публикаций — 200. TrES-4b@yandex.ru; Московский пр., 9, Санкт-Петербург, 190031; р.т.: +7(911)709-2164, Факс: +7(812)457-8579.

**Котенко Алексей Геннадьевич** — д-р техн. наук, доцент, заведующий кафедрой управления эксплуатационной работой, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (ПГУПС). Область научных интересов: организация движения на транспорте, риск-ориентированные методы управления, обработка неточных данных и представление знаний с неопределенностью. Число научных публикаций — 117. algenko@gmail.com; Московский пр., 9, Санкт-Петербург, 190031; р.т.: +7(812)457-8992.

V.V. SAPOZHNIKOV, VL.V. SAPOZHNIKOV, D.V. EFANOV, A.G. KOTENKO  
**MODULO CODES WITH SUMMATION  
OF WEIGHTED TRANSITIONS WITH NATURAL NUMBER  
SEQUENCE OF WEIGHTS**

---

*Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.V., Efanov D.V., Kotenko A.G. Modulo Codes with Summation of Weighted Transitions with Natural Number Sequence of Weights.*

**Abstract.** Systematic codes with simple formation rules and low redundancy are used in the reliable digital systems design. Codes with summation with a constant number of check bits, which does not depend on data vector length, are often applied. The paper shows that error detection properties of these codes could be improved by a modification of check bits calculation rules. The authors offer the algorithm of the formation of a code with summation based on weighing the transitions between bits on neighboring positions of data vectors and calculation of the total weight of the data vector by the modulo, which is degree of two. The paper contains a detailed analysis of properties of new codes compared with known ones. The authors state the conditions of the formation of error-tolerant modulo weight-based codes with summation with the maximum number of detected errors in data vectors. Improving of error detection characteristics in new codes, compared with classic ones, is achieved by the uniform distribution of data vectors among check vectors. This, in its turn, brings some part of monotonous and asymmetric errors to the class of undetectable in addition to symmetric ones. Modulo weight-based codes detect more symmetric errors than modulo codes with summation of ones, but asymmetric errors are the dominant sort of them for almost any length of data vector. Modulo codes with summation of weighted transitions are the perspective class of systematic codes to solve the tasks of digital systems technical diagnostics.

**Keywords:** technical diagnostics, concurrent error detection, systematic code, Berger code, modulo codes with sum, weight-transition code with sum, undetectable error, code characteristics.

---

**Sapozhnikov Valery Vladimirovich** — Dr. Sci., professor, professor of automation and remote control on railways department, Emperor Alexander I St. Petersburg state transport university. Research interests: reliable synthesis of discrete devices, safe systems synthesis, self-checking systems synthesis, discrete systems technical diagnostics. The number of publications — 600. port.at.pgups@gmail.com; 9, Moskovsky ave., St. Petersburg, 190031; office phone: +7(812)310-0788, Fax: +7(812)457-8579.

**Sapozhnikov Vladimir Vladimirovich** — Dr. Sci., professor, professor of automation and remote control on railways department, Emperor Alexander I St. Petersburg state transport university. Research interests: reliable synthesis of discrete devices, safe systems synthesis, self-checking systems synthesis, discrete systems technical diagnostics. The number of publications — 600. at.pgups@gmail.com; 9, Moskovsky ave., St. Petersburg, 190031; office phone: +7(812)310-0788, Fax: +7(812)457-8579.

**Efanov Dmitry Viktorovich** — Ph.D., associate professor of automation and remote control on railways department, Emperor Alexander I St. Petersburg state transport university. Research interests: discrete mathematics, reliability and technical diagnostics of discrete devices. The number of publications — 200. TrES-4b@yandex.ru; 9, Moskovsky ave., St. Petersburg, 190031; office phone: +7(911)709-2164, Fax: +7(812)457-8579.

**Kotenko Alexey Gennad'evich** — Dr. Sci., associate professor, head of operational work department, Emperor Alexander I St. Petersburg state transport university. Research interests: transport traffic organization, risk-oriented control methods, inaccurate data processing and uncertain presentation of data. The number of publications — 117. algenko@gmail.com; 9, Moskovsky ave., St. Petersburg, 190031; office phone: +7(812)457-8992.

## References

1. Kravtsov Yu.A., Arhipov E.V., Bakin M.E. [Advanced coding schemes of voice-frequency track circuits]. *Avtomatika na transporte – Automation on Transport*. 2015. vol. 1. Issue 2. pp. 119–126. (In Russ.).
2. Shamanov V.I. [Generalised mathematical body of the operational process of automation and remote control system]. *Avtomatika na transporte – Automation on Transport*. 2016. vol. 2. Issue 2. pp. 163–179. (In Russ.).
3. Ubar R., Raik J., Vierhaus H.-T. Design and Test Technology for Dependable Systems-on-Chip (Premier Reference Source). Information Science Reference. Hershey – New York. IGI Global. 2011. 578 p.
4. Fujiwara E. Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. New Jersey: John Wiley & Sons. 2006. 720 p.
5. Nicolaidis M., Zorian Y. On-Line Testing for VLSI – A Compendium of Approaches. *Journal of Electronic Testing: Theory and Application*. 1998. vol. 12. Issue 1-2. pp. 7–20.
6. Drozd A.V. et al. *Rabochee diagnostirovanie bezopasnyh informacionno-upravlyayushchih system. Pod red. A.V. Drozda i V.S. Harchenko* [Objects and methods of on-line testing for safe instrumentation and control systems. Edited by A.V. Drozd, and V.S. Harchenko]. Kharkov. National Aerospace University "KhAI". 2012. 614 p. (In Russ.).
7. Drozd A. et al. Objects and Methods of On-Line Testing: Main Requirements and Perspectives of Development. Proceedings of 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2016). 2016. pp. 72–76.
8. Kharchenko V., Kondratenko Yu., Kacprzyk J. Green IT Engineering: Concepts, Models, Complex Systems Architectures. Springer Book series "Studies in Systems, Decision and Control". 2017. vol. 74. 305 p.
9. Mitra S., McCluskey E.J. Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? Proceedings of International Test Conference. USA. 2000. pp. 985–994.
10. Blyudov A.A. On the Synthesis of Test Equipment for Modulo Codes with Summation. Proceedings of Petersburg Transport University. 2013. vol. 1. pp. 53–58.
11. Parhomenko P.P., Sogomonyan E.S. *Osnovy tekhnicheskoy diagnostiki (optimizaciya algoritmov diagnostirovaniya, apparaturnye sredstva)* [Technical diagnosis fundamentals (Diagnostic algorithm optimization, apparatus means)]. Moscow: Energoatomizdat. 1981. 320 p. (In Russ.).
12. Matrosova A.Yu., Ostanin S.A., Kirienko I.E. All Stuck-at Fault Test Patterns and Incompletely Specified Boolean Functions. Proceeding of the 11th International Workshop on Boolean Problems. Freiberg, Germany. 2014. pp. 165–170.
13. Cherkasova T.H. [About error detection in automation and computer engineering with Berger code and its modification]. *Sbornik trudov nauchno-prakticheskoy konferencii Problemy bezopasnosti i nadezhnosti mikroprocessornykh kompleksov* [Proceedings of scientific-practical conference "Safety and reliability of microprocessors problems"]. St. Petersburg. Emperor Alexander I St. Petersburg state transport university. 2015. pp. 167–172. (In Russ.).
14. Berger J.M. A Note on Error Detecting Codes for Asymmetric Channels. *Information and Control*. 1961. vol. 4. Issue 1. pp. 68–73.

15. Sogomonyan E.S., Slabakov E.V. *Samoproveryaemye ustroystva i otkazoustoychivyye sistemy* [Self-Checking and Fail-Safety Systems]. M.: Radio and svjaz'. 1989. 207 p. (In Russ.).
16. Busaba F.Y., Lala P.K. Self-Checking Combinational Circuit Design for Single and Unidirectional Multibit Errors. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 1994. vol. 5. no. 5. pp. 19–28.
17. Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. *New Methods of Concurrent Checking: Edition 1*. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V. 2008. 184 p.
18. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I.V. [On summation code properties in functional control circuits]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and remote control*. 2010. vol. 6. pp. 155–162. (In Russ.).
19. Bose B., Lin D.J. Systematic Unidirectional Error-Detection Codes. *IEEE Transactions on Computers*. 1985. vol. C-34. pp. 1026–1032.
20. Das D., Toubia N.A. Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 1999. vol. 15. no. 1-2. pp. 145–155.
21. Sapozhnikov V., Sapozhnikov V.I., Efanov D. Modular Sum Code in Building Testable Discrete Systems. Proceedings of 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015). 2015. pp. 181–187.
22. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I.V. [Application of modular summation codes to concurrent error detection systems for combinational Boolean circuits]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and remote control*. 2015. vol. 10. pp. 152–169. (In Russ.).
23. Cherepanova M.R. [A study into influence of sum code module value on structure redundancy of concurrent error detection systems]. *Izvestija Peterburgskogo universiteta putej soobshhenija – Proceedings of Petersburg Transport University*. 2016. vol. 2. pp. 279–288.
24. Piestrak S.J. *Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej. 1995. 111 p.
25. Das D., Toubia N.A. Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits. Proceedings of 17th IEEE Test Symposium. 1999. pp. 370–376.
26. Das D., Toubia N.A., Seuring M., Gossel M. Low Cost Concurrent Error Detection Based on Modulo Weight-Based Codes. Proceedings of the 6th IEEE International On-Line Testing Workshop (IOLTW). Spain. 2000. pp. 171–176.
27. Sapozhnikov V. et al. Optimum Sum Codes, that Effectively Detect the Errors of Low Multiplicities. *Radioelectronics & Informatics*. 2015. vol. 1. pp. 17–22.
28. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I.V., Efanov D.V., Nikitin D.A. [Modulo weighted code with summation for technical diagnostics systems]. *Informatika i sistemy upravlenija – Information science and control systems*. 2015. vol. 3. pp. 53–62. (In Russ.).
29. Dmitriev V.V. [On the two weighing methods and their influence on properties of sum codes of weighted transitions in functional logical scheme control systems]. *Izvestija Peterburgskogo universiteta putej soobshhenija – Proceedings of Petersburg Transport University*. 2015. vol. 3. pp. 119–129. (In Russ.).
30. Blyudov A.A., Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I.V. [Formation of the Berger modified code with minimum number of undetectable errors of data bits]. *Jelektronoe modelirovanie – Electronic Modeling*. 2012. vol. 34. no. 6. pp. 17–29. (In Russ.).