

М.С. ЛЫТАЕВ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРОПОСФЕРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ ДИСТАНЦИОННОГО МОНИТОРИНГА

Лытаев М.С. Численный метод расчета тропосферного распространения электромагнитных волн в задачах построения геоинформационных систем дистанционного мониторинга.

Аннотация. Настоящая работа посвящена численным методам решения задачи распространения электромагнитных волн вблизи поверхности Земли. Построены дискретные нелокальные граничные условия для конечно-разностной аппроксимации Паде однонаправленного уравнения Гельмгольца. Полученные условия позволяют учитывать линейно растущий по высоте коэффициент преломления выше расчетной области, что делает их полезными для применения в задачах распространения радиоволн в неоднородной тропосфере. Предложенный метод не требует введения искусственного поглощающего слоя в окрестности верхней границы расчетной области. Использование аппроксимаций Паде позволяет проводить расчеты с достаточно большим шагом по продольной координате, что положительно влияет на производительность. Метод не накладывает существенных ограничений на максимальный угол распространения и может использоваться в среде с наличием горизонтальных препятствий. Выполнено сравнение с методом расщепления Фурье и конечно-разностной схемой Кранка — Николсона.

Ключевые слова: нелокальное граничное условие, распространение радиоволн, уравнение Гельмгольца, аппроксимации Паде, параболическое уравнение.

1. Введение. Интеллектуальные географические информационные системы для мониторинга и поддержки принятия решений все чаще проникают в различные отрасли. В задачи этих сложных распределенных систем входит сбор данных из различных источников в реальном времени, классификация, обработка и визуализация наблюдаемой обстановки в удобном виде. Появляется возможность для осуществления широкомасштабного мониторинга и моделирования различных процессов антропогенного и природного характера [1].

Одним из основных источников наблюдения уже долгое время является анализ электромагнитного излучения. Следует отметить, что в задачах мониторинга земной поверхности за последние несколько лет получили развитие методы анализа интерференционных диаграмм, создаваемых сигналами глобальных навигационных систем ГЛОНАСС и GPS [2]. Сюда входит наблюдение за передвижением и толщиной льда на морях и реках [3], определение влажности почвы и уровня растительности, измерение глубины снежного покрова. Для корректного моделирования и обработки спутниковых сигналов необходимы методы расчета распространения электромагнитных волн вблизи поверхности Земли, способные учитывать различные параметры наблюдаемой среды [4].

Математическое моделирование тропосферного распространения радиоволн также находят широкое применение в задачах прогнозирования зон радиовидимости различных радиотехнических систем [5-7]. Пространственные изменения индекса преломления тропосферы, обусловленные метеорологическими условиями, оказывают существенное влияние на распространение радиоволн [8, 9]. Эффекты аномального тропосферного распространения способны как значительно увеличить зону радиовидимости, так и способствовать появлению слепых зон. Кроме того, важно учитывать эффекты дифракции вокруг поверхности Земли, параметры ландшафта земной поверхности и условия городской застройки [10].

В интересах ВМС США уже много лет разрабатывается и активно используется система AREPS [11]. В список ее возможностей входит расчет функции ослабления радиоволн в различных условиях, оценка вероятности обнаружения радарными надводных и воздушных целей, определение зон действия наземных систем радиодоступа. К настоящему времени AREPS является составной частью интеллектуальных систем мониторинга и боевого управления.

Для решения указанных задач расчета характеристик распространения электромагнитных волн, как правило, используется метод параболического уравнения [12-14]. Анализ вышеупомянутых систем и используемых в них алгоритмов построения численного решения показывает, что они обладают определенными недостатками [15]. В частности, особенности построения решения в полубесконечном интервале высот исследованы недостаточно, что приводит к появлению ложных отражений от верхней границы расчетной области. Введение искусственного поглощающего слоя в окрестности верхней границы способно на несколько порядков уменьшить влияние ложных отражений, однако его эффективность зависит от конкретных параметров излучающей антенны, ландшафта и коэффициента преломления среды. Кроме того, параметры самого слоя определяются не строго, а исходя из некоторых эмпирических соображений и, таким образом, требуют калибровки и верификации.

Альтернативным подходом является использование конечно-разностных схем с введением нелокальных граничных условий (НГУ), которые позволяют свести исходную задачу к эквивалентной с ограниченной по высоте областью интегрирования. В задаче тропосферного распространения для стандартного узкоугольного параболического приближения данный подход был впервые предложен в работе [16]. Далее был получен дискретный вариант нелокального граничного условия для численной схемы Кранка — Николсона [17]. Стандартная

схема Кранка — Николсона показывает весьма точные результаты при отсутствии горизонтальных препятствий, однако в некоторых случаях требует использования достаточно густой расчетной сетки, что отрицательно влияет на производительность [18]. Для учета эффектов рассеяния на неоднородностях ландшафта или городской застройки необходимо применять более точные методы [12], например используемые в гидроакустике аппроксимации Паде уравнения Гельмгольца.

Следует отметить, что метод нелокальных граничных условий для решения аналогичных задач в неограниченной области широко применяется в гидроакустике и квантовой механике [19, 20]. Существует серия работ, посвященная нелокальным граничным условиям для рациональных аппроксимаций Паде уравнения Гельмгольца в задачах гидроакустики, когда неоднородность вне области интегрирования можно считать константой [21-23]. Дополнительную сложность в задаче тропосферного распространения создает тот факт, что эффективный индекс преломления, позволяющий учитывать кривизну земной поверхности, является линейно растущей функцией.

Целью настоящего исследования является построение и анализ дискретного нелокального граничного условия для аппроксимации Паде уравнения Гельмгольца, учитывающего линейно растущий коэффициент преломления.

Поясним структуру данной работы. В разделе 2 представлена постановка задачи распространения электромагнитных волн вблизи земной поверхности с известной диаграммой направленности излучающей антенны, параметрами земной поверхности и индексом преломления тропосферы. Раздел 3 посвящен параболическому уравнению и обзору известных методов его численного решения. В разделе 4 сформирована численная схема построения решения задачи при помощи метода рациональных аппроксимаций Паде. Разделе 5 посвящен дискретному нелокальному граничному условию для построенной ранее численной схемы. В разделе 6 приведены результаты численного моделирования и выполнено сравнение с существующими подходами.

2. Постановка задачи. Задача распространения монохроматических электромагнитных волн вблизи земной поверхности заключается в нахождении комплексного поля $\psi(x, z)$ в полубесконечной области $\Omega = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq z < \infty\}$. Функция $\psi(x, z)$, записанная в переменных Пекериса [12], удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 m^2(x, z) \psi = 0, \quad (1)$$

где $k_0 = 2\pi / \lambda$ — волновое число в вакууме, λ — длина волны, $m^2(x, z) = 1 + 2N(x, z) + 2z / R$, $N(x, z)$ — индекс преломления тропосферы, R — радиус Земли. Поле $\psi(x, z)$ отвечает азимутальной компоненте электрического или магнитного поля для вертикальной или горизонтальной поляризации соответственно.

Обычно предполагается, что индекс преломления тропосферы не претерпевает существенных изменений на высотах больше нескольких километров. Таким образом, можно считать, что функция $N(x, z)$ финитна и обращается в ноль при $z > z_b$.

Функция $\psi(x, z)$ удовлетворяет импедансному граничному условию на поверхности Земли:

$$\left(q_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} + q_2 \psi \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

где q_1 и q_2 — комплексные числа, которые выражаются через проводимость σ и диэлектрическую проницаемость ϵ подстилающей поверхности следующим образом:

$$q_2 = \begin{cases} (\epsilon + i60\sigma\lambda)^{1/2} & \text{горизонтальная поляризация} \\ (\epsilon + i60\sigma\lambda)^{-1/2} & \text{вертикальная поляризация} \end{cases},$$

$$q_1 = 1.$$

Также требуется, чтобы:

$$\psi \Big|_{z \rightarrow +\infty} = 0. \quad (3)$$

Характерной особенностью рассматриваемой задачи является тот факт, что волновое поле порождается начальным условием:

$$\psi(0, z) = \psi_0(z) \quad (4)$$

с некоторой известной функцией $\psi_0(z)$, отвечающей диаграмме направленности антенны. В качестве $\psi_0(z)$ часто выбирается Гауссов пучок, определяемый соотношением [12]:

$$\psi_0(z) = \frac{k_0 \beta}{2\sqrt{\pi} \log 2} \exp(-ik_0 \theta z) \exp\left(-\frac{\beta^2}{8 \log 2} k_0^2 (z - z_0)^2\right),$$

где z_0 — высота источника, β — ширина диаграммы направленности и θ — угол наклона антенны.

3. Метод параболического уравнения. Осуществляя переход к парааксиальному приближению при помощи замены $u(x, z) = e^{-ik_0x}\psi(x, z)$, уравнение (1) запишется относительно функции $u(x, z)$ в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_0^2 (m^2(x, z) - 1)u = 0. \quad (5)$$

Следуя общепринятой методологии [12], можно записать уравнение для волн, распространяющихся в положительном направлении по продольной координате:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik(\sqrt{1+L} - 1)u, \quad (6)$$

$$Lu = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (m^2 - 1)u.$$

Уравнение (6) примет вид стандартного параболического уравнения Леонтовича — Фока [24] после замены квадратного корня его разложением по формуле Тейлора до слагаемого первого порядка. Применяя для квадратного корня аппроксимацию Паде [25] порядка [1/1], можно получить широкоугольное параболическое уравнение (Claerbout approximation) [12].

Наибольшую популярность для построения численного решения параболического уравнения в задачах распространения радиоволн приобрел метод расщепления Фурье (split-step Fourier method) [12]. Он позволяет строить решения для стандартного и широкоугольного параболического уравнения. Достоинством метода является возможность выбирать достаточно большие расстояния между узлами расчетной сетки по продольной и поперечной координате, что хорошо сказывается на производительности. Главным недостатком метода является трудоемкий учет граничных условий. Для учета нижнего импедансного условия (2) необходимо использовать метод смешанного преобразования Фурье [12], численная реализация которого является условно устойчивой. Это накладывает ограничения на минимальный шаг сетки и приводит к расходимости, например, при расчете поля над сильно взволнованной морской поверхностью [13]. Кроме того, для устранения ложных отражений от верхней границы расчетной области необходимо использовать искусственный поглощающий слой [12, 13], параметры которого не могут быть определены строго. Таким образом,

определить точность получаемого решения в некоторых случаях бывает весьма затруднительно.

Другим часто используемым подходом является использование конечно-разностной схемы Кранка — Николсона для тех же видов параболического уравнения. Условие (2) в этом случае выводится непосредственно [12] и не приводит к неустойчивым решениям. Кроме того, для конечно-разностной схемы возможно построение дискретного НГУ на верхней границе расчетной области, что снимает необходимость введения искусственного поглощающего слоя. Недостатком метода является необходимость использовать меньшую расчетную сетку по сравнению с методом расщепления Фурье, что требует несколько больших вычислительных затрат. Аппроксимации Паде высокого порядка, использованные в настоящей работе, призваны частично решить эту проблему.

Следует учитывать, что имеется теоретическое обоснование однонаправленного уравнения Гельмгольца и его параболических приближений [26, 27].

4. Решение методом расщепления Паде. Пошаговое решение уравнения (6) для волн, распространяющихся в положительном направлении, формально записывается следующим образом:

$$u(x + \Delta x, z) = \exp\left(ik_0\Delta x(\sqrt{1+L}) - 1\right)u(x, z). \quad (7)$$

В работе [28] предложен метод аппроксимации операторной экспоненты (7) при помощи аппроксимаций Паде [25]. Запишем аппроксимацию Паде порядка $[n / m]$ в виде:

$$e^{ik_0\Delta x(\sqrt{1+L}-1)} \approx \frac{\prod_{l=1}^n 1 + a_l L}{\prod_{l=1}^m 1 + b_l L}. \quad (8)$$

Точность аппроксимации (8) влияет на максимальный угол распространения и максимально допустимый шаг Δx при построении численного решения.

Обозначим решение уравнения (6) на расстоянии $n\Delta x$ как u^n . Тогда пошаговое решение запишется в виде:

$$u^{n+1} = \prod_{l=1}^p \frac{1 + a_l L}{1 + b_l L} u^n, \quad (9)$$

где $p = \max(n, m)$, $a_{p+1}, \dots, a_n, b_{p+1}, \dots, b_n = 0$.

Вводя вспомогательные функции $v_1^{n+1}, v_2^{n+1}, \dots, v_{p-1}^{n+1}$, отвечающие граничным условиям (2) и (3), перепишем (7) в виде системы p дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} (1+b_1L)v_1^n = (1+a_1L)u^{n-1} \\ (1+b_lL)Lv_l^n = (1+a_lL)v_{l-1}^n \quad l = 2, \dots, p-1. \\ (1+b_1L)Lu^n = (1+a_1L)v_{p-1}^n \end{cases} \quad (10)$$

Введем равномерную сетку по переменной z с шагом h и выпишем дискретный аналог оператора L :

$$L_h u_j^n = k_0^{-2} D_h^2 u_j^n + \alpha_j^n u_j^n,$$

где $\alpha_j^n = m^2(n\Delta x, jh)$.

Дискретный оператор дифференцирования D_h^2 с учетом импедансного условия (2) запишется следующим образом:

$$D_h^2 u_0^n = \frac{q_2 h - q_1}{q_1 h^2} u_0^n + \frac{2}{h^2} u_1^n,$$

$$D_h^2 u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = \frac{\partial^2 u^n}{\partial z^2} + O(h^2), j \geq 1.$$

Заменяя оператор L конечно-разностным аналогом, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} -a_1 D_h^2 u_j^{n-1} + b_1 D_h^2 v_{j,1}^n = k_0^2 (1+a_1 \alpha_j^n) u_j^{n-1} - k_0^2 (1+b_1 \alpha_j^n) v_{j,1}^n \\ -a_l D_h^2 v_{j,l-1}^n + b_l D_h^2 v_{j,l}^n = k_0^2 (1+a_l \alpha_j^n) v_{j,l-1}^n - k_0^2 (1+b_l \alpha_j^n) v_{j,l}^n \\ \dots \\ -a_p D_h^2 v_{j,p-1}^n + b_p D_h^2 u_j^n = k_0^2 (1+a_p \alpha_j^n) v_{j,p-1}^n - k_0^2 (1+b_p \alpha_j^n) u_j^n \end{cases} \quad ; \quad (11)$$

$$l = 2, \dots, p-1.$$

Система (11) решается последовательно. Каждое из равенств в (11) представляет собой систему линейных алгебраических уравне-

ний с трехдиагональной матрицей, которое решается методом прогонки за линейное время.

Основанная на аппроксимации Паде численная схема (11) является устойчивой при условии $0 \leq m - n \leq 2$ [29]. Если дополнительно потребовать строгое неравенство $m > n$, то можно показать [12], что ошибки округления, связанные с появлением эванесцентных волн, будут затухать в процессе вычисления. Далее в расчетных примерках использовалась схема $[n - 1/n]$.

5. Дискретное НГУ. Впервые НГУ для параболического уравнения, способное учитывать линейно растущий индекс преломления, предложено в работе [16]. Недостатки этого подхода, связанные с плохой согласованностью сеточной схемы и построенного НГУ, были устранены в работе [17], где, как и в настоящей работе, нелокальное условие выписывается непосредственно для численной схемы. Для широкоугольного параболического уравнения дискретное НГУ исследовалось в работе [30]. Серия исследований [21-23] посвящена изучению НГУ для аппроксимаций Паде в задачах гидроакустики с постоянным индексом преломления вне расчетной области. Также следует упомянуть работу [20], в которой НГУ для линейного уравнения Шредингера с линейно растущим потенциалом выписаны без использования специальных функций.

Обозначим верхнюю границу интересующей области интегрирования, как $z_b = Jh$. Далее предполагается, что функция $\psi_0(z)$, отвечающая начальному условию (4), и коэффициент преломления $N(x, z)$ обращаются в ноль при $z \geq z_b$. Перепишем функцию $m^2(x, z)$ в виде:

$$m^2(x, z) = 1 + 2N(x, z) + \beta + \gamma z.$$

Тогда при $j \geq J$ оператор L_h примет вид:

$$L_h u_j^n = k_0^{-2} D_h^2 u_j^n + (\beta + \gamma jh) u_j^n.$$

Применим к системе уравнений (11) при $j \geq J$ z-преобразование по продольной координате, определяемое следующим образом:

$$\mathcal{Z}\{u_j^n\} = \hat{u}_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-n} u_j^n,$$

где $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| > R_c$, R_c — радиус сходимости.

Запишем полученную систему в матричной форме относительно вектора $\widehat{\Psi}_j = (\widehat{\phi}_{j,1} \ \dots \ \widehat{\phi}_{j,p-1} \ \widehat{\psi}_j)$:

$$\mathbf{A} D_h^2 \widehat{\Psi}_j = k_0^2 (\mathbf{B} - (\beta + \gamma j h) \mathbf{A}) \widehat{\Psi}_j, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \xi b_1 & & & -a_1 \\ -a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -a_{p-1} & b_{p-1} \\ & & & -a_p & b_p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\xi & & & & 1 \\ 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем решение обобщенной задачи на собственные значения для матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1}, \quad (13)$$

где $\mathbf{J} = \text{diag}\{s_1, s_2 \dots s_p\}$, \mathbf{P} — матрица, составленная из правых собственных векторов. s_i являются корнями характеристического многочлена:

$$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}| = \xi \prod_{l=1}^p (\lambda b_l - 1) - \prod_{l=1}^p (\lambda a_l - 1),$$

который имеет p различных корней [22].

Для вычисления матриц \mathbf{P} и \mathbf{J} наиболее эффективно использовать обобщенное разложение Шура [31].

После замены $\widehat{\Psi}_j = \mathbf{P} \widehat{\chi}_j$, система уравнений (12) запишется в виде:

$$D_h^2 \hat{\chi}_j = k_0^2 (\mathbf{J} - (\beta + \gamma j h \mathbf{I})) \hat{\chi}_j. \quad (14)$$

Система (14) состоит из p независимых разностных уравнений:

$$D_h^2 \chi_{j,l} = k_0^2 (s_l - \beta - \gamma j h) \chi_{j,l}. \quad (15)$$

Рассмотрим сначала случай $\gamma = 0$. Тогда то из решений уравнения (15), которое стремится к нулю при $j \rightarrow +\infty$, запишется в виде $\chi_{j,l} = \mu_l^j$, где $|\mu_l| < 1$ выбирается из равенства $\mu_l - 2 + \mu_l^{-1} = k_0^2 h^2 (s_l - \beta)$. Далее легко выписать соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{J-1} &= \hat{\mathbf{D}}(\xi) \hat{\Psi}_J, \\ \hat{\mathbf{D}}(\xi) &= \mathbf{P} \text{diag} \{ \mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_p^{-1} \} \mathbf{P}^{-1}. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к общему случаю $\gamma \neq 0$. Разностное соотношение (15) представляет собой дискретный вариант уравнения Эйри. Следуя работе [14], его решение может быть выписано в явном виде

$$\begin{aligned} \chi_{j,l} &= J_{\sigma_{j,l}} \left(-\frac{2}{k_0^2 h^3 \gamma} \right), \\ \sigma_{j,l} &= j - (2 + w_l + \beta) / k_0^2 h^3 \gamma, \end{aligned}$$

где J — функция Бесселя первого рода.

Матрица $\hat{\mathbf{D}}(\xi)$ в этом случае примет вид:

$$\hat{\mathbf{D}}(\xi) = \mathbf{P} \text{diag} \left\{ \frac{\chi_{J-1,1}}{\chi_{J,1}}, \frac{\chi_{J-1,2}}{\chi_{J,2}}, \dots, \frac{\chi_{J-1,p}}{\chi_{J,p}} \right\} \mathbf{P}^{-1}.$$

Диагональные элементы $\chi_{J-1,l} / \chi_{J,l}$ представляют собой отношение функций Бесселя, которое может быть эффективно вычислено алгоритмом Ленца [32] путем разложения в цепную дробь.

Применяя обратное z -преобразование, с учетом финитности функции $\psi_0(z)$, приходим к дискретному нелокальному граничному условию вида:

$$\Psi_{J-1} - \mathbf{D}^0 \Psi_J^n = \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{D}^m \Psi_J^{n-m}, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{D}^m = \frac{\tau^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{\mathbf{D}}(\tau e^{i\varphi}) e^{im\varphi} d\varphi, \tau > 1. \quad (17)$$

Вычисление матрицы $\widehat{\mathbf{D}}(\xi)$ представляет собой трудоемкую операцию, число которых желательно минимизировать. Для эффективного вычисления обратного преобразования (17) был использован адаптивный алгоритм численного интегрирования, основанный на аппроксимации подынтегральной функции полиномами Чебышева произвольного порядка [33].

По аналогии с работой [22] можно показать, что интеграл $\int_0^{2\pi} \mathbf{P}(\tau e^{i\varphi}) d\varphi$ представляет собой нижнетреугольную матрицу. Значит, матрица \mathbf{D}^0 также является нижнетреугольной, что дает возможность применять нелокальное условие (16) последовательно для функций $v_{j,1}^{n+1}, v_{j,2}^{n+1}, \dots, v_{j,p-1}^{n+1}, u_j^{n+1}$ при решении системы уравнений (11) на каждом шаге по продольной координате.

Следует отметить, что по существу коэффициенты свертки \mathbf{D}^m в НГУ (16) зависят только от длины волны и высоты расчетной области. В тоже время они не зависят от параметров среды распространения и излучающей антенны. Таким образом, коэффициенты НГУ могут быть подсчитаны заранее для использования в системах, требующих высокую скорость вычислений.

6. Результаты численного моделирования. Сначала будет рассмотрен случай однородной тропосферы при $N(x, z) \equiv 0$, так как на этом примере проще всего оценить эффективность НГУ. Хорошо известно [12], что в загоризонтной области при отсутствии волноводных эффектов функция $\psi(x, z)$ экспоненциально затухает по продольной координате. Эффективный индекс преломления $m^2(x, z)$ в этом случае представляет собой линейно растущую по высоте функцию. Сравнение предложенного метода будет проводиться с двумя широко используемыми подходами: программой PETOOL [18], осуществляющей численное решение задачи методом расщепления Фурье с использованием поглощающего слоя и с методом Кранка — Николсона для стандартного параболического уравнения с использованием дискретного НГУ [14]. На рисунке 1 изображено распределение функции $10 \log |\psi(x, z)|$ на высоте 30 м для следующих параметров антенны и среды: длина волны $\lambda = 0.03$ м, высота антенны

$z_0 = 30$ м, ширина диаграммы направленности $\beta = 30^\circ$, горизонтальная поляризация, нижняя граница соответствует гладкой морской поверхности. Расчетные параметры указаны в таблице 1.

Таблица 1. Расчетные параметры для использованных численных алгоритмов.
Случай однородной тропосферы

Расчетный параметр	PETOOL	Кранк-Николсон с НГУ	Паде-[1/2] с НГУ
Δx , м	30	10	100
Δz , м	0.3	0.03	0.03
Высота расчетной области, м	300	300	300
Время расчета поля, сек	5.43	9.19	1.65
Время расчета коэффициентов НГУ, сек	-	48.2	113.5

Как видно из рисунка 1, поглощающий слой, используемый в программе PЕTOOL, для выбранных параметров позволяет рассчитывать поле на расстояниях до 60 км и обеспечивает точное решение в динамическом диапазоне 60 дБ. Метод Кранка-Николсона для стандартного параболического уравнения с дискретными НГУ позволил рассчитать поле на 95 км и обеспечил точность в 90 дБ. Предложенный метод показал себя наиболее эффективно, позволив рассчитать поле в однородной тропосфере с точностью 120 дБ при наименьших временных затратах. Отметим, что все вычисления проводились в стандартной арифметике двойной точности (16 десятичных цифр).

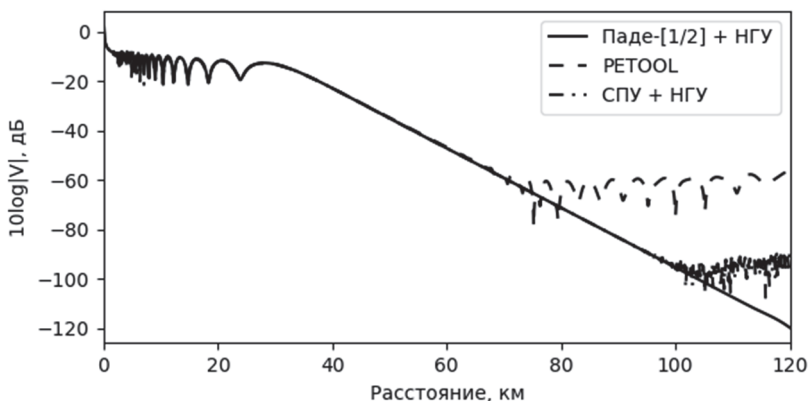


Рис. 1. Распределение функции $10 \log |V|$ на высоте 30 м

Далее рассмотрен пример с наличием горизонтального препятствия, схематично изображенный на рисунке 2. Методы учета гори-

зонтальных препятствий в однонаправленном приближении изложены, например, в [12]. На границах препятствия и подстилающей поверхности искомая компонента электромагнитного поля удовлетворяет условиям Дирихле. Препятствие расположено на расстоянии $L = 500$ м от источника, высота $H = 100$ м, толщина $h = 50$ м. Были использованы следующие параметры антенны: $\lambda = 1$ м, $z_0 = 50$ м, $\beta = 30^\circ$. Индекс преломления тропосферы аналогичен предыдущему примеру. Расчетные параметры указаны в таблице 2.

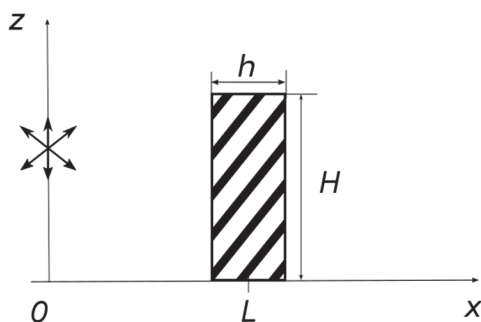


Рис. 2. Рассеяние на препятствии

Таблица 2. Расчетные параметры для использованных численных алгоритмов. Случай однородной тропосферы

Расчетный параметр	PETOOL	Кранк-Николсон с НГУ	Паде-[3/4] с НГУ
Δx , м	1	0.5	1
Δz , м	0.2	0.1	0.1
Высота расчетной области, м	300	300	300
Время расчета поля, сек	5.18	0.73	0.94
Время расчета коэффициентов НГУ, сек	-	5.5	3.37

На рисунке 3 показано распределение поля за препятствием на высоте 10 м. Хорошо видно, что решение, полученное методом Кранк — Николсона, достаточно зашумленное. Это вызвано тем, что при рассеянии на препятствии возникают высокочастотные быстро затухающие осцилляции и связанные с ними ошибки округления, которые метод Кранка — Николсона отфильтровать не способен. Кроме того, хорошо виден провал на промежутке 550-690 м, вызванный ограничением сеточного метода на максимальный угол распространения, преодолеть которое можно лишь очень маленьким шагом сетки. Решения, полученные предложенным методом и методом расщепления Фурье до-

статочны гладкие, что объясняется их регуляризирующими свойствами. Следует также отметить, что решение методом Кранка-Николсон получено для стандартного параболического уравнения Леонтовича-Фока, в то время как РЕТООЛ и Паде схема используют различные варианты широкоугольного параболического приближения. Этим объясняются определенные различия в интерференционной картине.

Описанный метод реализован в виде программной библиотеки на языке Python 3 и свободно доступен по адресу [34].

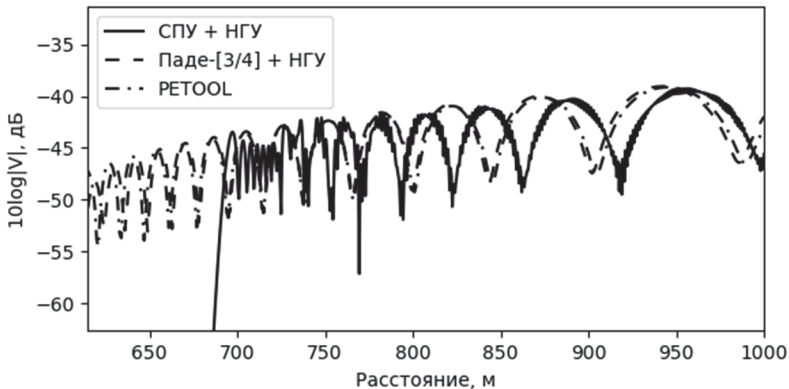


Рис. 3. Распределение функции $10 \log |V|$ на высоте 10 м

7. Заключение. Построены дискретные нелокальные граничные условия для дробно рациональных аппроксимаций однонаправленного уравнения Гельмгольца. Полученные условия учитывают линейно растущий коэффициент преломления за пределами расчетной области. Предлагаемый подход позволяет решать задачу распространения электромагнитных волн вблизи земной поверхности без введения искусственного поглощающего слоя и прочих эмпирических приемов. Построенный алгоритм численного решения не требует ручного подбора расчетных параметров в зависимости от входных данных. Показано, что метод рациональных аппроксимаций можно эффективно применять в задаче расчета характеристик распространения СВЧ радиоволн на дальние расстояния в широком динамическом диапазоне. Аппроксимации Паде позволяют использовать достаточно большой шаг сетки по продольной координате, что делает его более предпочтительным по сравнению с другими алгоритмами. Проведенные эксперименты показывают, что производительность предложенного алгоритма выше, чем метода расщепления Фурье. Также продемонстрирована работа алгоритма в горизонтально неоднородной среде.

Перспективным направлением дальнейших исследований является применение разработанного метода к расчету электромагнитного поля в трехмерно неоднородной среде и учет обратного рассеяния по аналогии с работами [35, 36]. Кроме того, введение нелокальных условий на нижней границе расчетной области может применяться для эффективного вычисления поля над взволнованной морской поверхностью.

Литература

1. *Романов А.В. и др.* Обобщенное описание и классификация моделей эколого-технологических объектов наземно-космического мониторинга // Труды СПИИРАН. 2013. Вып. 5(28). С. 122–142.
2. *Zavorotny V.U., Gleason S., Cardellach E., Camps A.* Tutorial on remote sensing using GNSS bistatic radar of opportunity // IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine. 2014. vol. 2. no. 4. pp. 8–45.
3. *Михайлов М.И., Музалевский К.В., Миронов В.Л.* Измерение толщины льда на пресноводном пруде и реке с использованием сигналов ГЛОНАСС и GPS // Современные проблемы ДЗЗ из космоса. 2017. Т. 14. № 2. С. 167–174.
4. *Wang H. et al.* Modeling signal amplitude of ground-based GPS occultation in marine tropospheric ducts // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2014. vol. 28. no. 11. pp. 1293–1304.
5. *Dinc E., Akan O.B.* Beyond-line-of-sight communications with ducting layer // IEEE Commun. Mag. 2014. vol. 52. no. 10. pp. 37–43.
6. *Dabrowski T., Barott W.C., Himed B.* Effect of propagation model fidelity on passive radar performance predictions // Proceedings of IEEE Radar Conference (Radar-Con'2015). 2015. pp. 1503–1508.
7. *Светличный В.А., Смирнова О.В.* Применение геоинформационных систем для оперативного прогнозирования радиолокационной наблюдаемости объектов // Информация и космос. 2014. Т. 4. № 4. С. 73–76.
8. *Fountoulakis V., Earls C.* Duct heights inferred from radar sea clutter using proper orthogonal bases // Radio Science. 2016. vol. 51. no. 10. pp. 1614–1626.
9. *Zhang Q., Yang K., Shi Y.* Spatial and temporal variability of the evaporation duct in the Gulf of Aden // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. 2016. vol. 68. Issue 1. pp. Article no. 29792.
10. *Zhang R. et al.* Measurement and modeling of angular spreads of three-dimensional urban street radio channels // IEEE Trans. Veh. Technol. 2017. vol. 66. no. 5. pp. 3555–3570.
11. *Brookner E., Cornely P.-R., Lok Y.F.* AREPS and TEMPER: getting familiar with these powerful propagation software tools // Proceedings of IEEE Radar Conference (RadarCon'2007). 2007. pp. 1034–1043.
12. *Levy M.F.* Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation // London: IEEE. 2000. 349 p.
13. *Zhang P., Bai L., Wu Z., Guo L.* Applying the Parabolic Equation to Tropospheric Groundwave Propagation: A review of recent achievements and significant milestones // IEEE Antennas Propag. Mag. 2016. vol. 58. no. 3. pp. 31–44.
14. *Акулиничев Ю.П., Захаров Ф.Н., Пермяков В.А., Михайлов М.С.* Состояние и перспективы развития методов численного решения параболического уравнения // Известия высших учебных заведений. Физика. 2016. Т. 59. № 12-3. С. 169–177.
15. *Vavilov S.A., Lytaev M.S.* Calibration and Verification of Models Defining Radar-Visibility Zones in Marine Geoinformation Systems // Proceedings of the 8th international Symposium on Information Fusion and Intelligent Geographic Information Systems (IF&IGIS'17). 2018. pp. 115–125.

16. *Levy M.F.* Transparent boundary conditions for parabolic equation solutions of radio-wave propagation problems // IEEE Trans. Antennas Propag. 1997. vol. 45. no. 1. pp. 66–72.
17. *Ehrhardt M., Mickens R.E.* Solutions to the discrete Airy equation: Application to parabolic equation calculations // J. Comput. Appl. Math. 2004. vol. 172. no. 1. pp. 183–206.
18. *Apaydin G., Sevgi L.* Radio Wave Propagation and Parabolic Equation Modeling // New Jersey: John Wiley & Sons. 2017. 152 p.
19. *Ehrhardt M.* Discrete transparent boundary conditions for Schrodinger-type equations for non-compactly supported initial data // Appl. Numer. Math. 2008. vol. 58. no. 5. pp. 660–673.
20. *Feshchenko R.M., Popov A.V.* Exact transparent boundary conditions for the parabolic wave equations with linear and quadratic potentials // Wave Motion. 2017. vol. 68. pp. 202–209.
21. *Schmidt F., Friese T., Yevick D.* Transparent boundary conditions for split-step Pade approximations of the one-way Helmholtz equation // J. Comput. Phys. 2001. vol. 170. no. 2. pp. 696–719.
22. *Mikhin D.* Exact discrete nonlocal boundary conditions for high-order Pade parabolic equations // J. Acoust. Soc. Am. 2004. vol. 116. no. 5. pp. 2864–2875.
23. *Ehrhardt M., Zisowsky A.* Discrete non-local boundary conditions for split-step Pade approximations of the one-way Helmholtz equation // J. Comput. Appl. Math. 2007. vol. 200. no. 2. pp. 471–490.
24. *Леонтович М.А., Фок В.А.* Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения // Журн. эксперим. и теор. физики. 1946. Т. 16. С. 557–573.
25. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде // М.: Мир. 1986. 502 с.
26. *Bamberger A., Engquist B., Halpern L., Joly P.* Higher order paraxial wave equation approximations in heterogeneous media // SIAM J. Appl. Math. 1988. vol. 48. no. 1. pp. 129–154.
27. *Fishman L., Gautesen A.K., Sun Z.* Uniform high-frequency approximations of the square root Helmholtz operator symbol // Wave Motion. 1997. vol. 26. no. 2. pp. 127–161.
28. *Collins M.D.* A split-step Pade solution for the parabolic equation method // The Journal of the Acoustical Society of America. 1993. vol. 93. no. 4. pp. 1736–1742.
29. *Butcher J.C.* Numerical methods for ordinary differential equations // John Wiley & Sons. 2016. 479 p.
30. *Вавилов С. А., Лытаев М. С.* Особенности применения нелокальных граничных условий в задаче тропосферного распространения радиоволн // Труды учебных заведений связи. 2017. Т. 3. № 1. С. 13–20.
31. *Golub G.H., Van Loan C.F.* Matrix computations // Baltimore: JHU Press. 2012. 784 p.
32. *Lentz W.J.* Generating Bessel functions in Mie scattering calculations using continued fractions // Applied Optics. 1976. vol. 15. no. 3. pp. 668–671.
33. *Majidian H.* Filon–Clenshaw–Curtis formulas for highly oscillatory integrals in the presence of stationary points // Appl. Numer. Math. 2017. vol. 117. pp. 87–102.
34. Wave-propagation. URL: <https://github.com/mikelytaev/wave-propagation> (дата обращения: 19.12.2017).
35. *Mills M.J., Collins M.D., Lingeitch J.F.* Two-way parabolic equation techniques for diffraction and scattering problems // Wave Motion. 2000. vol. 31. no. 2. pp. 73–180.
36. *Ahdab Z., Akleman F.* Radiowave propagation analysis with a bidirectional 3-D vector parabolic equation method // IEEE Trans. Antennas Propag. 2017. vol. 65. no. 4. pp. 1958–1966.

Лытаев Михаил Сергеевич — аспирант кафедры сетей связи и передачи данных, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича (СПбГУТ). Область научных интересов: численные методы, математическая физика. Число научных публикаций — 7. mikelytaev@gmail.com; Большевигов 22, корп.1, ауд. 506, Санкт-Петербург, 193232; п.т.: +79213391600.

M.S. LYTAEV

A NUMERICAL METHOD FOR ESTIMATING TROPOSPHERIC RADIO WAVE PROPAGATION FOR REMOTE MONITORING GEOINFORMATION SYSTEMS

Lytaev M.S. A Numerical Method for Estimating Tropospheric Radio Wave Propagation for Remote Monitoring Geoinformation Systems.

Abstract. Present research deals with the numerical methods for the electromagnetic wave propagation around the Earth. The non-local boundary conditions for finite-difference Pade approximation of the one-way Helmholtz equation are obtained. A linear dependence of the refractive index on the height outside the computational domain can be taken into account. Thus, the proposed method is suitable for tropospheric radio wave propagation problems. The proposed approach gives an opportunity to solve the original problem without introducing artificial absorbing layer in the vicinity of the upper boundary. Pade approximants allows one to carry out the calculations with a rather large step along the longitudinal coordinate, which has a positive effect on performance. The method does not impose any significant limitations on the maximum propagation angle and can be used for two-dimensional scattering problems. Comparison with the results obtained by the split-step Fourier method and Crank-Nikolson scheme is given.

Keywords: non-local boundary condition, radio wave propagation, Helmholtz equation, Pade approximations, parabolic equation

Lytaev Mikhail Sergeevich — Ph.D. student of communications networks department, The Bonch-Bruевич Saint - Petersburg State University of Telecommunications (SPbSUT). Research interests: numerical methods for wave propagation problems. The number of publications — 7. mikelytaev@gmail.com; 22, Bol'shevikov, building 1, room 506, St-Petersburg, 193232, Russia; office phone: +79213391600.

References

1. Romanovs A.V. et al. [General description and classification of the models of ecological and technological objects ground-space monitoring]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2013. vol. 28. pp. 122–142. (In Russ.).
2. Zavorotny V.U., Gleason S., Cardellach E., Camps A. Tutorial on remote sensing using GNSS bistatic radar of opportunity. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine*. 2014. vol. 2. no. 4. pp. 8–45.
3. Mikhailov M.I., Muzalevskiy K.V., Mironov V.L. [Ice thickness measurements at freshwater lake and river using GLONASS and GPS signals]. *Sovremennye problemy DZZ iz kosmosa – Current problems in remote sensing of the earth from space*. 2017. vol. 14. no. 2. pp. 167–174. (In Russ.).
4. Wang H. et al. Modeling signal amplitude of ground-based GPS occultation in marine tropospheric ducts. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2014. vol. 28. no. 11. pp. 1293–1304.
5. Dinc E., Akan O.B. Beyond-line-of-sight communications with ducting layer. *IEEE Commun. Mag.* 2014. vol. 52. no. 10. pp. 37–43.
6. Dabrowski T., Barott W.C., Himed B. Effect of propagation model fidelity on passive radar performance predictions. Proceedings of IEEE Radar Conference (Radar-Con'2015). 2015. pp. 1503–1508.
7. Svetlichny V., Smirnova O. [Geoinformation systems for the operational prediction of radar observability for marine objects]. *Informacija i kosmos – Information and space*. 2014. vol. 4. pp. 73–76. (In Russ.).

8. Fountoulakis V., Earls C. Duct heights inferred from radar sea clutter using proper orthogonal bases. *Radio Science*. 2016. vol. 51. no. 10. pp. 1614–1626.
9. Zhang Q., Yang K., Shi Y. Spatial and temporal variability of the evaporation duct in the Gulf of Aden. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 2016. vol. 68. Issue 1. pp. Article no. 29792.
10. Zhang R. et al. Measurement and modeling of angular spreads of three-dimensional urban street radio channels. *IEEE Trans. Veh. Technol.* 2017. vol. 66. no. 5. pp. 3555–3570.
11. Brookner E., Cornely P.-R., Lok Y.F. AREPS and TEMPER: getting familiar with these powerful propagation software tools. Proceedings of IEEE Radar Conference (RadarCon'2007). 2007. pp. 1034–1043.
12. Levy M.F. Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation. London: IEE. 2000. 349 p.
13. Zhang P., Bai L., Wu Z., Guo L. Applying the Parabolic Equation to Tropospheric Groundwave Propagation: A review of recent achievements and significant milestones. *IEEE Antennas Propag. Mag.* 2016. vol. 58. no. 3. pp. 31–44.
14. Akulinichev Y.P., Zakharov F.N., Permyakov V.A., Mikhailov M.S. [State of the art methods for numerical solution of the parabolic equation]. *Izvestia vuzov. Fizika – Proceedings of the higher educational institutions: Physics*. 2016. vol. 59. no. 12-3. pp. 169–177. (In Russ.).
15. Vavilov S.A., Lytaev M.S. Calibration and Verification of Models Defining Radar-Visibility Zones in Marine Geoinformation Systems. Proceedings of the 8th international Symposium on Information Fusion and Intelligent Geographic Information Systems (IF&IGIS'17). 2018. pp. 115–125.
16. Levy M.F. Transparent boundary conditions for parabolic equation solutions of radiowave propagation problems. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1997. vol. 45. no. 1. pp. 66–72.
17. Ehrhardt M., Mickens R.E. Solutions to the discrete Airy equation: Application to parabolic equation calculations. *J. Comput. Appl. Math.* 2004. vol. 172. no. 1. pp. 183–206.
18. Apaydin G., Sevgi L. Radio Wave Propagation and Parabolic Equation Modeling. New Jersey: John Wiley & Sons. 2017.
19. Ehrhardt M. Discrete transparent boundary conditions for Schrodinger-type equations for non-compactly supported initial data. *Appl. Numer. Math.* 2008. vol. 58. no. 5. pp. 660–673.
20. Feshchenko R.M., Popov A.V. Exact transparent boundary conditions for the parabolic wave equations with linear and quadratic potentials. *Wave Motion*. 2017. vol. 68. pp. 202–209.
21. Schmidt F., Friese T., Yevick D. Transparent boundary conditions for split-step Pade approximations of the one-way Helmholtz equation. *J. Comput. Phys.* 2001. vol. 170. no. 2. pp. 696–719.
22. Mikhin D. Exact discrete nonlocal boundary conditions for high-order Pade parabolic equations. *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. vol. 116. no. 5. pp. 2864–2875.
23. Ehrhardt M., Zisowsky A. Discrete non-local boundary conditions for split-step Pade approximations of the one-way Helmholtz equation. *J. Comput. Appl. Math.* 2007. vol. 200. no. 2. pp. 471–490.
24. Leontovich M.A., Fock V.A. Solution of propagation of electromagnetic waves along the Earth's surface by the method of parabolic equations. *Zhurnal Jekspiermental'noj i Teoreticheskoy Fiziki – Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1946. Issue 16. pp. 13–23.
25. Baker J., Graves-Morris P. *Pade approximations*. Addison-Wesley. 1981 (Russ. ed.: Bejker Dzh., Grejvs-Morris P. *Approksimacii Pade*. M.: Mir. 1986. 502 p).
26. Bamberger A., Engquist B., Halpern L., Joly P. Higher order paraxial wave equation approximations in heterogeneous media. *SIAM J. Appl. Math.* 1988. vol. 48. no. 1. pp. 129–154.

27. Fishman L., Gautesen A.K., Sun Z. Uniform high-frequency approximations of the square root Helmholtz operator symbol. *Wave Motion*. 1997. vol. 26. no. 2. pp. 127–161.
28. Collins M.D. A split-step Pade solution for the parabolic equation method. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1993. vol. 93. no. 4. pp. 1736–1742.
29. Butcher J.C. Numerical methods for ordinary differential equations. John Wiley & Sons. 2016. 479 p.
30. Vavilov S.A., Lytaev M.S. [On application of non-local boundary conditions for tropospheric radio wave propagation problems]. *Trudy uchebnyh zavedenij svjazi – Proceedings of educational institutes of communication*. 2017. vol. 3. no. 1. pp. 13–20.
31. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix computations. Baltimore: JHU Press. 2012. 784 p.
32. Lentz W.J. Generating Bessel functions in Mie scattering calculations using continued fractions. *Applied Optics*. 1976. vol. 15. no. 3. pp. 668–671.
33. Majidian H. Filon–Clenshaw–Curtis formulas for highly oscillatory integrals in the presence of stationary points. *Appl. Numer. Math.* 2017. vol. 117. pp. 87–102.
34. Wave-propagation. Available at: <https://github.com/mikelytaev/wave-propagation>. (accessed: 10.01.2018).
35. Mills M.J., Collins M.D., Lingeitch J.F. Two-way parabolic equation techniques for diffraction and scattering problems. *Wave Motion*. 2000. vol. 31. no. 2. pp. 173–180.
36. Ahdab Z., Akleman F. Radiowave propagation analysis with a bidirectional 3-D vector parabolic equation method. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2017. vol. 65. no. 4. pp. 1958–1966.