

О.И. Смоктий
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛОСКОГО
АНИЗОТРОПНО РАССЕИВАЮЩЕГО ОДНОРОДНОГО
СЛОЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ**

Смоктий О.И. **Моделирование полей излучения плоского анизотропно рассеивающего однородного слоя произвольной оптической толщины.**

Аннотация. Проведено моделирование полей излучения плоского однородного слоя произвольной оптической толщины при сильно вытянутых индикатрисах рассеяния. Для реализации этой задачи использовалась модификация классического принципа инвариантности Амбарцумяна — Чандрасекара, позволившая получить новые нелинейные интегральные уравнения для азимутальных Фурье-гармоник обобщенной единой фотометрической функции излучения и фотометрических инвариантов, которые объединяют интенсивности восходящего и нисходящего излучения на произвольных зеркально-симметричных оптических уровнях в зеркальных направлениях визирования при фиксированных азимутах и зенитных расстояниях Солнца. Параметризация полученных нелинейных интегральных уравнений показала, что при отсутствии отражающей подстилающей поверхности на уровне нижней границы слоя пространственно-угловые свойства фотометрических инвариантов и единой фотометрической функции в случае сильно вытянутых индикатрис рассеяния с максимальными значениями вблизи малых углов рассеяния при малом истинном поглощении излучения в среде позволяют приближенно представить общее поле излучения в виде интенсивностей однократно рассеянного излучения с адаптивными поправочными множителями. Эти функциональные поправки обусловлены многократным рассеянием излучения и имеют четкое физическое обоснование. Использование принципа зеркального отображения (симметрии) позволило учесть указанные особенности реальных индикатрис рассеяния при численном моделировании фотометрических инвариантов и единой фотометрической функции. Проведенный анализ показал доминирующую роль однократного рассеяния при формировании полей излучения анизотропно рассеивающего однородного слоя в случае слабого поглощения излучения при сильно вытянутых индикатрисах рассеяния.

Ключевые слова: однородный плоский слой, принцип инвариантности Амбарцумяна — Чандрасекара, нелинейные интегральные уравнения, адаптивная параметризация, фотометрические инварианты, единая фотометрическая функция, коэффициенты яркости, интенсивности поля излучения, однократное рассеяние, поправочные функции, индикатриса Хенъи — Гринштейна.

1. Введение. Проблема численно-аналитического моделирования полей излучения анизотропно рассеивающих и поглощающих природных сред, ограниченных снизу произвольными неортоготно отражающими подстилающими поверхностями, имеет большое теоретическое и прикладное значение [1-7]. Теоретическое значение указанной проблемы обусловлено необходимостью получения высокоточных приближенных решений краевых задач теории переноса излучения в случае реальных индикатрис рассеяния с максимумом вблизи малых углов рассеяния $\gamma \sim 0^\circ$, которые вызывают большие осцилляции указанных решений, потерю их

устойчивости и значительные погрешности в процессе имитационного радиационного моделирования [8-13]. Ее большое прикладное значение определяется важностью решения целого комплекса прямых и обратных задач, связанных с проблемами атмосферной коррекции многоспектральной спутниковой информации и оптики природных экологических систем, в первую очередь, аэрозольно-облачных атмосфер и водных сред, характеризующихся сильным анизотропным рассеянием излучения и одновременно слабым поглощением в них в видимой области спектра $\lambda = 400 - 850$ нм [14-20]. В этой связи актуально получение таких приближенных параметризованных численно-аналитических решений указанной проблемы, которые обладали бы, с одной стороны, достаточно высокой степенью точности, а с другой стороны, были бы простыми по форме своего представления [21-24]. Ниже с этой целью проведено обобщение концепции единой функции $E(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ выхода излучения из среды на внешних границах $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ плоского однородного слоя конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$ на случай единой фотометрической функции $I_{\Sigma}(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ на произвольных оптических глубинах τ внутри среды. Отметим, что первоначально указанная концепция была независимо разработана в [25] и в [26] для коэффициентов яркости $\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ плоского однородного слоя на его внешних границах ($\tau = 0$) и ($\tau = \tau_0$) с использованием разных подходов. В [25] использовалась простая модификация классического принципа инвариантности полей излучения Амбарцумяна — Чандрасекара [1-2] в случае симметричного расположения первичных энергетических источников относительно середины однородного плоского слоя. В [26], послужившей основой для последующей разработки общего принципа зеркального отображения (симметрии) полей излучения однородного плоского слоя и соответствующих фотометрических инвариантов [27-28], проведено линейное преобразование классических структурных функций φ_i^m и ψ_i^m Амбарцумяна, определяющих адекватную линейную трансформацию коэффициентов диффузного отражения $\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ и пропускания $\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ излучения однородным слоем на его верхней ($\tau = 0$) и нижней ($\tau = \tau_0$) границах. Оба подхода позволяют с помощью простых линейных операций однозначно определять симметричные по угловым переменным коэффициенты яркостей $\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$, если

известны значения единой функции выхода $E(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ при взаимной перестановке $\eta \leftrightarrow \xi$.

Проведенное ниже обобщение нелинейного интегрального уравнения [25] для единой функции выхода $E(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ на случай произвольных оптических глубин ($0 < \tau < \tau_0$) и последующая параметризация обобщенной единой фотометрической функции $I_\Sigma(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ на основе экстремальных свойств сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$ вблизи углов рассеяния $\gamma \sim 0^\circ$ позволяет представить общее поле излучения однородного плоского слоя в виде интенсивностей однократно рассеянного излучения с адаптивными поправочными множителями, обусловленными многократно рассеянным излучением в среде. Отметим, что сконструированные таким образом простые аналитические выражения для интенсивностей восходящего и нисходящего излучения при отсутствии отражающего дна могут в дальнейшем эффективно использоваться при численном моделировании полей излучения системы «атмосфера — подстилающая поверхность» на основе обобщенного принципа инвариантности [29]. Последующая аппроксимация отражательных характеристик неоротропных горизонтально-однородных подстилающих поверхностей с помощью известных полуэмпирических моделей [5–7] позволяет количественно исследовать их влияние на поле излучения, анизотропно рассеянного атмосферой в случае сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$. При этом определение степени пространственно-угловой дискретизации параметров входных оптических моделей и искомых интенсивностей излучения $I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$, наряду с их погрешностями в узлах используемых сектор, помогает определить оптимальный уровень информативности радиационного моделирования, при котором возможно эффективное решение прямых и обратных задач теории переноса излучения [13].

2. Параметризация интенсивностей анизотропно рассеянного излучения на произвольных оптических уровнях однородного слоя. Рассмотрим однородный плоский слой конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$, освещенный на уровне его верхней границы ($\tau = 0$) параллельными солнечными лучами, падающими под углом $\theta_0 = \arccos \xi$ относительно внутренней нормали к слою при азимуте Солнца $\varphi_0 = 0$ и создающими монохроматическую освещенность перпендикулярной площадке, равную πS_λ . Индекс длины волны λ при дальнейшем рассмотрении будем опускать. Обозначим также через $\theta = \arccos \eta$ угол между

направлением рассеянного излучения и внутренней нормалью к слою (рисунок 1). Индикатриса атмосферного рассеяния $P(\cos \gamma)$, где γ — угол рассеяния, и альbedo однократного рассеяния Λ предполагаются независимыми от оптической глубины τ .

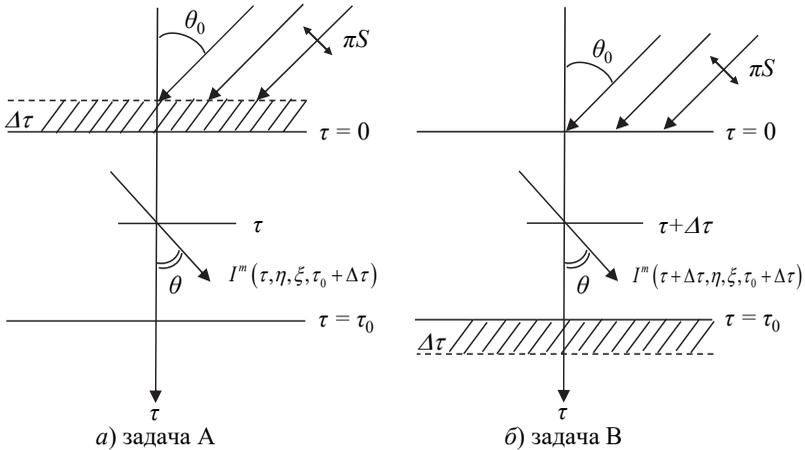


Рис. 1. Применение классического принципа инвариантности Амбарцумяна — Чандрасекара для определения интенсивностей внутренних полей излучения на произвольных оптических уровнях τ

Рассмотрим теперь основную задачу теории переноса излучения, связанную с нахождением интенсивностей излучения $I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ в восходящих ($\eta < 0$) и нисходящих ($\eta > 0$) направлениях визирования на произвольных оптических глубинах $\tau \in [0, \tau_0]$. С целью упрощения последующего численного анализа разложим в ряды Фурье атмосферную индикатрису рассеяния $P(\cos \gamma) = P(\eta, \xi, \varphi)$ и искомую интенсивность излучения $I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ согласно известным представлениям Фурье-анализа:

$$P(\eta, \xi, \varphi) = P^0(\eta, \xi) + 2 \sum_{m=1}^M P^m(\eta, \xi) \cos m\varphi,$$

$$P^m(\eta, \xi) = \sum_{i=m}^M c_i^m \frac{(i-m)!}{(i+m)!} P_i^m(\eta) P_i^m(\xi), \quad c_i^m = x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!}, \quad (1)$$

$$\eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M},$$

$$I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0) = I^0(\tau, \eta, \xi, \tau_0) + 2 \sum_{m=1}^M I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) \cos m\varphi, \quad (2)$$

$$\eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \tau \in [0, \tau_0].$$

где $P_i^m(\eta)$ и $P_i^m(\xi)$ — присоединенные полиномы Лежандра, а x_i — коэффициенты разложения заданной индикатрисы рассеяния $P(\cos \gamma)$ по полиномам Лежандра $P_n(\cos \gamma)$ [3].

Применим далее принцип инвариантности Амбарцумяна — Чандрасекара в его классической интерпретации [1-2] для нахождения азимутальных гармоник интенсивностей $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \tau_0]$, $m \in \overline{0, M}$. Согласно этому принципу добавление (вычитание) на верхней границе плоского слоя ($\tau = 0$) или вычитание (добавление) на его нижней границе ($\tau = \tau_0$) однородного слоя малой оптической толщины $\Delta\tau \ll 1$ с адекватными основному слою оптическими параметрами не изменяет искомую величину $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ на произвольных оптических глубинах $0 < \tau < \tau_0$ внутри слоя (рисунок 1а, б). Таким образом, вследствие однородности нового слоя с оптической толщиной $(\tau_0 + \Delta\tau)$ мы имеем следующее соотношение эквивалентности:

$$I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0 + \Delta\tau) \Big|_A = I^m(\tau + \Delta\tau, \eta, \xi, \tau_0 + \Delta\tau) \Big|_B, \quad m = \overline{0, M}. \quad (3)$$

При этом для того, чтобы условие (3) выполнялось в случае добавления слоя малой оптической толщины $\Delta\tau \ll 1$ к верхней границе $\tau = 0$ исходного слоя (задача А), необходимо заменить в основной краевой задаче теории переноса излучения первоначальное граничное условие $I^m(0, \eta, \xi, \tau_0) = 0$ при $\eta > 0$ на этом уровне на новое граничное условие, учитывающее добавочное излучение, прямо ослабленное и затем рассеянное слоем $\Delta\tau \ll 1$ в направлении оптических глубин $\tau \geq 0$. С учетом данного замечания получаем в задаче А (рисунок 1) следующее интегральное уравнение для определения азимутальных гармоник $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0 + \Delta\tau)$:

$$\begin{aligned}
I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0 + \Delta\tau)|_A &= I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) e^{-\frac{\Delta\tau}{\xi}} + \frac{\Lambda \Delta\tau}{4 \eta} P^m(\eta, \xi) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Theta(\eta) + \\
&+ \frac{\Lambda}{2} \Delta\tau \int_0^1 P^m(\eta', \xi) I^m(\tau, \eta, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} + \\
&+ \frac{\Lambda}{2} \xi \frac{\Delta\tau}{\eta} e^{-\frac{\Delta\tau}{\xi}} e^{-\frac{\tau}{\xi}} \Theta(\eta) \int_0^1 P^m(-\eta', \eta) \rho^m(\eta', \xi, \tau_0) d\eta' + \\
&+ q \int_0^1 d\eta' \int_0^1 P^m(-\eta', \eta) \rho^m(\eta', \xi, \tau_0) I^m(\tau, \eta, \eta'', \tau_0) e^{-\frac{\Delta\tau}{\xi}} \frac{d\eta''}{\eta''},
\end{aligned} \tag{4}$$

где параметр $q = \xi \Lambda \Delta\tau$ и $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \tau_0 + \Delta\tau]$, $m = \overline{0, M}$. Функция Хевисайда $\Theta(\eta)$ в (4) определяется известным образом:

$$\Theta(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta > 0, \\ 0, & \eta \leq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Азимутальные гармоники коэффициентов диффузного отражения $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и пропускания $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$ соответственно на уровне верхней ($\tau = 0$) и нижней ($\tau = \tau_0$) границ рассматриваемого слоя определяются согласно стандартным Фурье-преобразованиям коэффициентов яркости $\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$:

$$\begin{aligned}
\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0) &= \rho^0(\eta, \xi, \tau_0) + 2 \sum_{m=1}^M \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \cos m\varphi, \\
(\eta, \xi) > 0, \varphi &\in [0, 2\pi], \tau \in [0, \tau_0 + \Delta\tau], m = \overline{0, M},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0) &= \sigma^0(\eta, \xi, \tau_0) + 2 \sum_{m=1}^M \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \cos m\varphi, \\
(\eta, \xi) > 0, \varphi &\in [0, 2\pi], m = \overline{0, M}, \tau \in [0, \tau_0 + \Delta\tau].
\end{aligned} \tag{7}$$

Для задачи В, аналогично задаче А, применение классического принципа инвариантности полей излучения Амбарцумяна — Чандрасекара приводит к следующему интегральному уравнению для азимутальных гармоник $I^m(\tau + \Delta\tau, \eta, \xi, \tau_0 + \Delta\tau)$:

$$\begin{aligned}
 I^m(\tau + \Delta\tau, \eta, \xi, \tau_0 + \Delta\tau)|_B &= I^m(\tau + \Delta\tau, \eta, \xi, \tau_0) + \\
 &+ \Delta\Lambda \tau \xi \int_0^1 d\eta' \int_0^1 P^m(\eta', -\eta'') \sigma^m(\eta', \xi, \tau_0) I^m(\tau_0 - \tau - \Lambda\tau, -\eta, \eta'', \tau_0) \frac{d\eta''}{\eta''} - \\
 &- \frac{\Lambda}{2} \xi \frac{\Delta\tau}{\eta} e^{-\frac{\tau_0 - \tau - \Delta\tau}{\eta}} \Theta(-\eta) \int_0^1 P^m(\eta', \eta) \sigma^m(\eta', \xi, \tau_0) d\eta' + \\
 &+ \frac{\Lambda}{2} \Delta\tau e^{-\tau_0/\xi} \int_0^1 P^m(-\eta', \xi) I^m(\tau_0 - \tau - \Delta\tau, -\eta, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} - \\
 &- \frac{\Lambda}{4} \frac{\Delta\tau}{\eta} e^{-\tau_0/\xi} e^{-\frac{\tau - \tau_0 + \Delta\tau}{\eta}} P^m(\eta, \xi) \Theta(-\eta), \\
 \eta &\in [-1, 1], \xi \in [0, 1], \tau \in [\Delta\tau, \tau_0 + \Delta\tau], m = \overline{0, M}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Затем, учитывая условие $\Delta\tau \ll 1$, представим величину $I^m(\tau + \Delta\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ в виде:

$$\begin{aligned}
 I^m(\tau + \Delta\tau, \eta, \xi, \tau_0) &= I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) + \Delta\tau \frac{\partial I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)}{\partial \tau} + o[(\Delta\tau)^2], \\
 \eta &\in [-1, 1], \xi \in [0, 1], \tau \in [0, \tau_0 + \Delta\tau], m = \overline{0, M}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Выражение для производной в соотношении (9) находим из исходного уравнения переноса излучения [3]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)}{\partial \tau} &= \frac{1}{\eta} [-I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) + \frac{\Lambda}{2} \int_{-1}^{+1} P^m(\eta, \eta') I^m(\tau, \eta', \xi, \tau_0) d\eta' + \\
 &+ \frac{\Lambda}{4} P^m(\eta, \xi) e^{-\tau/\xi}], \eta \in [-1, 1], \xi \in [0, 1], \tau \in [0, \tau_0], m = \overline{0, M}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Далее, согласно соотношению эквивалентности (3), приравниваем (4) и (8), а затем, используя соотношения (9) и (10), получаем после несложных, но достаточно громоздких преобразований, искомое нелинейное интегральное уравнение для Фурье-гармоник $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$:

$$\begin{aligned}
 (\xi - \eta)I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) &= \frac{\Lambda}{2} \xi \int_{-1}^{+1} P^m(\eta, \eta') I^m(\tau, \eta', \xi, \tau_0) d\eta' - \\
 &- \frac{\Lambda}{2} \eta \xi \int_0^1 P^m(\eta', \xi) I^m(\tau, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} - \\
 &- \Lambda \eta \xi^2 \int_0^1 d\eta' \int_0^1 \rho^m(\eta', \xi, \tau_0) P^m(-\eta', \eta'') I^m(\tau, \eta, \eta'', \tau_0) \frac{d\eta''}{\eta''} + \\
 &+ \frac{\Lambda}{2} \eta \xi \int_0^1 P^m(-\eta', \xi) I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \eta', \tau_0) e^{-\tau/\xi} \frac{d\eta'}{\eta'} + \\
 &+ \Lambda \eta \xi^2 \int_0^1 d\eta' \int_0^1 \sigma^m(\eta', \xi, \tau_0) P^m(-\eta', \eta'') I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \eta'', \tau_0) \frac{d\eta''}{\eta''} + \\
 &+ f^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M},
 \end{aligned} \tag{11}$$

где функции $f^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) &= \frac{\Lambda}{4} \xi P^m(\eta, \xi) e^{-\tau/\xi} - \frac{\Lambda}{4} \xi P^m(\eta, \xi) e^{-\tau_0/\xi} e^{\tau_0 - \tau/\eta} \Theta(-\eta) - \\
 &- \frac{\Lambda}{4} \xi P^m(\eta, \xi) e^{-\tau/\eta} \Theta(\eta) - \frac{\Lambda}{2} \xi^2 e^{\tau_0 - \tau/\eta} \Theta(-\eta) \int_0^1 P^m(\eta', \xi, \tau_0) P^m(\eta', \eta) d\eta' - \\
 &- \frac{\Lambda}{2} \xi^2 e^{-\tau/\eta} \Theta(\eta) \int_0^1 \rho^m(\eta', \xi, \tau_0) P^m(-\eta', \eta) d\eta'.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, если азимутальные гармоники коэффициентов яркости $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$ заранее известны, тогда нелинейное интегральное уравнение (11)–(12) превращается в систему двух линейных интегральных уравнений Фредгольма II рода относительно двух неизвестных величин $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и $I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0)$. Для того, чтобы найти второе уравнение для определения величины $I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0)$, необходимо провести преобразование уравнений

(11)–(12) с помощью линейных операций пространственного сдвига τ по оптической глубине $\tau \Rightarrow \tau_0 - \tau$ и вращения линии визирования $\eta \Rightarrow -\eta$. В результате таких преобразований из (11)–(12) следует искомого интегральное уравнение, необходимое для нахождения величины $I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0)$:

$$\begin{aligned}
 (\xi + \eta)I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) &= \frac{\Lambda}{2} \xi \int_{-1}^{+1} P^m(\eta, \eta') I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) d\eta' + \\
 &+ \frac{\Lambda}{2} \eta \xi \int_0^1 P^m(\eta', \xi) I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} + \\
 &+ \Lambda \eta \xi^2 \int_0^1 d\eta' \int_0^1 \rho^m(\eta', \xi, \tau_0) P^m(-\eta', \eta'') I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \eta'', \tau_0) \frac{d\eta''}{\eta''} - \\
 &- \frac{\Lambda}{2} \eta \xi \int_0^1 P^m(-\eta', \xi) I^m(\tau, \eta, \eta', \tau_0) e^{-\tau_0/\xi} \frac{d\eta'}{\eta'} - \\
 &- \Lambda \eta \xi^2 \int_0^1 d\eta' \int_0^1 \sigma^m(\eta', \xi, \tau_0) P^m(-\eta', \eta'') I^m(\tau, \eta, \eta'', \tau_0) \frac{d\eta''}{\eta''} + \\
 &+ f^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, если величины $I^m(0, -\eta, \xi, \tau_0) = S\xi\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ и $I^m(\tau_0, \eta, \xi, \tau_0) = S\xi\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ заданы, тогда уравнения (11)–(13) образуют систему двух линейных неоднородных интегральных уравнений для определения неизвестных азимутальных гармоник $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и $I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0)$ интенсивностей нисходящего ($\eta > 0$) и восходящего ($\eta < 0$) излучения на произвольных оптических глубинах τ однородного слоя.

Заметим также, что из уравнения (13) при $\tau \rightarrow 0$ и $\tau_0 \rightarrow \infty$ в случае выполнения граничных условий $I^m(0, \eta, \xi, \tau_0) = 0$, $(\eta, \xi) > 0$ и $I^m(\tau_0, -\eta, \xi, \tau_0) = 0$, $(\eta, \xi) > 0$ следует классическое нелинейное интегральное уравнение Амбарцумяна [1] для нахождения азимутальных гармоник коэффициентов диффузного пропускания $\rho_\infty^m(\eta, \xi)$ полубесконечного однородного слоя. Далее, если сначала положить в (13) $\tau = 0$, а затем $\tau = \tau_0$ в (11), то при указанных выше граничных условиях полу-

чаем известную систему нелинейных интегральных уравнений Чандраскара [2] для Фурье-гармоник $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$. Следовательно, система нелинейных интегральных уравнений (11)–(13) обобщает данную классическую систему на произвольную оптическую глубину τ . Однако следует подчеркнуть, что при выводе интегральных уравнений (11) и (13) граничные условия для восходящего ($\eta < 0$) и нисходящего ($\eta > 0$) излучения, соответственно, на уровнях $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ не используются. Поэтому данные уравнения следует рассматривать в качестве новых интегральных соотношений для калибровки азимутальных гармоник искомым интенсивностям излучения $I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0)$ и $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, которым должны удовлетворять любые регулярные решения основных краевых задач теории переноса излучения [1-7].

3. Единая фотометрическая функция и фотометрические инварианты симметризованной теории переноса излучения. Складывая уравнения (11) и (13), получаем для фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, определяемых в [26-27] согласно соотношениям:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) \pm I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (14)$$

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \pm I_{\pm}^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}, \quad (15)$$

следующее интегральное уравнение, которое полностью эквивалентно уравнениям (11) и (13):

$$\begin{aligned} \xi I_{+}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) + \eta I_{-}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) &= \frac{\Lambda}{2} \xi \int_{-1}^{+1} P^m(\eta, \eta') I_{+}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) d\eta' + \\ &+ \Lambda \eta \xi^2 \int_0^1 d\eta' \int_0^1 R_{+}^m(\eta', \xi, \tau_0) P^m(-\eta', \eta'') I_{-}^m(\tau, \eta, \eta'', \tau_0) \frac{d\eta''}{\eta''} + \\ &+ \frac{\Lambda}{2} \eta \xi \int_0^1 \left[P^m(\eta', \xi) + P^m(-\eta', \xi) e^{-\tau_0/\xi} \right] I_{-}^m(\tau, \eta, \eta'', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ &+ f_{+}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}. \end{aligned} \quad (16)$$

Свободный член $f_+^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ в уравнении (16) при $0 < \tau < \tau_0$ равен $f_+^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = f^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) + f^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, а на внешних границах слоя $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ согласно [26-27] фотометрические инварианты $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ определяются следующим образом:

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad (\eta, \xi) > 0, \quad m = \overline{0, M}. \quad (17)$$

Заметим, что вследствие свойств инвариантности (15) при численных решениях уравнения (16) можно использовать только половину заданного интервала для оптической глубины τ , то есть $\tau \in [0, \tau_0/2]$ при $\eta \in [-1, 1]$ или альтернативно $\eta \in [0, 1]$, но для полного интервала $\tau \in [0, \tau_0]$.

Рассмотрим теперь более детально левую часть уравнения (16), состоящую из специфической линейной комбинации фотометрических инвариантов $I_+^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и $I_-^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ следующего вида:

$$I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \xi I_+^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) + \eta I_-^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (18)$$

$$I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = (\eta + \xi) I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) + (\xi - \eta) I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (19)$$

$\eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, \tau_0], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.$

Очевидно, что линейные комбинации (18) и (19) образуют в теории переноса скалярного излучения новую асимметричную функцию $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ угловых переменных η и ξ , которую назовем единой фотометрической функцией для интенсивностей восходящего ($\eta < 0$) и нисходящего ($\eta > 0$) излучения на произвольных зеркально-симметричных оптических уровнях $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ в зеркально-симметричных направлениях визирования η и $-\eta$. Отметим, что в случае одновременной и взаимной трансляции текущих оптических $(\tau, \tau_0 - \tau)$ и угловы $(\eta, -\eta)$ переменных согласно условию $\tau \leftrightarrow \tau_0 - \tau$ и $\eta \leftrightarrow -\eta$ для единой фотометрической функции $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ выполняется следующее базовое свойство ее инвариантности:

$$I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = I_{\Sigma}^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0), \quad (20)$$

$\eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.$

Таким образом, учитывая соотношения инвариантности (15) и (20), единую фотометрическую функцию $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и ее составляющие компоненты $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ можно рассматривать не в полной области $D = \{\eta \in [-1, 1], \xi \in [0, 1], \tau \in [0, \tau_0]\}$ изменения переменных (τ, η, ξ) , как это имеет место в несимметризованных краевых задачах классической теории переноса излучения [3-5], а в более узких альтернативных интервалах $D_1 = \{\eta \in [0, 1], \xi \in [0, 1], \tau \in [0, \tau_0]\}$ или $D_2 = \{\eta \in [-1, 1], \xi \in [0, 1], \tau \in [0, 1/2 \tau_0]\}$. В этом случае, как показано в [30], использование свойств инвариантности (15) и (20), наряду с другими преимуществами симметризованной трактовки краевых задач классической теории переноса, приводит к экономии вычислительных ресурсов ЭВМ по сравнению с традиционными численными методами приблизительно в 2-3 раза.

В дальнейшем, используя область D_1 , рассмотрим обобщение величин $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$ и $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$ на произвольные оптические уровни $0 < \tau < \tau_0$ внутри слоя, введя обобщенные азимутальные гармоники коэффициентов яркостей $R^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и $T^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ согласно соотношениям:

$$I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = S\xi T^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (\eta, \xi) > 0, \quad \tau \in (0, \tau_0), \quad m = \overline{0, M}, \quad (21)$$

$$I^m(\tau, -\eta, \xi, \tau_0) = S\xi R^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (\eta, \xi) > 0, \quad \tau \in (0, \tau_0), \quad m = \overline{0, M}. \quad (22)$$

Отметим, что нелинейное интегральное уравнение (16) и линейные комбинации (18) и (19) являются обобщением частного случая единой фотометрической функции $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$, введенной в [1-2] на внешних границах $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, на произвольные оптические глубины τ однородного слоя, включая его внешние границы, именно:

$$I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = S\xi E^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (\eta, \xi) > 0, \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}, \quad (23)$$

$$I_{\Sigma}^m(\tau_0, \eta, \xi, \tau_0) = S\xi E^m(\tau_0, \eta, \xi, \tau_0) = S\xi E^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad (24)$$

$$I_{\Sigma}^m(0, \eta, \xi, \tau_0) \equiv 0, \quad (\eta, \xi) > 0, \quad m = \overline{0, M}.$$

Кроме того, важно подчеркнуть, что вспомогательная процедура симметризации внешних энергетических источников относительно середины ($\tau_0/2$) рассматриваемого слоя и использование классического принципа инвариантности Амбарцумяна — Чандрасекара [1-2], примененные в [25] для получения нелинейного интегрального уравнения (16), с математической точки зрения, однозначно приводят к обобщенному виду единой фотометрической функции $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, совпадающему с выражениями (18)–(19) и тем самым исключающему по физическим соображениям проблему ее неединственности.

Таким образом, рассмотренное выше нелокальное свойство пространственно-угловой симметрии протяженных полей многократного рассеянного анизотропного излучения в плоском горизонтально-однородном слое является внутренним фундаментальным свойством этих полей излучения, а само существование обобщенной единой фотометрической функции $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и ее базовых структурных элементов в виде фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ при $0 < \tau < \tau_0$ полностью определяется принципом зеркального отображения (симметрии) [27-28]. При этом упомянутая выше симметризация внешних энергетических источников носит исключительно сугубо эвристический характер и в общем случае служит лишь наглядным примером физического проявления нелокальных свойств пространственно-угловой симметрии интенсивностей внутренних полей излучения на зеркально-симметричных оптических глубинах $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ в зеркально-симметричных направлениях визирования η и $(-\eta)$. Отметим также, что с математической точки зрения инвариантные свойства новых конструкций симметризованной теории переноса излучения — единых фотометрических функций $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и фотометрических инвариантов $R_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ являются следствием линейных структурных трансформаций исходных краевых задач классической теории переноса излучения [3], связанных с группами их линейных преобразований типа пространственного сдвига по оптической глубине $\tau \Rightarrow \tau_0 - \tau$ и вращения направления визирования $\eta \Rightarrow -\eta$. Указанные группы линейных преобразований азимутальных гармоник интенсивностей восходящего $I^m(\tau, -\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ и нисходящего $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ излучения однозначно приводят к обобщенным величинам (21)–(22) для азимутальных гармоник коэффициентов яркостей $R^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и $T^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$.

Пространственно-угловая структура этих величин определяется обобщенными функциями $\varphi_i^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и $\psi_i^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ [13], которые на внешних границах $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ превращаются в классические функции $\varphi_i^m(\eta, \tau_0)$ и $\psi_i^m(\eta, \tau_0)$ Амбарцумяна — Чандрасекара [1-2].

4. Поле диффузно отраженного и пропущенного излучения в случае сильно вытянутых индикатрис рассеяния. Очевидно, что эффективное использование единых фотометрических функций $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и адекватных им структурных элементов в виде фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ предполагает проведение численного моделирования решений интегральных уравнений (11), (13) или (16) с учетом их свойств пространственно-угловой инвариантности (20) и (15). При этом возникает проблема корректного описания с физической и математической позиций поведения азимутальных гармоник $I^m(\tau, -\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ восходящего и $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ нисходящего излучения в случае произвольного анизотропного рассеяния излучения, в том числе для реальных сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$. К сожалению, в общем случае внутренних полей анизотропно рассеянного излучения пространственно-угловые свойства симметрии азимутальных гармоник интенсивностей $I^m(\tau, \pm\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$, включая их обобщенные коэффициенты яркости $R(\tau, \eta, \xi, \varphi)$ и $T(\tau, \eta, \xi, \varphi)$ на произвольных оптических глубинах τ плоского однородного слоя ($0 < \tau < \tau_0$), за исключением внешних границ $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, до сих пор не исследованы. Исключение составляет случай однократно рассеянного излучения, для которого известны строгие аналитические выражения азимутальных гармоник $I_1^m(\tau, \pm\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$, определяемых по известным точным формулам [5]:

$$I_1^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda S}{4} \xi P^m(\eta, \xi) \frac{e^{-\tau/\xi} - e^{-\tau/\eta}}{\xi - \eta}, \quad (25)$$

$$(\eta, \xi) \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = 0, M,$$

$$I_1^m(\tau, -\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda S}{4} \xi P^m(-\eta, \xi) \frac{1 - e^{-(\tau_0 - \tau)\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right)}}{\xi + \eta} e^{-\tau/\xi}, \quad (26)$$

$$(\eta, \xi) \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.$$

Хотя соотношения (25)–(26) и не обладают свойствами пространственно-угловой симметрии внутри однородного слоя ($0 < \tau < \tau_0$), они позволяют, как это следует из их структуры, адекватно описать их аналитически. В этой связи актуальна проблема нахождения приближенных численно-аналитических решений нелинейных интегральных уравнений (11), (13) или альтернативно (16) на основе их адаптивных угловых параметризаций в случае реальных индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$, имеющих резкие максимумы в области малых углов рассеяния $\gamma \sim 0^\circ$.

Отметим, что согласно общей теории многократного анизотропного рассеяния света [3] базовый асимптотический параметр $(1 - \Lambda)/(3 - x_1)$, где x_1 — первый коэффициент разложения заданной сильно вытянутой ($x_1 \sim 3$) индикатрисы рассеяния $P(\cos \gamma)$ по полиномам Лежандра $P_n(\cos \gamma)$ в классическом случае чистого рассеяния $\Lambda \sim 1$ может существенно превышать единицу. Это обстоятельство значительно осложняет применение стандартных методов указанной теории при решении прикладных задач переноса излучения и, соответственно, численном радиационном моделировании в условиях больших потерь точности и неустойчивости известных расчетных схем и алгоритмов [31].

Следует заметить, что с физической точки зрения условие $(1 - \Lambda)/(3 - x_1) \gg 1$ означает, что многократно рассеянные фотоны глубоко проникают в среду, где поглощаются. Вследствие этого их вклад в общее поле излучения, диффузно отраженного и пропущенного слоем на уровне τ , оказывается малым, что может приводить к значительному упрощению его пространственно-угловой структуры. Ниже будет показано, что полное преодоление указанных выше вычислительных трудностей в случае сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$ может быть достигнуто для Фурье-гармоник $I^m(\tau, \pm\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ с приемлемой точностью на базе использования соотношений (14)–(15), (18)–(20) и адаптивной параметризации исходных нелинейных интегральных уравнений (11)–(13) и (16), учитывающей экстремальные свойства реальных индикатрис рассеяния

$P(\cos \gamma)$ вблизи малых углов $\gamma \sim 0^\circ$. Действительно, реальные сильно вытянутые индикатрисы рассеяния $P(-\eta', \eta'', \varphi' - \varphi'')$ и $P(\eta', \eta'', \varphi' - \varphi'')$ аэрозольно-облачных атмосфер и водных сред для восходящих ($\eta < 0$) и нисходящих ($\eta > 0$) направлений визирования имеют резкие максимумы при $\eta' = \eta'' = 0$, $\varphi' = \varphi''$ и $\eta' = \eta''$, $\varphi' = \varphi''$ соответственно. Используя эти свойства при рассмотрении нелинейных интегральных уравнений (11)–(13) и (16) и вынося из-под знаков интегралов в этих уравнениях неизвестные величины $I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0)$ и $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ в упомянутых точках максимумов функции $P(\cos \gamma) = P(\eta', \eta'', \varphi' - \varphi'')$, будем пренебрегать нелинейными членами в указанных уравнениях. Очевидное обоснование подобного приближения обусловлено тем обстоятельством, что нелинейные члены в уравнениях (11)–(13) и (16) соответствуют фотонам, которые в процессе многократного рассеяния переизлучаются в области малых углов рассеяния из направления «вперед» ($\gamma \sim 0^\circ$) в направление «назад» ($\gamma \sim 90^\circ$). Очевидно, что с физической точки зрения подобный процесс достаточно маловероятен, учитывая наличие резких максимумов у сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$, именно в направлении малых углов рассеяния $\gamma \sim 0^\circ$.

Принимая во внимание сделанные замечания, после достаточно простых, но довольно громоздких и трудоемких процедур подгоночной параметризации интегральных уравнений (11)–(13), получаем приближенные аналитические аппроксимации Фурье-гармоник $I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0)$ и $I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$, $\tau \in [0, \tau_0]$, $m = \overline{0, M}$ образующих введенную выше единую фотометрическую функцию $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \tau_0]$, $m = \overline{0, M}$:

$$I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) \approx \frac{\Lambda S}{4} \xi P^m(-\eta, \xi) \frac{1 - e^{-\tau \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi} \right)}}{\xi \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\eta) \right] + \eta \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\xi) \right]} e^{-\tau_0 - \tau / \xi}, \quad (27)$$

$$\eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M},$$

$$I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda S}{4} \xi P^m(\eta, \xi) \frac{e^{-\frac{\tau}{\eta}} - e^{-\frac{\tau}{\xi}}}{\xi \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\eta) \right] - \eta \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\xi) \right]}, \quad (28)$$

$$\eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.$$

Вспомогательная функция адаптивной параметризации $a(\eta)$ в (27)–(28) находится согласно следующей точной формуле [32]:

$$a(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 P(\eta', \eta, \varphi') d\eta'. \quad (29)$$

Для применения приближенных соотношений (27)–(28) необходимо выбрать соответствующий алгоритм численного моделирования функции $a(\eta)$ и исследовать ее свойства во всем интервале изменения угловых переменных $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ [32]. В этой связи, наряду с определением функции $a(\eta)$ согласно (29), целесообразно использовать ее другое альтернативное определение, при котором интегрирование ведется по новой угловой переменной $\mu = \cos \gamma$ [32]. Для этого вместо старых угловых переменных (η, ξ, φ) вводятся новые аргументы (μ, ξ, ψ) с областью определения: $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $1 \geq \mu \geq \sqrt{1 - \xi^2}$ и $c(\mu, \xi) \leq \psi \leq 2\pi - c(\mu, \xi)$, $\sqrt{1 - \xi^2} \geq \mu \geq -\sqrt{1 - \xi^2}$, где функция $c(\mu, \xi)$ определяется следующим образом:

$$c(\mu, \xi) = \arccos \frac{\xi \mu}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \mu^2)}}. \quad (30)$$

В результате вместо (29) получаем для определения функции $a(\eta)$ представление, более удобное для проведения интегрирования:

$$a(\eta) = \int_0^1 P(\mu) d\mu - \frac{1}{\pi} \int_0^1 [P(\mu) - P(-\mu)] c(\mu, \xi) d\mu. \quad (31)$$

Отметим, что из (29) при условии нормировки заданной индикатрисы рассеяния $P(\cos \gamma) = P(\eta, \xi, \varphi)$ согласно известному соотношению:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 P(\eta, \xi, \varphi) d\eta = 1 \quad (32)$$

находим, что $a(\eta) + a(-\eta) = 2$ и $a(0) = 1$.

Для сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$, как это следует из (29), имеем $a(\eta) > a(-\eta)$ при $\eta > 0$. Отсюда получаем с учетом условия нормировки (32), что значения функции $a(\eta)$ заключены в интервале $0 < a(\eta) < 2$. В случае модельной однопараметрической индикатрисы рассеяния Хеньи — Гринштейна, часто используемой при численном радиационном моделировании:

$$P(\cos \gamma) = (1 - g^2) (1 + g^2 - 2g \cos \gamma)^{-3/2}, \quad |g| < 1, \quad x_1 = 3g, \quad (33)$$

для адаптивной вспомогательной функции $a(\eta)$ получаем явное аналитическое выражение [32]. Действительно, подставляя (33) в (31) и интегрируя затем по частям, находим:

$$a(\eta) = \frac{1+g}{g} - \frac{1-g^2}{g} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1+g^2+2gz}} \left[\frac{1}{1-z} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2z}{1-z}, k\right) + \frac{1}{1+z} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2z}{1+z}, k\right) \right], \quad (34)$$

где $k^2 = 4gz / (1 + g^2 + 2gz)$ и $z = \sqrt{1 - \xi^2}$. Входящие в (34) эллиптические интегралы 3-го рода $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2z}{1 \mp z}, k\right)$ вычисляются с помощью эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода [33].

В таблице 1 представлены значения функции $a(\eta)$, рассчитанные по приближенной формуле (34) для сильно вытянутой индикатрисы рассеяния Хеньи — Гринштейна ($g \sim 1$) в зависимости от угла η и параметра g . Данные таблицы 1 показывают, что при увеличении пара-

метра вытянутости $g \rightarrow 1$ ($x_1 \rightarrow 3$) для указанной индикатрисы рассеяния функция $a(\eta)$ при $\eta > 0$ стремится к 2, то есть, как и следовало ожидать, $a(-\eta) \ll 1$.

Таблица 1. Численные значения функции $a(\eta)$

g	η							
	0	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	1
0,950	1,00	1,560	1,710	1,860	1,930	1,960	1,970	1,980
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,990	1,00	1,878	1,740	1,972	1,987	1,992	1,994	1,996
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,999	1,00	1,987	1,994	1,997	1,998	1,999	1,999	1,999
0	0	9	0	2	7	2	4	6

Отметим, что на основе точных формул (25)–(26) можно трансформировать выражения (27)–(28) в следующие адаптивные аналитические соотношения, учитывающие многократное анизотропное рассеяние в однородном плоском слое конечной оптической толщины $\tau_0 < \infty$ при $\Lambda \sim 1$ и $g \sim 1$:

$$I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) = M(-\eta, \xi) I_1^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0), \quad (35)$$

$$\eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M},$$

$$I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = M(\eta, \xi) I_1^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (36)$$

$$\eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.$$

Полученные параметризованные соотношения (35)–(36) показывают доминирующее влияние однократного рассеяния при формировании общего поля рассеянного излучения в случае реальных, сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$. При этом адаптивные функции $M(\pm\eta, \xi)$, $(\eta, \xi) > 0$ определяются согласно выражениям:

$$M(-\eta, \xi) = \frac{\eta + \xi}{\xi \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\eta) \right] + \eta \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\xi) \right]}, \quad (\eta, \xi) > 0, \quad (37)$$

$$M(\eta, \xi) = \frac{\xi - \eta}{\xi \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\eta) \right] - \eta \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\xi) \right]}, \quad (\eta, \xi) > 0. \quad (38)$$

При численном радиационном моделировании они играют роль подгоночных функциональных множителей, корректирующих вклад многократно рассеянных фотонов в общее поле излучения.

Отметим, что приближенные формулы (35)–(38) можно также представить в более компактном виде, а именно:

$$I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) \approx \frac{\Lambda S}{4} \xi I^m(\eta, \xi) \frac{e^{-\tau/\xi} - e^{-\tau/\eta} \Theta(\eta) - e^{-\tau/\xi} e^{-(\tau_0 - \tau) \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\eta} \right)} \Theta(-\eta)}{\xi \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(|\eta|) \right] - \eta \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\xi) \right]}, \quad (39)$$

$$\eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.$$

Аналогично (35)–(36), используя соотношения (39) и (25)–(26), имеем:

$$I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \tilde{M}(\eta, \xi) I_1^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}, \quad (40)$$

где адаптивные подгоночные функции $\tilde{M}(\eta, \xi)$ симметричны по угловым переменным (η, ξ) и представляются в следующем виде:

$$\tilde{M}(\eta, \xi) = \frac{\xi - \eta}{\xi \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(|\eta|) \right] - \eta \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\xi) \right]}, \quad \eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}. \quad (41)$$

Заметим также, что азимутальные гармоники восходящего и нисходящего излучения $I^m(\tau, \pm\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ внутри плоского однородного слоя ($0 < \tau < \tau_0$) могут быть описаны с помощью другой альтернативной подгоночной функции, симметричной по переменным (η, ξ) и отличающейся по своей угловой структуре от введенной выше функции $\tilde{M}(\eta, \xi)$. Действительно, вместо (39) представим искомые интенсивности $I^m(\tau, \pm\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ с помощью другого структурного соотношения:

$$I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = S \xi \left[\Theta(\eta) + \Theta(-\eta) e^{-\frac{\tau}{\xi}} - e^{-\frac{\tau}{\xi}} e^{-(\tau_0 - \tau) \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\eta} \right)} \Theta(-\eta) \right] j^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (42)$$

$$\eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M},$$

где новая адаптивная подгоночная функция $j^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ в интервалах $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$ и $\tau \in [0, \tau_0]$ представляется в виде следующего приближенного аналитического выражения:

$$j^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{4} P^m(\eta, \xi) \frac{e^{-\frac{\tau}{\xi}} - e^{-\frac{\tau}{\eta}}}{\xi \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\eta) \right] - \eta \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\xi) \right]}, \quad (43)$$

$$(\eta, \xi) > 0, \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M},$$

$$j^m(\tau, -\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{4} P^m(-\eta, \xi) \frac{1}{\xi \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\eta) \right] + \eta \left[1 - \frac{\Lambda}{2} a(\xi) \right]}, \quad (44)$$

$$(\eta, \xi) > 0, \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.$$

Используя угловую симметрию азимутальных гармоник исходной индикатрисы рассеяния $P^m(\eta, \xi) = P^m(\xi, \eta)$, $P^m(-\eta, -\xi) = P^m(\eta, \xi)$, из соотношений (43) и (44) находим:

$$j^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = j^m(\tau, \xi, \eta, \tau_0), \quad (\eta, \xi) > 0, \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}, \quad (45)$$

$$j^m(\tau, -\eta, \xi, \tau_0) = j^m(\tau, -\xi, \eta, \tau_0), \quad (\eta, \xi) > 0, \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}. \quad (46)$$

Таким образом, для полей излучения в нисходящих ($\eta > 0$) и восходящих ($\eta < 0$) направлениях визуирования альтернативные структурные функции $j^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ симметричны по угловым переменным η и ξ . Отметим, что полученные приближенные аналитические выражения (27) и (28) являются базовыми для аналогичных представлений Фурье-гармоник фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и единой фотометрической функции $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \tau_0]$, $m = \overline{0, M}$. Используя определения (14)–(15) и соотношения (35)–(36), получаем для азимутальных гармоник фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ в случае сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$ следующие приближенные аналитические представления:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) \approx M(-\eta, \xi) I_1^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) \pm M(\eta, \xi) I_1^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (47)$$

$$\eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.$$

Аналогичным образом, используя определение (18) и соотношение (47), для Фурье-гармоник единой фотометрической функции $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ находим:

$$I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = (\xi + \eta)M(-\eta, \xi)I_1^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) + (\xi - \eta)M(\eta, \xi)I_1^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad (48)$$

$$\eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = \overline{0, M}.$$

Отметим, что структура полученных выше адаптивных параметризованных соотношений позволяет дать четкую физическую интерпретацию трансформации исходных точных интегральных уравнений (11), (13) и (16) в адекватные им приближенные аналитические соотношения (35)–(41) и (47)–(48). Именно подобное преобразование с физической точки зрения имитирует селективное пространственно-угловое «вмораживание» однократно рассеянных фотонов в качестве своеобразного «ядра» в общем поле излучения. Его последующая мультипликативная корректировка с помощью адаптивных подгоночных функций $M(\pm\eta, \xi)$ и $\tilde{M}(\pm\eta, \xi)$ учитывает влияние многократно рассеянных фотонов в случае сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$. При этом, как отмечено выше, максимальные значения базового асимптотического параметра $(1 - \Lambda)/(3 - x_1) \gg 1$, с физической точки зрения, соответствуют глубокому проникновению и поглощению в среде многократно рассеянных фотонов. В результате вклад многократно рассеянных фотонов в общее поле излучения, диффузно отраженного и пропущенного однородным слоем, оказывается незначительным, что и приводит к значительному упрощению его пространственно-угловой структуры и значительному увеличению доли однократно рассеянного излучения.

5. Результаты численного радиационного моделирования. В таблице 2 в случае полубесконечной однородной атмосферы ($\tau_0 = \infty$) проведено сравнение рассчитанных в [32] для индикатрисы рассеяния Хеньи — Гринштейна точных значений нулевой азимутальной гармоники ($m = 0$) коэффициента отражения $\rho_{\infty}^0(\eta, \xi)$ и соответствующих приближенных величин, определенных по формуле (27), в зависимости от значений базовых оптических параметров Λ и $(1 - \Lambda)/(1 - g)$. Из таблицы 2 следует, что в случае сильно вытянутых индикатрис Хеньи — Гринштейн ($g \sim 1$) с ростом параметра $(1 - \Lambda)/(1 - g) \gg 1$ при стремлении $g \rightarrow 1$, приближенные величины $\rho_{\infty}^0(\eta, \xi)$ асимптотически стремятся к своим точным значениям.

Далее отметим, что на основании проведенного выше анализа адаптивная параметризация нелинейного интегрального уравнения (16) при численном моделировании единой фотометрической функции $I_{\Sigma}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ и последующем нахождении составляющих ее фотометрических инвариантов $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$, $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \tau_0]$ непосредственно не использовалась для нахождения величин $I^m(\tau, \pm\eta, \xi, \tau_0)$, $\eta \in [0, 1]$, $\xi \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \tau_0]$. В первую очередь это связано с тем, что процедура подобной параметризации полностью адекватна той, которая была выполнена для уравнений (11)–(13) на основе использования экстремальных свойств исходных сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$ и доминирующего влияния однократного рассеяния.

В заключение отметим, что выражения (37)–(41) и (43)–(44) для адаптивных подгоночных функций $M(\pm\eta, \xi)$, $\tilde{M}(\eta, \xi)$ и $j^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ можно значительно упростить, если воспользоваться очевидным свойством функции $a(\eta)$, а именно $a(\eta) \approx 2$. Например, в случае (37)–(38) имеем $M(\pm\eta, \xi) \approx 1/(1 - \Lambda)$. Далее, при очень малых значениях угловых переменных $\xi \approx 0$ и $\eta \approx 0$ находим $M(\pm\eta, \xi) \approx 2/(2 - \Lambda)$, что практически позволяет использовать вместо приближенных выражений (35)–(38) точные формулы (25)–(26) для азимутальных гармоник однократно рассеянного излучения.

6. Заключение. Рассмотренный выше адаптивный подход, основанный на параметризации новых нелинейных интегральных уравнений (11)–(13) и (16), позволяет получить простые приближенные аналитические соотношения для интенсивностей восходящего и нисходящего излучения на произвольных зеркально-симметричных уровнях τ и $(\tau_0 - \tau)$ в зеркальных направлениях визирования слабо поглощающего $(1 - \Lambda) \ll 1$ и анизотропно рассеивающего ($x_1 \approx 3$) однородного слоя произвольной оптической толщины $\tau_0 \leq \infty$. Указанные приближенные выражения для Фурье-гармоник интенсивностей излучения $I^m(\tau, \pm\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ показывают доминирующее влияние однократного рассеяния на формирование общего поля излучения в случае сильно вытянутых индикатрис рассеяния $P(\cos \gamma)$. В рамках заданного уровня дискретности переменных (τ, η, ξ) и точности расчетов ($\sim 10^{-4}$)

азимутальных гармоник интенсивностей излучения $I^m(\tau, \pm\eta, \xi, \tau_0)$, $(\eta, \xi) > 0$ они могут использоваться при численном радиационном моделировании и учете влияния неортогортной горизонтально-однородной подстилающей поверхности на общее поле излучения, а также постановке и решении обратных задач теории переноса излучения в видимой области спектра $\lambda = 400 - 850$ нм.

Литература

1. Амбарцумян В.А. Научные труды // Ереван: Изд-во АН Арм. ССР. 1960. т. 1. 429 с.
2. Chandrasekhar S. Radiative transfer // Oxford: Oxford Univ. Press. 1950. 394 p.
3. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет // М.: Наука, 1972. 335 с.
4. van de Hulst H.G. Multiple light scattering: Tables, Formulas and Applications // New York: Academic Press. 1980. 739 p.
5. Минин И.Н. Теория переноса излучения в атмосферах планет // М.: Наука. 1988. 264 с.
6. Bohren C.F., Clothiaux E.E. Fundamentals of Atmospheric Radiation // Weinheim: Wiley-VCH, Verlag GmbH. 2006. 479 p.
7. Thomas G.E., Stamnes K. Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean // Cambridge, New York: Cambridge University Press. 2006. 540 p.
8. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Complete matrix solution of radiative transfer equation for pile of horizontally slabs // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2011. vol. 117. issue 7. pp. 1141–1148.
9. Budak V.P., Kaloshin G.A., Shagalov O.V., Zheltov V.S. Numerical modeling of the radiative transfer in a turbid medium using the synthetic iteration // Optics Express. 2015. vol. 23. no. 15. pp. 829–835.
10. Будак В.П., Желтов В.С., Лубенченко А.В., Фрейдлин К.С., Шагалов О.В. Быстрый и точный алгоритм численного моделирования переноса излучения в мутной среде на основе метода синтетических итераций // Оптика атмосферы и океана. 2016. Т. 29. № 9. С. 739–746.
11. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // Light Scattering Reviews 5: Single Light Scattering and Radiative Transfer. Berlin: Springer Praxis Books. 2010. pp. 147–204.
12. Ilyushin Ya.A. The advanced small angle approximation with application to the numerical radiative transfer calculations // Proceedings of International Radiation Symposium (IRS/IAMAS). 2013. pp. 105–109.
13. Smokty O.I. Analytical spatial-angular structure of uniform slab radiation fields for strongly elongated phase functions // Proceedings of Computation Sci. and Applications (ICCSA'2016). Part I. pp. 110–128.
14. Atberger C. Advances in remote sensing of agriculture: context description, existing operational monitoring systems and major information needs // Remote Sens. 2013. no. 5(2). pp. 949–981.
15. Hanes T.U. (Ed.) Biophysical applications of satellite remote sensing // Heidelberg–New York–London, Dordrecht: Springer. 2014. 230 p.
16. Зега Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л., Прихач А.С. Восстановление оптических характеристик аэрозольной атмосферы и поверхности Земли путем совместной обработки различной спутниковой информации // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 2. С. 215–223.
17. Belov V.V., Tarasenko M.V. On the accuracy and speed of RTM algorithms for atmospheric correction of satellite images in the visible and UV ranges. // Atmos. and Ocean Opt. 2014. vol. 27. n. 1. pp. 56–61.

18. *Duanabc S.-B., Licd Z.-L., Tanga B.-H., Wu H., Tanga R., Bi Y.* Atmospheric correction of highspatial-resolution satellite images with adjacency effects: Application to EO-1 ALI data // *Int. J. Rem. Sens.* 2015. vol. 36. no. 19–20. pp. 5061–5074.
19. *Веретенников В.В.* Восстановление микроструктурных параметров грубодисперсного аэрозоля с использованием их регрессионных связей со спектральным ослаблением света в ИК-диапазоне // *Оптика атмосферы и океана.* 2017. Т. 30. № 8. С. 696–704.
20. *Лысенко С.А.* Атмосферная коррекция многоспектральных спутниковых снимков на основе аппроксимационной модели переноса солнечного излучения // *Оптика атмосферы и океана.* 2017. Т. 30. № 9. С. 775–788.
21. *Seidel F.C., Kokhanovsky A.A., Schaepman M.E.* Fast and simple model for atmospheric radiative transfer // *Atmos. Meas. Tech. Discuss.* 2010. vol. 3. no. 4. pp. 1129–1141.
22. *Васильев А.В., Кузнецов А.Д., Мельникова И.Н.* Аппроксимация многократно рассеянного солнечного излучения в рамках приближения однократного рассеяния // *Ученые записки РГГУ.* 2016. № 42. С. 94–103.
23. *Катковский Л.В.* Параметризация уходящего излучения для быстрой атмосферной коррекции гиперспектральных изображений // *Оптика атмосферы и океана.* 2016. Т. 29. № 9. С. 778–784.
24. *Smokty O.I.* Analytical approximation for homogeneous slab brightness coefficients in the case of strongly elongated phase functions *Radiation Processes in the Atmosphere and Ocean* // *Proceedings of International Radiation Symposium (IRS/IAMAS) (IRS'2016).* 2017. pp. 145–149.
25. *Hovenier J.W.* A unified treatment of reflected and transmitted intensities of homogeneous plane-parallel atmospheres // *Astrom. and Astrophys.* 1978. vol. 68. pp. 239–250.
26. *Смоктый О.И.* Моделирование полей излучения в задачах космической спектrophотометрии // *Л.: Наука.* 1986. 352 с.
27. *Smokty O.I.* Development of radiative transfer theory methods on the base of mirror symmetry principle // *Proceedings of International Radiation Symposium (IRS'2000): Current Problems in Atmospheric Radiation.* 2001. pp. 341–344.
28. *Smokty O.I.* The mirror symmetry principle for radiation fields in a vertically non-uniform atmospheric slab // *AIP Conference Proceedings. Ser. "Radiation processes in the atmosphere and ocean (IRS'2012)": Proceedings of the International Radiation Symposium (IRC/IAMAS).* 2013. pp. 135–138.
29. *Yanovitsky E.G.* *Light scattering in inhomogeneous atmospheres* // Berlin: Springer, 1997. 371 p.
30. *Smokty O.I.* Improvements of methods of radiation fields numerical modeling on the basis of mirror reflection principle // *Proceedings of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'13).* 2013. pp. 1–17.
31. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих средах. Стандартные методы расчета / Под ред. Ж. Ленобль // *Л.: Гидрометеоздат.* 1990. 264 с.
32. *Смоктый О.И., Аниконов А.С.* Рассеяние света в средах большой оптической толщины // *СПб.: Наука.* 2008. 440 с.
33. *Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W.* *Numerical Recipes. The art of Scientific Computing (Fortran Version)* // Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1989. 702 p.

Смоктый Олег Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, лауреат Премии Правительства РФ, академик Международной Академии Астронавтики (Франция), главный научный сотрудник лаборатории «Прикладная информатика» СПИИРАН. Область научных интересов: теория переноса излучения, моделирование полей излучения в задачах дистанционного зондирования Земли из космоса, космическая геоинформатика. Число научных публикаций — 290 научных трудов, в том числе 10 монографий, одного открытия и 6 изобретений. soi@iias.spb.su СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ, р.т./факс +7(812)328-4450.

O.I. SMOKTY
**MODELING OF RADIATION FIELDS OF UNIFORM
 ANISOTROPICALLY SCATTERING SLAB OF ARBITRARY
 OPTICAL THICKNESS**

Smokty O.I. Modeling of Radiation Fields of Uniform Anisotropically Scattering Slab of Arbitrary Optical Thickness.

Abstract. Modeling of radiation fields of an arbitrary optical thickness uniform slab in the case of a weak absorption and strongly elongated phase functions has been carried. The simple modification of classical Ambarzumian's — Chandrasekhar's invariance principle indispensable for the receiving of new non-linear integral equations connected with azimuthal Fourier harmonics of generalized unified photometric function and photometric invariants has been used. These values join upgoing and downgoing radiation fields intensities making use of simple linear manner at arbitrary optical levels in mirror vision directions including fixed azimuthal angles and solar zenith distance. Parametrizations of obtained non-linear integral equations have demonstrated in the absence of reflecting underlying surfaces, placed at the lowest level of considered uniform slab, the possibility to express angular-spatial properties of unified photometrical function and appropriate photometrical invariants taking into account the phase functions strongly elongation near small scattering angles and small slab's absorption with the help of primary scattered radiation field intensities and adaptive fitting multipliers. These functional adaptive corrections have been stipulated by uniform slab's multiple light scattering and possess the clear physical interpretation. The use of mirror reflection (symmetry) principle, elaborated by the author, and conception of unified photometric function allows one to estimate the above-mentioned peculiarities of real environment's phase functions in the framework of photometric invariants numerical modeling. An analysis of appropriate radiative modeling results has shown a dominating influence of primary light scattering in the formation of anisotropically scattered radiation fields of an arbitrary optical thickness uniform slab in the case of weak radiation absorption and strongly elongated phase functions.

Keywords: uniform slab, Ambarzumian's — Chandrasekhar's invariance principle, non-linear integral equations, adaptive parametrization, photometric invariants, unified photometric function, brightness coefficients, radiation fields intensities, primary scattering, fitting functions, Henyey — Greenstein phase function.

Smokty Oleg Ivanovich — Ph.D., Dr. Sci., professor, Honored scientist of Russian Federation, Russian Federation Government Award laureate, Full member of the International Academy of Astronautics (France), main researcher, Laboratory of Applied Informatics, SPIIRAS. Research interests: radiative transfer theory, radiation field modeling in problems of the Earth remote sensing from space, geoinformatics. The number of publications — 290 scientific works, including 10 monographs, one discovery and 6 inventions. soi@ias.spb.su, SPIIRAS, 39, 14-th line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia, office phone/fax +7(812)328-4450.

References

1. Ambarcumjan V.A. *Nauchnye trudy* [Scholarly Works]. Yerevan: Armenian SSR Academy of Sciences Publ., 1960. vol. 1. 429 p. (In Russ.).
2. Chandrasekhar S. Radiative transfer. Oxford: Oxford Univ. Press. 1950. 394 p.
3. Sobolev V.V. Rassejanie sveta v atmosferah planet [Light scattering in planetary atmosphere]. Moscow: Nauka, 1972. 335 p. (In Russ.).
4. van de Hulst H.G. Multiple light scattering: Tables, Formulas and Applications. New York, Academic Press. 1980. 739 p.

5. Minin I.N. *Teoriya perenosa izluchenija v atmosferah planet* [The theory of radiation transfer in the planets atmospheres]. Moscow: Nauka, 1988. 264 p. (In Russ.).
6. Bohren C.F., Clothiaux E.E. *Fundamentals of Atmospheric Radiation*. Weinheim: Wiley-VCH, Verlag GmbH. 2006. 479 p.
7. Thomas G.E., Stamnes K. *Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean*. Cambridge, New York: Cambridge University Press. 2006. 540 p.
8. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Complete matrix solution of radiative transfer equation for pile of horizontally slabs. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2011. vol. 117. issue 7. pp. 1141–1148.
9. Budak V.P., Kaloshin G.A., Shagalov O.V., Zheltov V.S. Numerical modeling of the radiative transfer in a turbid medium using the synthetic iteration. *Optics Express*. 2015. vol. 23. no. 15. pp. 829–835.
10. Budak V.P., Zheltov V.S., Lubenchenko A.V., Frejdlin K.S., Shagalov O.V. [A fast and accurate synthetic iteration-based algorithm for numerical simulation of radiative transfer in a turbid medium]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and oceanic optics*. 2016. vol. 29. no 9. pp. 739–746. (In Russ.).
11. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering. *Light Scattering Reviews 5: Single Light Scattering and Radiative Transfer*. Berlin: Springer Praxis Books. 2010. pp. 147–204.
12. Ilyushin Ya.A. The advanced small angle approximation with application to the numerical radiative transfer calculations. *Proceedings of International Radiation Symposium (IRS/IAMAS)*. 2013. pp. 105–109.
13. Smokty O.I. Analytical spatial-angular structure of uniform slab radiation field for strongly elongated phase functions. *Proceedings of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'2016)*. Berlin, Springer. 2016. pp. 110–128.
14. Atberger C. Advances in remote sensing of agriculture: context description, existing operational monitoring systems and major information needs. *Remote Sens*. 2013. no. 5(2). pp. 949–981.
15. Hanes T.U. (Ed.) *Biophysical applications of satellite remote sensing*. Heidelberg–New York–London, Dordrecht: Springer. 2014. 230 p.
16. Zege E.P., Ivanov A.P., Katsev I.L., Prikhach A.S. [Retrieval of optical characteristics of the aerosol atmosphere and Earth's surface by the joint processing of different satellite information]. *Izv. RAN. Fizika atmosfery i okeana – Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*. 2014. vol. 50. no. 2. pp. 215–223. (In Russ.).
17. Belov V.V., Tarasenko M.V. On the accuracy and speed of RTM algorithms for atmospheric correction of satellite images in the visible and UV ranges. *Atmos. and Ocean Opt*. 2014. vol. 27. no. 1. pp. 56–61.
18. Duanabc S.-B., Licd Z.-L., Tanga B.-H., Wua H., Tanga R., Bi Y. Atmospheric correction of highspatial-resolution satellite images with adjacency effects: Application to EO-1 ALI data. *Int. J. Rem. Sens*. 2015. vol. 36. no. 19–20. pp. 5061–5074.
19. Veretennikov V.V. [Retrieval of microstructure parameters of coarse aerosol using their regression relationships with spectral extinction of light in the IR]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and oceanic optics*. 2017. vol. 30. no. 8. pp. 696–704. (In Russ.).
20. Lisenko S.A. [Atmospheric correction of multispectral satellite images based on the approximate model of the solar radiation transfer]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and oceanic optics*. 2017. vol. 30. no. 9. pp. 775–788. (In Russ.).
21. Seidel F.C., Kokhanovsky A.A., Schaepman M.E. Fast and simple model for atmospheric radiative transfer. *Atmos. Meas. Tech. Discuss*. 2010. vol. 3. no. 4. pp. 1129–1141.
22. Vasilev A.V., Kuznetsov A.D., Melnikova I.N. [Approximation of multiply scattered solar radiation in the framework of a single scattering]. *Uchenye zapiski RGGU – Proceedings of the Russian State Hydrometeorological University*. 2016. no. 42. pp. 94–103. (In Russ.).

23. Katkovsky L.V. [Parameterization of outgoing radiation for quick atmospheric correction of hyperspectral images]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and oceanic optics*. 2016. vol. 29. no. 9. pp. 778–784. (In Russ.).
24. Smokty O.I. Analytical approximation for homogeneous slab brightness coefficients in the case of strongly elongated phase functions *Radiation Processes in the Atmosphere and Ocean. Proceedings of International Radiation Symposium (IRS/IAMAS) (IRS'2016)*. 2017. pp. 145–149.
25. Hovenier J.W. A unified treatment of reflected and transmitted intensities of homogeneous plane-parallel atmospheres. *Astrom. and Astrophys.* 1978. vol. 68. pp. 239–250.
26. Smokty O.I. *Modelirovanie polej izluchenija v zadachah kosmicheskoj spek-trofotometrii* [Modeling of radiation fields in problems of space spectrophotometry]. Leningrad: Nauka, 1986. 352 p. (In Russ.).
27. Smokty O.I. Development of radiative transfer theory methods on the base of mirror symmetry principle. *Proceedings of International Radiation Symposium (IRS'2000): Current Problems in Atmospheric Radiation*. 2001. pp. 341–344.
28. Smokty O.I. The mirror symmetry principle for radiation fields in a vertically non-uniform atmospheric slab. *AIP Conference Proceedings. Ser. "Radiation processes in the atmosphere and ocean (IRS'2012)": Proceedings of the International Radiation Symposium (IRC/IAMAS)*. 2013. pp. 135–138.
29. Yanovitsky E.G. *Light scattering in inhomogeneous atmospheres*. Berlin: Springer, 1997. 371 p.
30. Smokty O.I. Improvements of methods of radiation fields numerical modeling on the basis of mirror reflection principle. *Proceedings of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'13)*. 2013. pp. 1–17.
31. *Perenos radiacii v rasseivajushhih i pogloshhajushhih sredah. Standartnye metody rascheta* [Radiative transfer in scattering and absorbing atmospheres: Standard computational procedures], Edited by Lenoble J. L.: Gidrometeoizdat, 1990. 264 p. (In Russ.).
32. Smokty O.I., Anikonov A.S. *Rassejanie sveta v sredah bol'shoj opticheskoj tolshhiny* [Light Scattering in Media with Large Optical Depth]. St. Petersburg: Nauka, 2008. 440 p. (In Russ.).
33. Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W. *Numerical Recipes. The art of Scientific Computing (Fortran Version)*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1989. 702 p.