

А.С. ГОРОБЦОВ, А.Е. АНДРЕЕВ, А.Е. МАРКОВ, А.В. СКОРИКОВ,
П.С. ТАРАСОВ

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНТЕЗА УСТОЙЧИВОГО УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ШАГАЮЩИХ РОБОТОВ

Горобцов А.С., Андреев А.Е., Марков А.Е., Скориков А.В., Тарасов П.С. Особенности решения уравнений метода обратной задачи для синтеза устойчивого управляемого движения шагающих роботов.

Аннотация. Рассматривается задача синтеза управляемого движения шагающих роботов методом обратной задачи. Уравнения метода обратной задачи представляются с помощью методов динамики связанных систем тел, как уравнения движения свободных тел и уравнения связей. Введены различные группы уравнений связей — для задания походки робота, для выполнения условий устойчивости робота и для согласованного движения заданных звеньев робота. Ключевая особенность уравнений метода обратной задачи в такой постановке состоит в наличии вторых производных координат системы в уравнениях связей, обеспечивающих поддержание роботом вертикального положения. Однозначное решение таких уравнений в общем случае невозможно из-за неопределенности начальных условий для множителей Лагранжа. Рассмотрен приближенный метод решения обратной задачи без учета инерционных составляющих в уравнениях связей, определяющих устойчивость робота. Выписаны уравнения связей, которые определяют согласованное движение отдельных звеньев робота и необходимые для однозначного решения задачи на основе приближенных уравнений. Представлена реализация методов синтеза программного движения в системе управления робота андроида AP600. Выполнено сравнение теоретических и экспериментальных показателей управляемого движения. Установлено, что при достигнутой высокой точности управления следящими приводами относительными движениями звеньев робота с погрешностью несколько процентов, показатели абсолютных движений робота, в частности, углы крена, рыскания и тангажа, отличаются от программных на 30–40%. Показано, что предложенный метод позволяет синтезировать управление роботом в квазистатическом режиме для различных типов движений — вперед, вбок, движение по ступенькам, наклоны и так далее.

Ключевые слова: робототехника, шагающие роботы, управление, антропоморфные роботы, обратная задача, андройды.

1. Введение. Шагающие роботы относятся к развивающемуся классу роботов. Конструкция шагающих роботов обладает избыточными степенями свободы, что отличает их от других мобильных машин, например, колесных, характеризующихся избыточными связями. Избыточные степени свободы робота определяют сложную локомоцию его движений — согласованных взаимных перемещений звеньев робота, обеспечивающих заданное конечное перемещение как всего робота, так и его отдельных частей. Управление локомоцией шагающих роботов является ключевым направлением современных исследований в этой области, которые, в первую очередь, направлены на достижение устойчивого движения как стабильного сохранения вертикального положения. Создание

совершенных методов управления шагающими роботами позволит получить новый класс машин с высокими параметрами по проходимости и универсальности применения, недостижимыми другими существующими транспортными платформами.

В настоящее время как в России, так и за рубежом существует достаточно большое число конструкций андроидов, в которых реализованы некоторые режимы двуногой ходьбы. На рисунке 1 показаны некоторые известные конструкции андроидов.

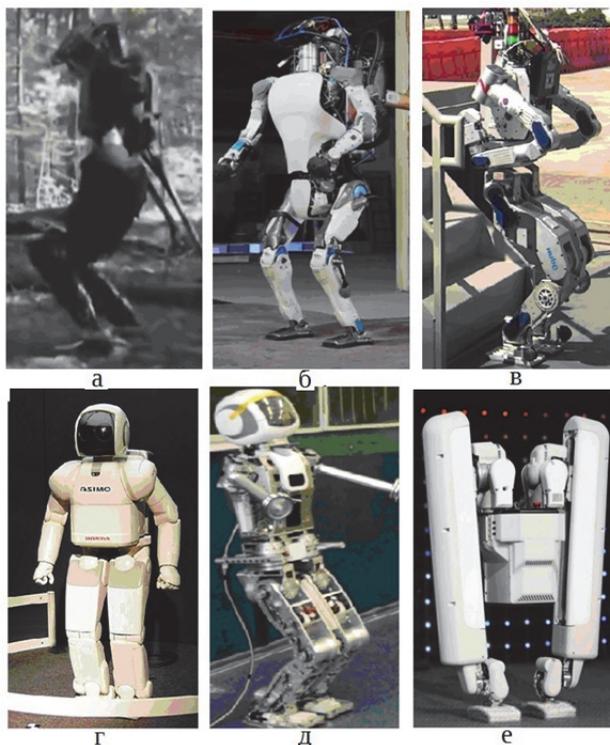


Рис. 1. Некоторые существующие образцы антропоморфных роботов:
 а, б) Boston Dynamics (США); в) Hubo (Республика Корея); г) Honda (Япония);
 д) AP600 (Россия); е) Google X (США)

На данный момент технические характеристики таких роботов позволяют планировать только весьма ограниченные коммерческие применения, например для испытания специальной одежды [1]. Интенсивно ведутся работы в области создания протезов нижних конечностей человека [2-4]. Тем не менее задача синтеза управления

локомоцией шагающих движителей таких роботов остается актуальной. Можно выделить два основных направления решения такой задачи — теоретические методы и методы копирующего управления, основанные, как правило, на использовании движений человека при формировании управляющих воздействий. Второе направление интенсивно развивается, например, в медицине [5], а в области шагающих роботов при разработке экзоскелетов [6].

В работе рассматриваются теоретические методы управления локомоцией роботов — андроидов, для которых вопросы устойчивости наиболее актуальны. Представленные ниже методы могут быть также использованы и для роботов с большим числом ног. Универсальным теоретическим методом синтеза управляемого движения многозвенных механических систем является метод обратной задачи [7, 8], позволяющий определять программные движения системы и ее приводов, реализующие заданный закон перемещения тел в общем случае. Некоторые теоретические аспекты двуногой ходьбы для плоского случая рассмотрены в [9, 10], однако применение таких подходов в методе обратной задачи ограничено расчетными схемами небольшой размерности. Наиболее общий подход может быть получен с помощью методов динамики связанных систем тел [11], для которых к настоящему времени разработаны эффективные численные алгоритмы и которые не накладывают существенных ограничений на размерность и структуру используемой математической модели.

Общее уравнение движения робота как пространственной механической системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} M\dot{x} = f(x, \dot{x}, t) + u(t) & (1a) \\ Q_1(x) = 0 & (1b) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x — вектор координат всей системы размерностью $n \times 6$, где n число тел системы, M — матрица инерции, $f(x, \dot{x}, t)$ — вектор позиционных, диссипативных и внешних сил, $Q_1(x)$ — вектор связей размерностью k_1 , описывающих кинематические пары, $u(t)$ — вектор сил (моментов) в приводах, приведенных к координатам тел. При $k_1 = n$ уравнения (1б) называются уравнениями кинематики, они однозначно задают движение механической системы и могут решаться независимо от уравнений (1а). Непосредственное решение уравнений в форме (1) используется редко из-за низкой вычислительной эффективности. В методах динамики систем тел, ориентированных на

численное решение, используется форма представления (1) с множителями Лагранжа и продифференцированными дважды уравнениями связей:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_1^T \mathbf{p}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{u}(t) & (2a) \\ \mathbf{D}_1 \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) & (2б) \end{cases} \quad (2)$$

где \mathbf{D}_1 — матрица коэффициентов уравнений связей размерностью $k_1 \times n$, \mathbf{p}_1 — вектор множителей Лагранжа размерностью k_1 , $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ — вектор правых частей вторых производных уравнений связей. Подробное описание уравнений (2) и особенностей их численного решения можно найти в [11]. Уравнения (2) суть дифференциально-алгебраические уравнения, поскольку включают в себя алгебраические величины — множители Лагранжа. Для решения уравнений (2) в настоящее время существует достаточно большое количество коммерческого и открытого программного обеспечения (ПО) [11]. В функции такого ПО входит автоматическое формирование уравнений движения и связей и их численное интегрирование. В настоящей работе для решения рассматриваемой задачи используется система моделирования динамики систем твердых тел ФРУНД [11].

Уравнения (1)-(2) в механике принято называть уравнениями прямой задачи, в которой находится движение системы по заданным действующим силам. В терминах аналитической механики уравнения (1)-(2) описывают систему с голономными связями. Для нахождения управлений $\mathbf{u}(t)$ в методе обратной задачи сначала ищется программное движение. Для этого действие управляющих сил заменяется дополнительными уравнениями связей. Уравнения (1) применительно к шагающим роботам в этом случае приобретают вид:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) & (3a) \\ \mathbf{Q}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & (3б) \\ \mathbf{Q}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(t) & (3в) \\ \mathbf{Q}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & (3г) \\ \mathbf{Q}_4(\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{z}(t)) = \mathbf{0} & (3д) \\ \mathbf{Q}_5(\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{z}(t)) < k_f & (3е) \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{Q}_2(\mathbf{x}), \mathbf{Q}_3(\mathbf{x}), \mathbf{Q}_4(\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{z}(t))$ — векторы связей, $\mathbf{Q}_5(\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{z}(t))$ — отношение модулей горизонтальной и вертикальной сил реакций в стопах робота.

Уравнение (3в) размерностью k_2 задает кинематику движения стоп робота и его корпуса. Вектор функция $w(t)$ включает в себя траектории точек левой и правой ног и корпуса.

Уравнение (3г) размерностью k_3 задает вспомогательные связи для исключения избыточных степеней свободы всего робота.

Уравнение (3д) размерностью $k_4 \leq 3$ определяет выполнение условия устойчивости. Условие устойчивости имеет вид [12]:

$$z(t) \in \Gamma, \quad (4)$$

где $z(t)$ — вектор координат точки приложения сил реакций связей в стопах робота, в которой главный момент реакций равен нулю. Такая точка имеет специальное название — точка нулевого момента (ТНМ). Γ — некоторая область на опорной поверхности, нахождение внутри которой обеспечивает устойчивость. В развернутом виде компонента (3д), например, для момента реакции относительно поперечной оси записывается:

$$\sum_{i=1}^n m_i (\ddot{z}_i + g)x_i - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i z_i - \sum_{i=1}^n A_i J_i \dot{\Omega}_i - z_x(t) \sum_{i=1}^n m_i (\ddot{z}_i + g) = 0, \quad (5)$$

где m_i — масса i -го тела, x_i, z_i — продольная и вертикальная координаты центра масс (ц.м.) i -го тела, A_i — матрица перехода из подвижной системы координат i -го тела в неподвижную, J_i — матрица моментов инерции тела, Ω_i — трехмерный вектор угловых скоростей тела в подвижной системе координат, $z_x(t)$ — продольная координата ТНМ. Если считать, что направления координат тел и неподвижной системы координат совпадают, то уравнение (5) соответствует уравнению моментов относительно оси y неподвижной системы координат. Аналогично записывается уравнение моментов относительно оси x , в которое входит поперечная координата ТНМ.

Уравнения связей вида (5) и, следовательно, (3д) качественно отличаются от уравнений связей (3б-3г) — в них входят вторые производные координат системы. Такие уравнения связей называются неголономными.

Скалярное неравенство (3е) задает условие отсутствия скольжения в стопах, которое зависит от коэффициента трения об опорную поверхность k_f . Левая часть этого неравенства представляет

собой отношение главных векторов горизонтальной и вертикальной реакции в стопах. Работы, в которых для шагающих роботов решается обратная задача с учетом отсутствия скольжения в форме неравенства (3е), нам неизвестны. Далее считается, что k_f велико, и неравенство (3е) выполняется.

Приведение системы (3) к виду (2) с помощью множителей Лагранжа и двойного дифференцирования (3б)-(3г) дает:

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{x} - D_2^T p_1 - D_2^T p_2 - D_3^T p_3 - D_{41}^T p_4 - D_{42}^T \ddot{p}_4 = f(x, \dot{x}, t) \\ D_1 \ddot{x} = h_1(x, \dot{x}) \\ D_2 \ddot{x} = \ddot{w}(t) \\ D_3 \ddot{x} = h_3(x, \dot{x}) \\ Q_4(x, \ddot{x}, z(t)) = 0 \end{array} \right. , \quad (6)$$

где D_2, D_3 — матрицы коэффициентов связей уравнений (3в) и (3г), D_{41}, D_{42} — матрицы коэффициентов связей уравнения (3д), соответствующие членам с координатами и их вторыми производными, p_2, p_3, p_4 — множители Лагранжа, соответствующие уравнениям (3в)-(3д). Необходимое условие однозначности решения (6) – отсутствие динамических степеней свободы:

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n . \quad (7)$$

Равенство (7) определяет условие отсутствия избыточных степеней свободы у системы. Для получения однозначного решения уравнения (2) такого условия достаточно, однако решение (6) зависит от неопределенных начальных условий для множителей Лагранжа p_4 и их первых производных и, кроме того, условию (4) могут удовлетворять различные функции $z(t)$. Можно утверждать, что система (6) представляет собой особый класс задач, для решения которых точных методов не существует. Ниже будут рассмотрены различные приближенные способы решения (6).

Следует заметить, однако, что (6) имеет точное решение в некоторых частных случаях. Например, если в первую подсистему (6) будет входить уравнение, содержащее только вторую производную одной координаты, то эта вторая производная находится из соответствующей компоненты уравнений 3д. Физически это может соответствовать, например, наличию в механической системе маховика, закрепленного на оси, проходящей через его ц.м.

Технически такое решение малоцелесообразно, но следует отметить, что на практике стабилизация такого типа известна — это балансирование канатоходца с помощью шеста.

Отметим также, что формально для решения обратной задачи и определения программного движения достаточно уравнений кинематики (3б)-(3д) при условии выполнения равенства (7). Тем не менее, численные алгоритмы более эффективны для решения полной системы (6).

Результат решения (6) — программные траектории координат робота, которые можно использовать для нахождения сил в приводах. Например, при использовании пропорционально-дифференциальных регуляторов (ПД регуляторов), величина силы в j -ом приводе:

$$u_j^*(t) = c_j \delta_j + d_j \dot{\delta}_j; j = 1, \dots, n_1. \quad (8)$$

Здесь $u_j^*(t)$ — сила (момент) на выходном звене j -го привода, c_j, d_j — коэффициенты ПД регулятора, δ_j — отклонение между измеренным и программным значениями смещения выходного звена привода, n_1 — количество приводов робота.

Отклонение δ_j равно:

$$\delta_j = \phi_c - \phi_p, \quad (9)$$

где ϕ_c — смещение привода в управляемом движении (измеренное смещение), ϕ_p — программное смещение. Программное смещение получается при решении системы (6). Методом обратной задачи можно найти и непосредственно программные силы в приводах [13]. Вопросы управления по силам в приводах в настоящей работе не рассматриваются. Мы также опускаем вопрос вычисления смещений приводов и приведения сил приводов к соответствующим степеням свободы тел робота, поскольку это легко решается в существующих системах моделирования динамики систем тел с помощью стандартных элементов описания расчетных схем.

2. Возможные методы решения обратной задачи с учетом условий устойчивости. Как уже указывалось, уравнения (6) представляют собой особый класс задач динамики механических систем с неголономными связями. Уравнения неголономных связей содержат еще и неизвестную функцию времени $z(t)$ (три координаты ТНМ), для которой задана только весьма произвольная область

изменения (4). Многозначность решения и отсутствие точных математических методов решения таких задач ведет к использованию различных приближенных подходов.

С точки зрения численного решения системы (6) при заданной $z(t)$, известное на сегодня ПО расчета динамики систем тел не содержит возможностей учета неголономных связей в виде уравнений со вторыми производными в форме (5), хотя принципиальных сложностей для их реализации нет. Общепринято использовать различные редуцированные приближения (5), полученные, например, отбрасыванием членов со вторыми производными. Кроме того, неголономные связи обуславливают неоднозначность решения задачи Коши системы (6) при ненулевых начальных условиях из-за множителей Лагранжа, входящих в уравнения движения тел в виде вторых производных.

Можно отнести все известные методы решения системы (6) к вариационным. Выделяются несколько модификаций этих методов.

1. Прямое решение (численное интегрирование) (6) для заданной функции $z(t)$. Функция $z(t)$ может быть выбрана, например, на основании анализа экспериментальных данных. Если не касаться вопроса начальных условий для соответствующих множителей Лагранжа, то такое решение всегда существует, если оно физически реализуемо. Физическая нереализуемость движения выражается в нарушении геометрических ограничений, определяемых размерами звеньев кинематической схемы робота. Реализуемость движений, очевидно, зависит от числа избыточных степеней свободы робота k_3 (числа дополнительных уравнений связей (3г)). Чем больше избыточных степеней свободы, тем проще избежать геометрических ограничений. Недостаток метода — использование дополнительных уравнений связей, которые, по сути, носят эмпирический характер и формализовать получение которых достаточно сложно. Заметим также, что в скелетах животных число степеней свободы увеличивается за счет составного позвоночника и зачастую наличия специального органа — хвоста.

2. Параметризация компонентов функции $z(t)$. Задача сводится к поиску оптимальных параметров $z(t)$ на некотором временном интервале, минимизирующих величину:

$$\left| Q_4(\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{z}(t)) \right|_{\max} \quad t \in t_0, t_1, \quad (10)$$

при этом значения координат и их производных находятся из решения модифицированной системы (6) при выполнении условия (7). В

качестве критерия оптимизации могут использоваться и другие выражения, например, среднеквадратическое отклонение. Широко распространенная модификация системы (6) — упрощение уравнений (5), определяющих выполнение условий устойчивости за счет удержания только составляющих моментов от весов тел. Уравнение (5) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^n m_i g x_i - z_X(t) \sum_{i=1}^n m_i g = 0. \quad (11)$$

Система (6) в этом случае записывается:

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{x} - D_1^T p_1 - D_2^T p_2 - D_3^T p_3 - D_{41}^T p_4 = f(x, \dot{x}, t) \\ D_1 \ddot{x} = h_1(x, \dot{x}) \\ D_2 \ddot{x} = \ddot{w}(t) \\ D_3 \ddot{x} = h_3(x, \dot{x}) \\ D_{41} \ddot{x} = h_4(\ddot{z}(t)) \end{array} \right. . \quad (12)$$

Решение такой задачи будет соответствовать заданному типу движения корпуса робота и параметров шага, которые определяются функцией $w(t)$. Можно расширить область параметров оптимизации за счет введения в нее параметров шага. Возможно также задание других критериев оптимизации. Однако в любом случае сохраняется главный недостаток такого решения, заключающийся в том, что решение будет соответствовать только одному типу программного движения корпуса робота.

3. Параметризация коэффициентов дополнительных уравнений связей (3г), в предположении, что функция $z(t)$ задана, ее параметры фиксированы, но зависят от $w(t)$. Задача сводится к поиску оптимальной структуры и параметров дополнительных уравнений связей с минимизацией критерия типа (10). Отличие от подхода п.п. 2 в том, что акцент делается на оптимизацию параметров дополнительных уравнений связей. Если в функции $w(t)$ компоненты, определяющие движение стоп, связаны с компонентами, задающими программное движение корпуса, а функция $z(t)$, как уже отмечалось, зависит от $w(t)$, то решение задачи будет удовлетворять различным законам движения корпуса робота.

В существующих системах управления роботами андроидами в основном реализованы различные варианты второго метода. Рассмотрим существующие системы управления роботами андроидами.

3. Существующие подходы к использованию метода обратной задачи в системах управления движением антропоморфных роботов. Управление для существенно неустойчивого режима хронологически было впервые реализовано в одноногом прыгающем роботе [12]. Принцип управления получил название SLIP (Spring Loaded Inverted Pendulum — подпружиненный обратный маятник). В широком круге работ такой подход применяется к управлению двуногими роботами. В [14] представлен способ формирования управления двуногим роботом WL-12R (высота 184 см, масса 127 кг). Можно выделить три части системы управления этого робота — генератор походки, решающий обратную задачу для определения программного движения; планировщик походки, задающий траектории стоп и ТНМ; и блок стабилизирующих обратных связей. Для системы (6) можно провести соответствия с этими частями — генератор походки задается уравнениями связей (3б)-(3д), планировщик походки функциями $w(t)$ и $z(t)$. Блок стабилизирующих обратных связей в системе (6) отсутствует, поскольку эти уравнения описывают только программное движение робота. Приведенная структура системы управления типична для современных шагающих роботов. Планировщик ТНМ робота WL-12R использует уравнения движения в виде связанных точечных масс. Описание генератора походки не приводится. Отмечается [15], что такой робот достигает скорости 38 см/с.

Один из наиболее высокоподвижных из известных антропоморфных роботов — робот ASIMO [16] (высота 120 см, масса 43 кг) обладает максимальной скоростью 3 км/ч. Данный робот самый низкий из представленных на рисунке 1. Подробности алгоритмов системы управления в литературных источниках отсутствуют.

В большинстве существующих в настоящее время систем управления антропоморфными роботами используются упрощенные уравнения динамики и уравнения связей ТНМ (3а, 3д) и точные уравнения связей для кинематической схемы и стоп (3б, 3в). В [17] представлен робот KHR-2 (высота 120 см, масса 56 кг). Планировщик походки, для определения параметров функции $z(t)$, использует решение уравнения обратного маятника. Такое уравнение описывает движение продольной или поперечной координаты ц.м. робота и получается из (5) исключением членов с вертикальными ускорениями и производными от угловых скоростей звеньев робота, а также допущением, что высота ц.м. всех звеньев робота одинакова. Из уравнения перевернутого маятника находится период поперечных или продольных колебаний робота, который затем синхронизируется

с периодом шага, в результате чего с помощью интерполяций получают выражения для функций $w(t)$ и $z(t)$. Функция $w(t)$ входит в уравнение (3в), а $z(t)$ в (3д). Для рассматриваемого робота KHR-2 уравнение (3д) в форме (11) максимально упрощается: оно выражает условие движения только точки одного тела — тазового звена робота, по закону $z(t)$.

Планировщик походки использует три входных параметра — период шага, коэффициент времени опоры на двух ногах, величину поперечного смещения тазового звена. Рассматривается только движение вперед по прямой. Период цикла шага равен 1,9 с. Коэффициент времени опоры для человека равен 10-20 % от периода шага, для робота принималось 5 %. Амплитуда бокового смещения таза 6,4 см при расстоянии между центрами стоп 14 см. Параметры шага рассчитывались для выбранного периода шага. Высота подъема стопы 4 см, длина шага 20 см, форма траектории стопы трапецевидная с интерполяцией тригонометрическими функциями с отсутствием разрывов по скоростям. Форма кривой поперечного смещения таза также интерполировалась тригонометрическими функциями и имела горизонтальные участки для повышения устойчивости. Ходьба начинается из специального начального положения, что, очевидно, связано с тем, что параметры шага определялись для установившегося режима.

Как следует из предыдущего анализа, генератор походки использует упрощенные уравнения, что является одной из причин погрешностей, приводящей к падению робота. Для компенсации таких погрешностей служит блок стабилизирующих обратных связей, в котором можно выделить 3 группы связей — поддержания равновесия, коррекции генератора походки и предикторов падения.

Группа поддержания равновесия включает 4 контура.

Первый контур — демпфирование колебаний при опоре на одну ногу, которое реализовано как дифференциальная обратная связь по угловой скорости крена для привода продольного поворота стопы.

Второй контур — компенсация смещения точки нулевого момента в фазе опоры на одной ноге. Текущие координаты ТНМ получаются из данных датчиков усилий в стопе. Корректирующие величины продольных и поперечных смещений звена таза вычисляются в контуре с обратной связью, в котором используется эмпирическая передаточная функция робота, полученная экспериментально, а передаточная функция обратной связи синтезирована с помощью частотных методов теории автоматического управления.

Третий контур — компенсация непараллельности стопы поверхности при касании за счет ПД регулятора, на вход которого подается момент реакции стопы [18-20].

Четвертый контур — коррекция программного движения стоп, изменяющая фазу их движения в соответствии с фактическим моментом начала опоры каждой стопы.

Группа коррекции генератора походки состоит из двух контуров.

Первый контур — коррекция программного движения звена таза на последующих шагах путем оценки ошибки координат ТНМ на предыдущих шагах.

Второй контур — коррекция положения торса робота в горизонтальной плоскости по эмпирическому алгоритму, используемому в качестве входных параметров измеренные углы крена и тангажа.

Группа предикторов падения содержит два контура.

Первый контур — предсказание позиции наступания. Контур использует статистику движения робота и увеличивает длину выполняемого шага и наклон торса в случае необходимости, что уменьшает вероятность падения вперед.

Второй контур — предсказание падения набок. Контур корректирует угол поперечного наклона оси ступни по предложенному эмпирическому алгоритму.

Генератор походки, используя данные по абсолютным координатам звеньев робота, полученные при решении обратной задачи, вычисляет программные углы поворотов приводов, которые реализуются с помощью ПД регуляторов приводов.

Кроме датчиков положений приводов в обратные связи включены датчики координат ТНМ, углового положения и скорости торса и усилий в ступне. Координаты ТНМ и усилия в ступне подаются в группу поддержания равновесия, а угловые положения, скорости торса и координаты ТНМ в группы коррекции генератора походки и предикторов падения.

Система управления обеспечивала максимальную скорость 22 см/с. Эксперимент также показал, что разница между измеренным и программным положением ТНМ составляет 5-10 см.

В работе [21] для этого же робота приведены экспериментальные данные по параметрам вертикальных реакций в стопах. Динамические выбросы реакций достигают 20-30 % от статических величин в фазе опоры на одной ноге и 40-50 % в фазе опоры на двух ногах. Частота осцилляций реакций около 10 Гц. В [20] для этого же робота используется представление функций координат

ТНМ и стоп в форме полиномов третьего порядка. Разница между измеренным и программным положением ТНМ по сравнению с предыдущим методом интерполяции существенно не изменилась.

В [21] рассматривается метод подбора начальной позы робота, из которой начинается движение. С помощью компьютерного моделирования показано, что правильный выбор начального положения уменьшает время выхода на шагание в стационарном режиме, при этом возмущения по углам качания торса уменьшаются на 50%. Метод прошел апробацию на ряде роботов.

В [18-21] в генераторе походки для представления координат ТНМ и стоп использовались тригонометрические и полиномиальные функции. В работе [22] рассматриваются теоретические возможности использования для этих целей дифференциальных уравнений с дробными производными.

Планировщики походки могут использовать результаты решения прямой задачи с применением данных антропометрических баз [23]. В таких моделях рассматривается расширенный круг движений робота — вставание со стула, поднятие груза и так далее.

Важным контуром обратных связей является контур гашения колебаний при опоре на одну ногу [24], для высоких роботов (выше 120 см) это особенно актуально. В работе рассматриваются контуры гашения угловых колебаний относительно точки опоры ноги в трех плоскостях — продольной, поперечной и горизонтальной. Колебания гасятся за счет введения демпфирования в контуры управления поворотами ног в бедре. Собственные частоты колебаний поднятых ног составляли около 3 Гц.

Робот TORO (рост 174 см, вес 76 кг) [25] содержит в стопах шестикомпонентные датчики сил и моментов для определения координат ТНМ в управляемом движении. Алгоритм управления походкой базируется на методе, названном авторами методом дивергентной компоненты движения (DCM — Divergent Component Motion) [26-34]. Движение ц.м. робота в пространстве происходит вдоль некоторой асимптотически устойчивой траектории, которая и называется дивергентной компонентой движения [25]. Асимптотическая устойчивость траектории обеспечивается тем, что программные координаты ц.м. находятся из системы трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Сама дивергентная компонента определяется по предлагаемым эмпирическим уравнениям. Метод также апробирован на пространственной одномассовой виртуальной модели.

Еще один метод стабилизации робота — согласованное (compliance) управление [35]. Используется понятие

СОР (Centre Of Pressure) как более широкое, чем ТНМ, поскольку выполнение условий устойчивости для ТНМ не означает, что робот не потеряет устойчивость через несколько шагов. Согласованное управление сводится к тому, что по разнице между измеренными и программными координатами ц.м. и его скоростями вычисляются дополнительные силы, которые пересчитываются в соответствующие корректировочные значения параметров походки. Различные варианты этого метода рассмотрены в [36-40]. В [35] приведены расчетные и экспериментальные данные по эффективности предложенного метода для экспериментального робота высотой 110 см и скоростей движения 5 см/с. Для решения обратной задачи используются значительно редуцированная модель.

Роботы семейства ATLAS имеют систему управления, также построенную на принципе обратного маятника [12]. Роботы могут оснащаться как электрическими, так и электрогидравлическими приводами. Планировщик походки для построения траектории ТНМ использует стратегию так называемой точки захвата (Capture motion) [27]. Стратегия подразумевает определение координат каждого шага из условия возможности остановки робота в данном положении. Использование электрогидравлических приводов высокой удельной мощности позволило в роботах этого семейства реализовать динамическую походку с относительно малым периодом шага. Отличительная черта движения этих роботов — постоянное перешагивание, в том числе при стоянии на месте. Это можно объяснить особенностями функции, описывающей поперечное смещение ТНМ — робот имеет узкую стопу и ТНМ лежит внутри области, ограниченной в поперечном направлении внутренними границами стоп. Такая же особенность походки и у четырехногой шагающей машины этого семейства.

Двуногий робот с поступательными гидравлическими приводами представлен в [41]. Алгоритмы управления основаны на решении линеаризованных уравнений обратного маятника. Экспериментальные данные по параметрам управляемого движения этого робота не приводятся.

Кроме метода обратной задачи для управления шагающими роботами разрабатываются методы, базирующиеся на нейронных сетях, в частности на обучении с подкреплением [36-40]. В работе [42] алгоритмы обучения с подкреплением используются для управления бегом. Существующие нейронные алгоритмы оптимизируют параметры интерполяционных функций сил в приводах робота, а для расчета критериев оптимизации используют решение прямой задачи динамики робота вида (1). Примеры реализации нейронных алгоритмов для

двуногих роботов есть только на виртуальных моделях. Для реальных роботов есть примеры обучения движениям небольшой длительности по времени, например, удар по бейсбольному мячу [43]. В целом недостатки нейронных алгоритмов совпадают с недостатками решения обратной задачи методом п.п. 2.2 — получаемый в результате обучения закон управления соответствует только одному типу движений робота в заданной окружающей обстановке.

Для решения обратной задачи могут использоваться технологии параллельных вычислений [44].

Архитектуры систем управления двуногими и многоногими роботами схожи [39], основные отличия касаются уравнений, описывающих кинематическую схему робота. Структура таких уравнений идентична системе (3).

Наряду с подходами, использующими для описания траекторий ТНМ и точек стоп интерполяции тригонометрическими или полиномиальными функциями, можно выделить методы, где вместо точечных интерполяций используются движения по предельным циклам различных осцилляторов, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Применение таких осцилляторов показано в [36] на плоской математической модели андроида. Нелинейные уравнения невысокой размерности также используются для построения регуляторов скорости движения двуногих роботов [27]. Известны работы, в которых для приводов андроидов вместо ПД регуляторов синтезируются оптимальные линейные регуляторы [38].

На основании обзора можно сделать вывод, что большинство существующих систем управления основаны на методе обратной задачи и используют упрощенные математические модели. Наиболее значительные упрощения касаются уравнений, выражающих условия устойчивости робота. По этой причине все рассмотренные системы управления имеют развитые обратные связи, предназначенные для улучшения качества управления. Однако, как следует из обзора, эффективность этих обратных связей нельзя считать удовлетворительной. Невысокая эффективность таких обратных связей, на наш взгляд, вызвана тем, что корректирующие управления являются результатом преобразования звеньями с эмпирическими передаточными функциями и поступают на вход генераторов походки, построенных на упрощенных уравнениях, которые не являются даже линейными приближениями исходных уравнений в текущей точке фазового пространства.

Известные системы управления, как правило, реализуют отдельные режимы движения робота, например, прямолинейное движение вперед по ровной горизонтальной поверхности. С точки

зрения используемой модификации метода обратной задачи, известные системы используют метод, близкий методу п.п. 2.2.

Лучшие результаты по управлению достигнуты для роботов небольшого роста, около 150 см. Все известные шагающие роботы имеют цельную ступню и вызванную этим походку на согнутых в коленях ногах.

4. Предлагаемый метод управления. В данной работе рассматривается разработанная система управления роботом AP600 — рисунок 1, производства ПАО «Андроидная техника». Структура системы управления роботом показана на рисунке 2.



Рис. 2. Структура системы управления роботом

В качестве входных величин системы управления задаются горизонтальные компоненты скорости корпуса робота и параметры шага — максимальная длина, минимальный период, высота подъема, относительные фазы ног. Рассматривается движение робота без поворота относительно вертикальной оси.

Планировщик походки состоит из трех частей, формирующих траектории точек стоп, траектории ТНМ и уравнения дополнительных связей. Трехмерные траектории точек стоп формируются в неподвижной системе координат для одной точки на каждой стопе, лежащей на уровне опорной поверхности в фазе опоры и совпадающей с проекцией центра шарнира стопы. Траектория стопы на одном шаге состоит из четырех участков — подъема, переноса, опускания и опоры. Форма траектории в вертикальной плоскости прямоугольная, на каждом участке кинематические параметры интерполируются тригонометрическими функциями. Для каждого участка вычисляются перемещения, скорости и ускорения. Типичный вид кинематических параметров траектории стопы показан на рисунке 3.

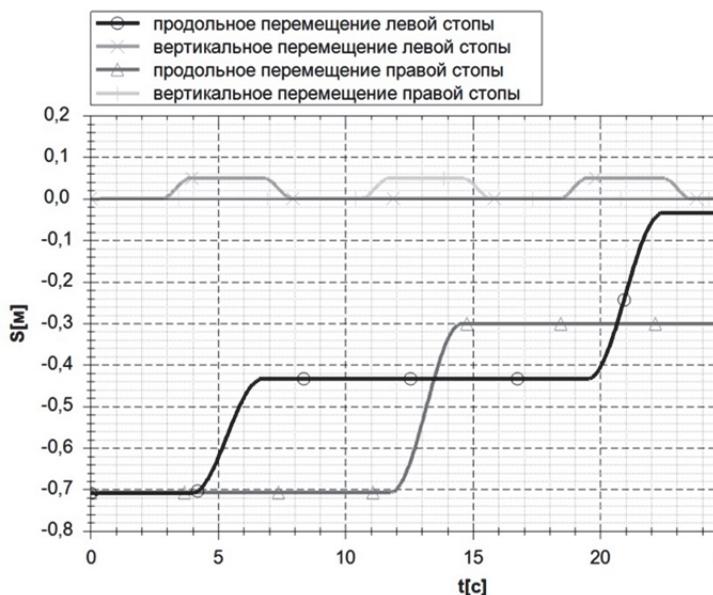


Рис. 3. Программные продольные и вертикальные перемещения стоп робота

Интерполяция тригонометрическими функциями приводит к разрыву скоростей и скачкам ускорений. Из рисунка 4 видно, что в момент начала подъема стопы ускорения скачком принимают максимальные значения. Тем не менее такая интерполяция широко применяется в генераторах походок известных систем управления [17-21]. Как уже отмечалось выше, для исключения таких разрывов и скачков в работах [22, 23, 36-38] рассматривается возможность использования других методов интерполяции — нелинейными

автоколебательными циклами, дифференциальными уравнениями с дробными производными и другие.

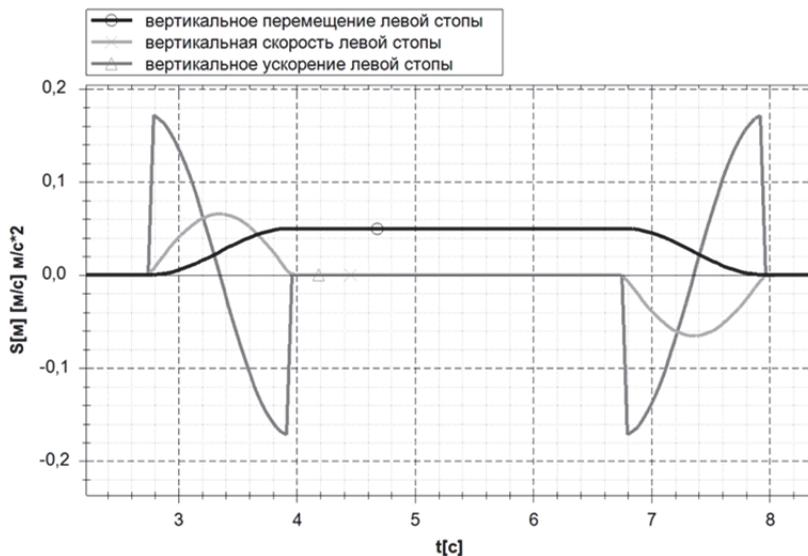


Рис. 4. Программные вертикальные перемещения, скорости и ускорения левой стопы робота

При формировании горизонтальных составляющих траекторий точек стоп используются прогнозируемые значения по соответствующим кинематическим параметрам движения корпуса робота. Движение робота задается по трем точкам корпуса, суммарно по шести направлениям, что однозначно определяет его пространственное положение. Связь траекторий точек стоп с движением корпуса позволяет планировать перемещение стоп при движении робота в любом направлении, повороте и изменении высоты опорной поверхности [13]. Алгоритм изменяет длину шага в зависимости от величины перемещения корпуса, а также позволяет изменять вертикальную координату стопы в зависимости от высоты опорной поверхности, например, при шагании по ступенькам.

Формирование траектории ТНМ робота — компонент функции $z(t)$ выполняется на основании условия (4). Общепринятое условие устойчивости — ТНМ лежит внутри полигона, образованного периметром стоп [17-27]. В рассматриваемой системе управления ТНМ совпадает с центром стопы при опоре на соответствующую ногу или перемещается по прямой, соединяющей

точки центров стоп в фазах опоры на обе стопы. Считается, что цикл шагания состоит из 4 частей — опоры на правой ноге и переноса левой ноги, переноса центра опоры с правой ноги на левую, опоры на левой ноге и переноса правой, переноса центра опоры с левой ноги на правую. Траектория ТНМ интерполируется тригонометрическими функциями. Характерная форма траектории ТНМ для случая с полной остановкой перемещения ТНМ в фазах опоры на одну ногу показана на рисунке 5. Разработанный алгоритм обладает возможностью варьирования амплитудой и временем начала и окончания поперечного смещения ТНМ, допускает наличие постоянной составляющей продольной скорости ТНМ.

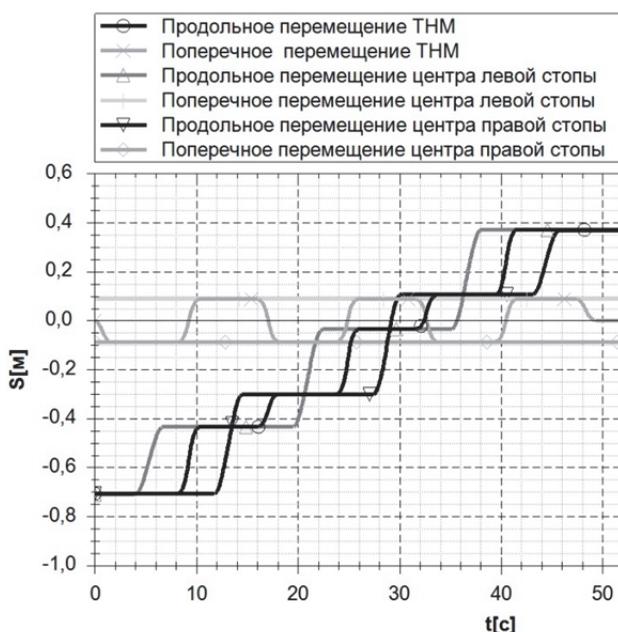


Рис. 5. Программная траектория ТНМ робота

Как отмечалось выше, дополнительные связи служат для задания закономерностей взаимного движения звеньев робота с целью исключения избыточных степеней свободы в роботе и, следовательно, многозначности его возможных движений.

В целом планировщик походки вычисляет для заданного момента времени параметры траекторий точек стоп, корпуса, ТНМ, а также формирует уравнения дополнительных кинематических связей.

Блок обратной задачи по данным планировщика походки вычисляет программные углы приводов робота, решая систему (12). Блок обратной задачи выполнен в системе моделирования динамики систем связанных тел ФРУНД [11, 44], и использует полную динамическую модель робота — рисунок 6.

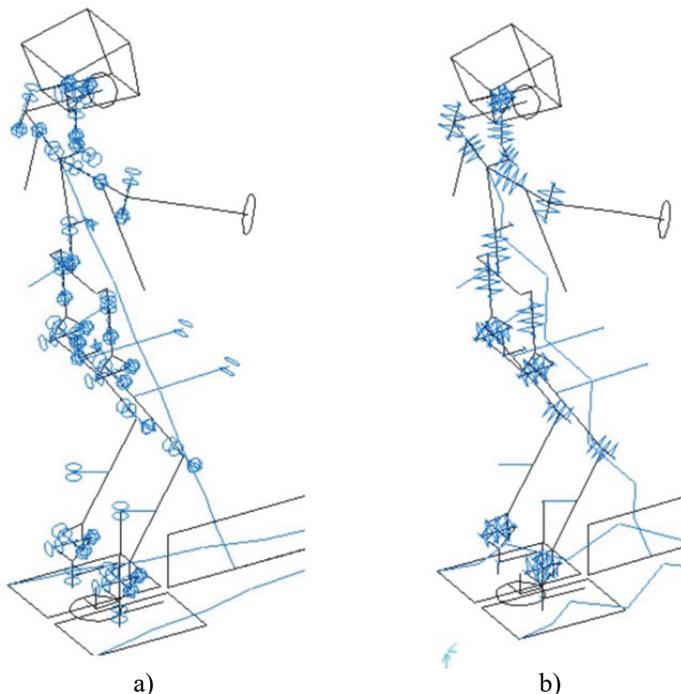


Рис. 6. Схема компьютерной модели андроида, использованной для генерации программного движения: а) кинематическая схема; б) схема приводов

В литературных источниках [1-21] блок обратной задачи зачастую называют блоком обратной кинематики (*inverse kinematics*), хотя задача кинематики для многосвязных пространственных схем имеет больше вычислительных ограничений, чем задача динамики, например, при наличии избыточных связей или степеней свободы. В настоящей работе решается задача динамики, поскольку это позволяет ввести в рассмотрение больше классов структур кинематических цепей. Отметим также, что обратная задача является достаточно сложной математической и вычислительной проблемой, не всегда корректной. В робототехнике для ее решения, как правило, используются специализированные программы, например, SL [21], или

универсальные пакеты динамики систем тел (MBS пакеты). Существуют классы шагающих машин, в которых упрощение решения обратной задачи достигается за счет применения специальных конструктивных схем, например как в шагающих машинах с ортогональными движителями [45].

Программный комплекс ФРУНД позволяет решать уравнения (12) автономно для анализа параметров движения робота или в составе системы управления роботом.

Каждая компонента функции $z(t)$ входит в одно из трех уравнений, выражающих условие устойчивости. Применяются упрощенные уравнения вида (11), которые, в отличие от известных работ, включают в себя все слагаемые с координатами звеньев робота. Физически это соответствует движению ц.м. робота по траектории $z(t)$. Уравнения (11) асимптотически стремятся к (5) при бесконечно малой скорости движения звеньев робота. Режим движения, удовлетворяющий уравнениям (11), можно назвать квазистатическим.

Составляющие $z_x(t)$ и $z_y(t)$, как уже отмечалось, имеют вид, показанный на рисунке 5. Вертикальной координате $z_z(t)$ может назначаться специальная функция, например, огибающая поверхности переменной высоты. При шагании по ровной поверхности вертикальной координате присваивается постоянное значение, подобранное расчетным путем из условия минимального угла сгиба ног в коленном суставе. Известные кинематические схемы роботов содержат стопу, выполненную в виде одного звена, при этом во время шагания плоскость стопы горизонтальна. Такая кинематическая схема позволяет изменять расстояние от ц.м. робота до места опоры стопы в основном за счет сгиба ноги в колене. По этой же причине в позе готовности и во время шагания ноги согнуты в коленях, что также характерно для известных конструкций роботов (рисунок 1). С энергетической точки зрения шагание на согнутых ногах лишает всех преимуществ, свойственных парасагиттальному типу расположения конечностей, характерному для высших животных, в частности млекопитающих. Движения робота с опорой на прямые ноги конструктивно можно добиться двумя путями — введением дополнительных звеньев в торсе или в ступне. Кинематические схемы существующих роботов, как правило, выбраны из условия минимального количества шарниров и приводов, но такое условие определяет возможность шагания только на согнутых ногах.

На рисунке 7 показаны расчетные положения робота в конце шага с разной высотой ц.м., из которых видно, что при высоком расположении ц.м. взаимные повороты звеньев приобретают неприемлемо большие значения. Неразрешимость этой проблемы в рамках существующих кинематических схем привела к появлению кинематических схем роботов без коленного сустава (рисунок 1е).

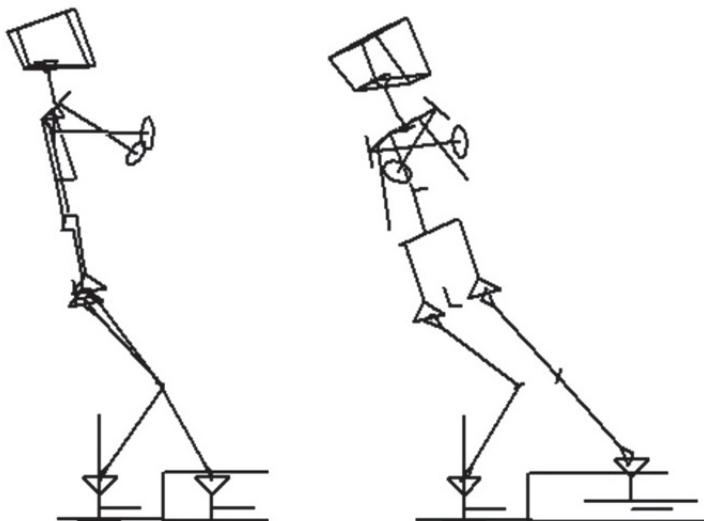


Рис. 7. Расчетные положения робота в конце шага левой ногой, высота ц.м. – 0.57 м. (слева) и 0.61 м. (справа)

Перечислим используемые уравнения дополнительных связей.

Связь между углом продольного наклона торса и продольными углами бедер обеих ног:

$$U_{yk} + k_y U_{yl} + k_y U_{yr} = U_{yp}. \quad (13)$$

Здесь U_{yk} — угол поворота торса робота относительно поперечной оси, U_{yl} — угол поворота левого бедра относительно поперечной оси, U_{yr} — угол поворота правого бедра относительно поперечной оси, U_{yp} — среднее значение угла поворота торса в продольной плоскости, k_y — масштабный коэффициент. За счет этого уравнения достигается изменение среднего значения продольного угла наклона торса (рисунок 8).

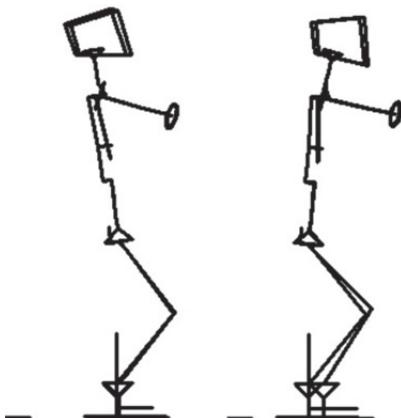


Рис. 8. Изменение продольного наклона корпуса в зависимости от коэффициентов уравнения (13), фаза начальной позы

Связь между углом наклона торса относительно продольной оси и поперечной координатой ц.м. робота:

$$S_{yk} + k_x U_{xk} = 0. \quad (14)$$

Здесь S_{yk} — поперечное смещение ц.м. торса, U_{xk} — угол поворота торса относительно продольной оси, k_x — масштабный коэффициент. Такая связь позволяет изменять размах угла наклона торса в поперечной плоскости – (рисунок 9) и тем самым регулировать диапазон углов приводов. Например, для робота AP600 при походке, показанной слева на рисунке 9, происходит превышение максимальных углов поворота бедер относительно продольной оси, а при другой походке программные углы поворота торса укладываются в конструктивные ограничения — рисунок 9 справа.

Связи, фиксирующие углы поворота стоп в продольной и поперечной плоскости:

$$U_{xsl} = 0,$$

$$U_{ysl} = 0,$$

$$U_{xsr} = 0,$$

$$U_{ysr} = 0.$$

Здесь U_{xsl}, U_{ysl} — углы поворота левой стопы относительно продольной и поперечной осей соответственно, U_{xsr}, U_{ysr} — аналогичные углы поворота правой стопы.

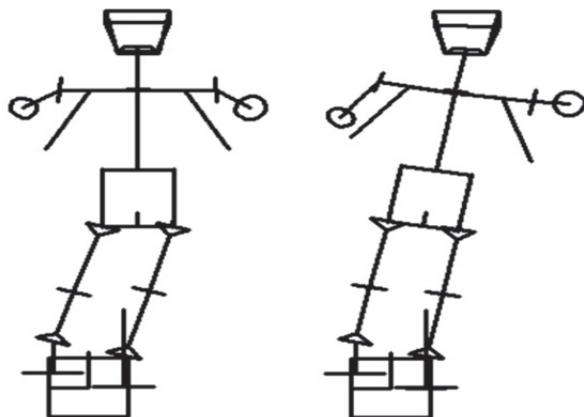


Рис. 9. Изменение поперечного наклона корпуса в зависимости от коэффициентов уравнения (14), фаза опоры на правую ногу

Связи, задающие угловое положение головы относительно продольной и поперечной осей:

$$\begin{aligned} U_{xh} &= 0, \\ U_{yh} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь U_{xh}, U_{yh} — углы поворота головы относительно продольной и поперечной осей соответственно

Связи, задающие поперечное расстояние от рук до корпуса:

$$\begin{aligned} S_{yk} - S_{yla} &= S_{ylp}, \\ S_{yk} - S_{yra} &= S_{yrp}. \end{aligned}$$

Здесь S_{yk} — поперечное смещение ц.м. корпуса, S_{yla}, S_{yra} — поперечное смещение ц.м. левой и правой рук, S_{ylp}, S_{yrp} — поперечное расстояние от левой и правой рук до ц.м. корпуса.

Связи, задающие вертикальное расстояние от рук до корпуса:

$$\begin{aligned} S_{zk} - S_{zla} &= S_{zlp}, \\ S_{zk} - S_{zra} &= S_{zrp}. \end{aligned}$$

Здесь S_{zk} — вертикальное смещение ц.м. корпуса, S_{zla}, S_{zra} — вертикальное смещение ц.м. левой и правой рук, S_{zlp}, S_{zrp} — вертикальное расстояние от левой и правой рук до ц.м. корпуса.

Расчетная схема робота, соответствующая его кинематике, содержит 22 тела, то есть 132 степени свободы. После наложения всех связей при расчете обратной задачи система (12) становится статической с нулевым числом степеней свободы, поскольку общее число уравнений связей равно числу степеней свободы свободной системы.

Для работы системы управления необходимо согласование нулевых положений углов приводов, что выполняется на вспомогательной модели робота, которая с помощью дополнительных упругих связей выставляется в положение, соответствующее конструктивным нулевым значениям датчиков углов поворота приводов.

Программно система управления роботом выполнена в виде дополнительных модулей системы моделирования ФРУНД, которая через программу сетевого интерфейса связана с сетью робота.

С помощью представленной системы управления были проведены эксперименты с движением робота AP600 (рисунки 10-12).

Система управления в режиме реального времени решает систему уравнений (12) со скоростью, достаточной для того, чтобы обеспечить частоту подачи сигналов управления 200 Гц (процессор Intel core i7).

Система управления позволяет выполнять различные типы движений: движение вперед и назад (рисунок 10); движение вбок (рисунок 11), движение вперед через ступеньку (рисунок 12). Реализована также возможность выполнения роботом наклонов при стоянии на месте.

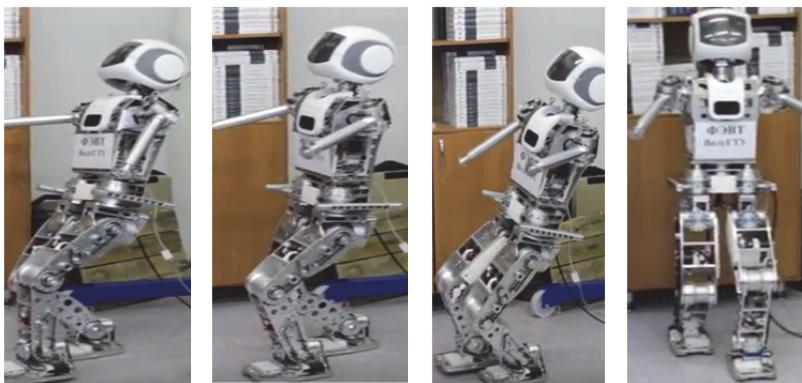


Рис. 10. Движение робота вперед

(URL: frund.vstu.ru/volggtu-robot-android-ar-600-21-marta-2016)

Эксперименты показали возможность длительного шагания робота в таком режиме и достаточно точное воспроизведение программного движения приводов (рисунок 13). Различие по параметрам абсолютного движения значительно больше (рисунки 14-16).

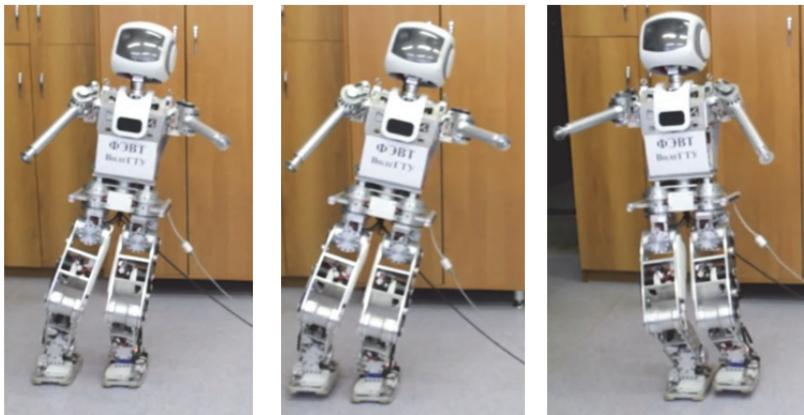


Рис. 11. Движение робота вбок
(URL: <http://frund.vstu.ru/volggtu-robot-android-ar-600-22-marta-2016/>)



Рис. 12. Перешагивание робота через препятствие
(URL: frund.vstu.ru/volggtu-robot-android-ar-600-preodolevaet-stupen-16-marta-2016/)

Эксперименты показали возможность длительного шагания робота в таком режиме и достаточно точное воспроизведение программного движения приводов (рисунок 13). Различия по параметрам абсолютного движения значительно больше (рисунки 14–16).

На рисунке 13 показаны программные и измеренные углы поворота привода левого колена. Для ПИ регулятора этого привода коэффициент пропорционального звена составлял 2000, интегрального – 5 (в единицах системы управления приводами робота AP600). Из графиков видно, что максимальная погрешность управления составляла 3–5 %.

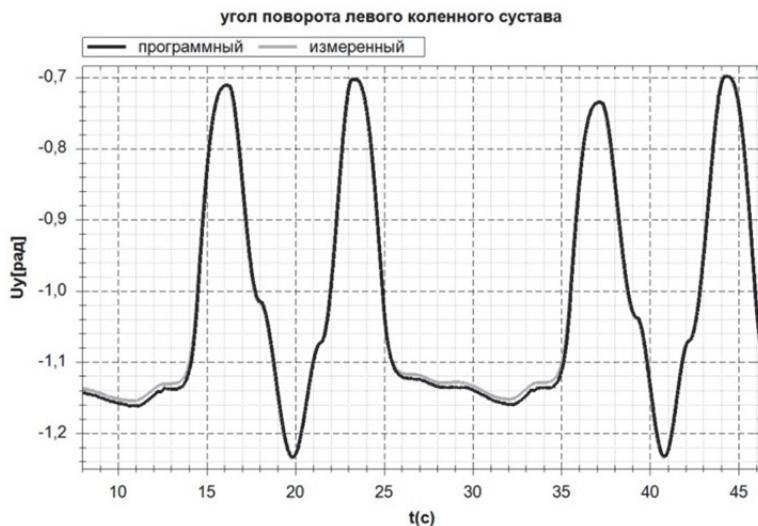


Рис. 13. Угол поворота коленного сустава при ходьбе

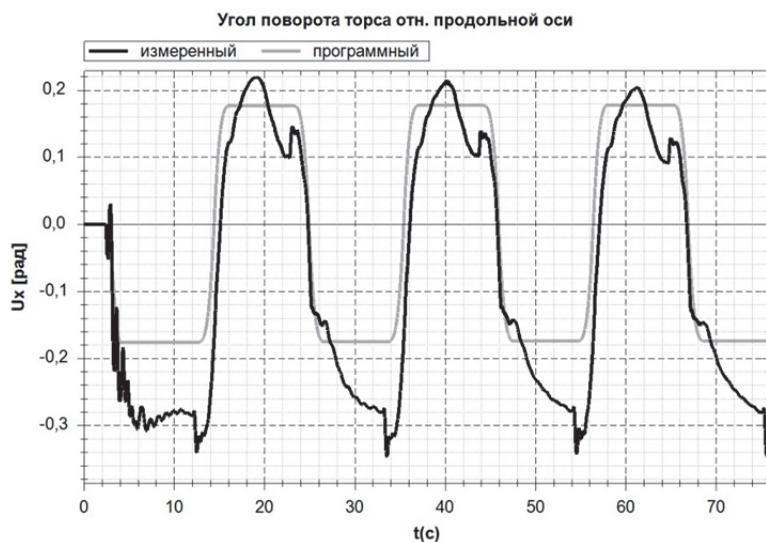


Рис. 14. Угол поворота торса относительно продольной оси

По углам поворота торса, на котором расположен гироскопический блок, погрешность управления значительно больше (рисунки 14-16).

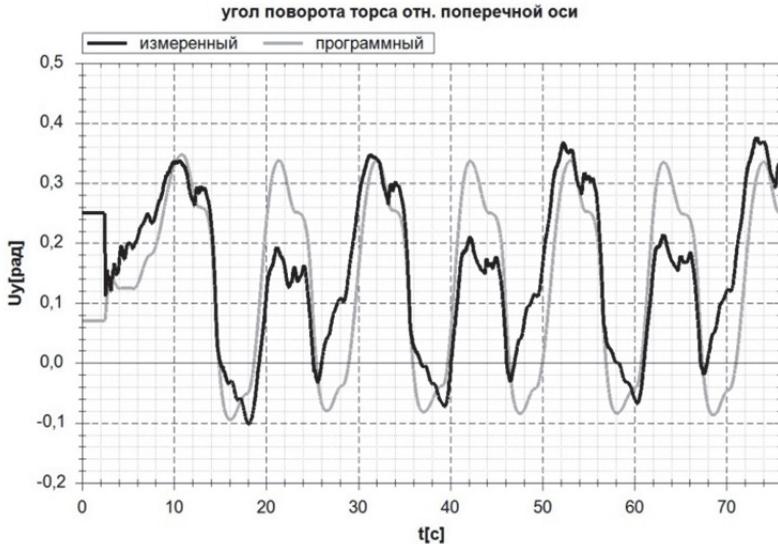


Рис. 15. Угол поворота торса относительно поперечной оси

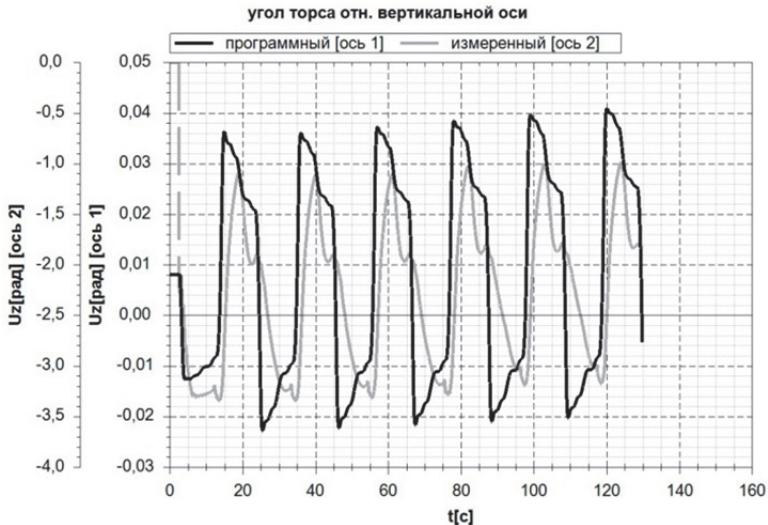


Рис. 16. Угол поворота торса относительно вертикальной оси

Погрешности в абсолютных перемещениях звеньев робота приводят к значительным ударным нагрузкам при постановке стоп (рисунки 17, 18).

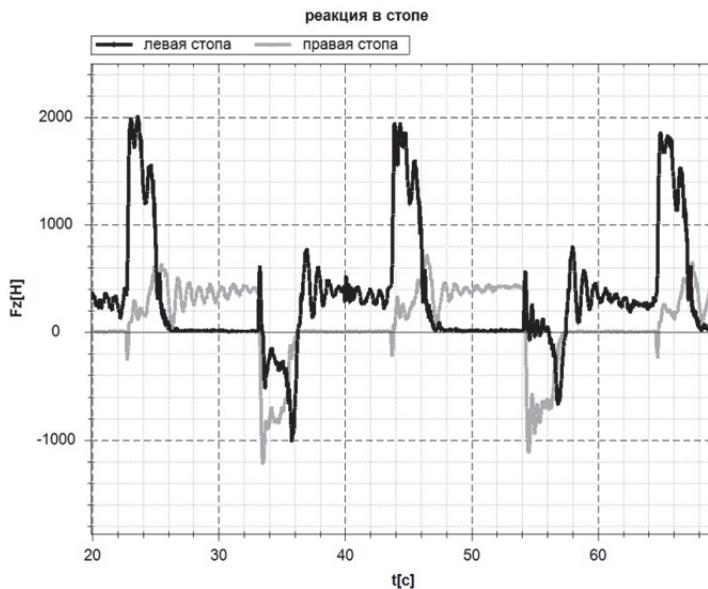


Рис. 17. Силы в стопах, боковые датчики

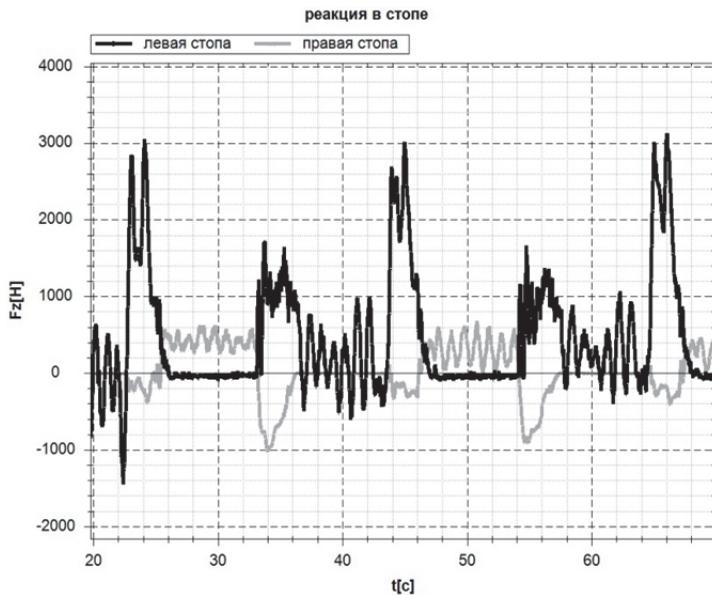


Рис. 18. Силы в стопах, продольные датчики

Робот обладает также низкой собственной частотой качания на стопе – порядка 1 Гц, период которой в 3-10 раз больше, чем у некоторых известных роботов [20, 23, 24]. Введение обратной связи по реакции стопы (контур демпфирования на рисунке 2) не привело к существенному уменьшению таких колебаний.

Увеличение скорости движения в квазистатическом режиме было ограничено силовыми характеристиками приводов – в момент переноса происходило отключение приводов ног из-за ограничений по току.

Значительное расхождение абсолютных углов поворота можно объяснить погрешностями в геометрических и массово инерционных параметрах модели, а также податливостью звеньев робота. К геометрическим параметрам относятся нулевые положения датчиков углов приводов и координаты ц.м. звеньев. В силу конструктивных особенностей робота нулевое положение задается со значительной погрешностью. Массы и моменты инерции звеньев взяты приблизительно из условия достижения полной массы робота.

Достигнутая в экспериментах максимальная устойчивая скорость робота составляла 5 см/с. Такое значение сопоставимо с максимальными скоростями роботов, управление которых базируется на использовании уравнения обратного маятника. Однако предложенное управление применимо к существенно большему количеству типов движений робота, поскольку не связано с обязательной синхронизацией по периоду шага.

5. Заключение. Анализ математических моделей, используемых в методе обратной задачи в существующих системах управления роботами андроидом, показал, что для описания движения ТНМ используются упрощенные уравнения, не учитывающие инерционные составляющие и полную структуру робота, что может быть причиной погрешностей управления.

Сравнение кинематических схем двуногих роботов и методов управления ими установило, что все известные роботы андроиды реализуют локомоцию ног, свойственную латеральному типу расположения конечностей, что выражается в походке на присогнутых коленях.

Предложенные алгоритмы планировщика походки на основе связанного формирования кинематических параметров стоп, корпуса и ТНМ робота позволяют реализовать квазистатические режимы движения робота андроиды различных типов — вперед, назад, вбок, шагание по ступенькам, наклоны и так далее. Принципы управления на основе использования точных квазистатических уравнений, связывающих координаты ТНМ с координатами звеньев робота, дают

возможность синтезировать значительно более широкий круг движений робота, чем методы на основе уравнения обратного маятника. При этом допускается произвольное движение всех звеньев робота, например, рук, что позволяет планировать выполнение роботом полезных операций. Предложенный подход допускает широкое варьирование параметров шага — высоты и длины, что важно для достижения высокой проходимости шагающих машин как их главного преимущества.

Разработанная система управления является удобным средством экспериментальной доводки аппаратной и программной части робота для улучшения его технических характеристик, а также может быть использована в качестве базовой платформы для двуногого робота с полезными функциональными возможностями как прототипа коммерческого образца.

Литература

1. *Nelson G. et al.* Petman: A humanoid robot for testing chemical protective clothing // Journal of the Robotics Society of Japan. 2012. vol. 30. no. 4. pp. 372–377.
2. *Kim J.Y., Yang U.J.* Mechanical design of powered prosthetic leg and walking pattern generation based on motion capture data // Advanced Robotics. 2015. vol. 29. no. 16. pp. 1061–1079.
3. *Zhao J. et al.* Design of variable-damping control for prosthetic knee based on a simulated biped // 2013 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR). 2013. pp. 1–6.
4. *Abdolshah S., Abdolshah M., Tang S.H.* Trajectory Planning and Walking Pattern Generation of Humanoid Robot Motion // International Journal of Robotics and Automation (IAES). 2015. vol. 4. no. 2. pp. 135–142.
5. *Liatsikos E. et al.* Setup of da Vinci System for Kidney Surgery // Laparoscopic and Robot-Assisted Surgery in Urology: Atlas of Standart Procedures. 2011. pp. 32–36.
6. *Лавровский Э.К., Письменная Е.В., Комаро П.А.* Управление ходьбой экзоскелетона нижних конечностей при вязкоупругой связи его с телом человека-оператора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 2. С. 96–100.
7. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели // М.: Наука. 1988. 328 с.
8. *Vukobratovic M. et al.* Biped locomotion – Dynamics, Stability, Control and Application // Springer-Verlag. 1990. vol. 7. 349 p.
9. *Белецкий В.В.* Двуногая ходьба // М.: Наука. 1984. 286 с.
10. *Формальский А.М.* Перемещение антропоморфных механизмов // М.: Наука. 1984. 368 с.
11. *Горобцов А.С., Карцов С.К., Плетнев А.Е., Поляков Ю.А.* Компьютерные методы построения и исследования математических моделей динамики конструкций автомобилей: монография // М.: Машиностроение. 2011. 462 с.
12. *Raibert M.H.* Legged Robots // Communications of the ACM. 1986. vol. 29. no. 6. pp. 250.
13. *Горобцов А.С.* Синтез параметров управляемого движения многозвенных механических систем произвольной структуры методом обратной задачи // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. № 6. С. 43–50.

14. *Yamaguchi J., Kinoshita N., Takanishi A., Kato I.* Development of a biped walking robot adapting to the human's living floor // Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics & Automation. 1996. pp. 232–239.
15. *Mann G.* Stability Control in an Actively-Balanced Bipedal Robot // Proceedings of the Australian Conference on Robotics and Automation. 2000. pp. 191–195.
16. *Yirose M., Ogawa K.* Honda Humanoid Robot Development // Philosophical transactions of the Royal Society A: Mathematical, physical, and engineering sciences. 2007. pp. 11–19.
17. *Kim J.Y., Park I.W., Oh J.H.* Experimental realization of dynamic walking of the biped humanoid robot KHR-2 using zero moment point feedback and inertial measurement // Advanced Robotics. 2006. vol. 20. no. 6. pp. 707–736.
18. *Kim J.H., Oh J.H.* Realization of dynamic walking for the humanoid robot platform KHR-1 // Advanced Robotics. 2004. vol. 18. no. 7. pp. 749–768.
19. *Kim J.Y., Park I.W., Oh J.H.* Walking Control Algorithm of Biped Humanoid Robot on Uneven and Inclined Floor // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2007. vol. 48. no. 4. pp. 457–484.
20. *Park I.W., Kim J.Y., Oh J.H.* Online Walking Pattern Generation and Its Application to a Biped Humanoid Robot – KHR-3 (HUBO) // Advanced Robotics. 2008. vol. 22. no. 2-3. pp. 159–190.
21. *Kim J.Y., Kim J.H.* Error Analysis and Effective Adjustment of the Walking-Ready Posture for a Biped Humanoid Robot // Advanced Robotics. 2010. vol. 24. pp. 2137–2169.
22. *Pinto C.M.A., Machado J.A.T.* Fractional central pattern generators for bipedal locomotion // Nonlinear Dynamics. 2010. vol. 62. no. 1-2. pp. 27–37.
23. *Di Gironimo G. et al.* Biomechanically-based motion control for a digital human // International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM). 2012. vol. 6. no. 1. pp. 1–13.
24. *Kim J.Y., Lee J., Oh J.H.* Experimental realization of dynamic walking for a human-riding biped robot, HUBO FX-1 // Advanced Robotics. 2007. vol. 21. no. 3-4. pp. 461–484.
25. *Engelsberger J. et al.* Overview of the torque-controlled humanoid robot TORO // Proceedings of IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. 2014. pp. 916 – 923.
26. *Engelsberger J., Ott C., Albu-Schaëffer A.* Three-dimensional bipedal walking control using divergent component of motion // Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2013. pp. 2600–2607.
27. *Pratt J., Carff J., Drakunov S., Goswami A.* Capture point: A step toward humanoid push recovery // Proceedings of IEEE-RAS International Conference On Humanoid Robots. 2006. pp. 200–207.
28. *Engelsberger J.* Trajectory generation for continuous leg forces during double support and heel-to-toe shift based on divergent component of motion // Proceedings of IEEE RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2014. pp. 4022–4029.
29. *Khusainov R., Klimchik A., Magid E.* Swing leg trajectory optimization for a humanoid robot locomotion // Proceedings of the 13th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO). 2016. pp. 130–141.
30. *Khusainov R., Shimchik I., Afanasyev I., Magid E.* Toward a human-like locomotion: modelling dynamically stable locomotion of an anthropomorphic robot in simulink environment // Proceedings of 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO). 2015. pp. 141–148.
31. *Khusainov R., Sagitov A., Afanasyev I., Magid E.* Bipedal robot locomotion modelling with virtual height inverted pendulum and preview control approaches in Simulink

- environment // Journal of Robotics, Networking and Artificial Life. 2016. vol. 3. no 3. pp. 182–187.
32. *Khusainov R., Afanasyev I., Magid E.* Anthropomorphic robot modelling with virtual height inverted pendulum approach in Simulink: step length and period influence on walking stability // International Conference on Artificial Life and Robotics (ICAROB). 2016.
 33. *Liu C., Wang D., Chen Q.* Central pattern generator inspired control for adaptive walking of biped robots // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 2013. pp. 1206–1215.
 34. *Shafiq N., Abdolmaleki A., Lau N., Reis L.P.* Development of an Omnidirectional Walk Engine for Soccer Humanoid Robots // International Journal of Advanced Robotic Systems. 2015. 190 p.
 35. *Zhou C. et al.* Stabilization of bipedal walking based on compliance control // Autonomous Robots. 2016. vol. 40. no. 6. pp. 1041–1057.
 36. *Santos C.P., Alves N., Moreno J.C.* Biped Locomotion Control through a Biomimetic CPG-based Controller // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2017. vol. 85. no. 1. pp. 47–70.
 37. *Kobayashi T. et al.* Adaptive speed controller using swing leg motion for 3-D limit-cycle-based bipedal gait // Nonlinear Dynamics. 2016. vol. 84. no. 4. pp. 2285–2304.
 38. *Dallali H. et al.* On the use of positive feedback for improved torque control // Control Theory Tech. 2015. vol. 13. no. 3. pp. 266–285.
 39. *Sutyasadi P., Parnichkun M.* Gait Tracking Control of Quadruped Robot Using Differential Evolution Based Structure Specified Mixed Sensitivity Robust Control // Journal of Control Science and Engineering. 2016. 18 p.
 40. *Ijspeert A.J.* Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: a review // Neural Networks. 2008. vol. 21. no. 4. pp. 642–653.
 41. *Ковальчук А.К., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е.* Управление исполнительными системами двуногих шагающих роботов. Теория и алгоритмы // М.: Изд-во МГОУ. 2007. 160 с.
 42. *Duan Y. et al.* Benchmarking Deep Reinforcement Learning for Continuous Control // International Conference on Machine Learning. 2016. pp. 1329–1338.
 43. *Peters J., Schaal S.* Reinforcement learning of motor skills with policy gradients // Neural Networks. 2008. vol. 21. pp. 682–697.
 44. *Горобцов А.С., Климов С.Ю., Гетманский В.В.* Parallel Inverse Dynamics Method for Synthesis of Control Movement of Multidimensional Walking Robot // 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA 2009). 2009. pp. 3169–3172.
 45. *Брискин Е.С., Вершинина И.П., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г.* Об управлении движением шагающей машины со сдвоенными ортогонально-поворотными движителями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 168–176.

Горобцов Александр Сергеевич — д-р техн. наук, с.н.с., заведующий кафедрой высшей математики, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ); главный научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН). Область научных интересов: вычислительная механика, динамика машин, оптимальное управление в механических системах. Число научных публикаций — 200. vm@vstu.ru, www.frund/vstu.ru; пр. им. В.И. Ленина, 28, Волгоград, 400005, РФ; р.т.: +7(8442)24-84-87; факс: +7(8442)24-84-89.

Андреев Андрей Евгеньевич — к-т техн. наук, заведующий кафедрой электронно-вычислительных машин и сетей, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Область научных интересов: высокопроизводительные

вычисления, вычислительная механика, динамика машин, оптимальное управление в механических системах Число научных публикаций – 140. Andan2005@yandex.ru, www.frund/vstu.ru; пр. им. В.И. Ленина, 28, Волгоград, 400005, РФ; р.т.: +7(8442)24-84-94; факс: +7(8442)24-84-89.

Марков Алексей Евгеньевич — магистрант кафедры электронно-вычислительных машин и систем факультета электроники и вычислительной техники, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Область научных интересов: управление антропоморфными роботами, применение, технология разработки программных комплексов для управления в робототехнике, компьютерное зрение. Число научных публикаций – 9. markovalex95@gmail.com; пр. им. В.И. Ленина, 28, Волгоград, 400005, РФ; р.т.: +7(919)983-0500.

Скориков Андрей Викторович — аспирант кафедры высшая математика факультета электроники и вычислительной техники, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Область научных интересов: управление антропоморфными роботами, применение, технология разработки программных комплексов для управления в робототехнике. Число научных публикаций — 10. scorpion_energy@mail.ru; пр. им. В.И. Ленина, 28, Волгоград, 400005, РФ; р.т.: +7(927)066-8164.

Тарасов Павел Сергеевич — аспирант кафедры высшая математика факультета электроники и вычислительной техники, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Область научных интересов: управление антропоморфными роботами, управление многозвенными робототехническими системами, применение, технология разработки программных комплексов для управления в робототехнике. Число научных публикаций — 25. tarasradio@mail.ru; пр. им. В.И. Ленина, 28, Волгоград, 400005, РФ; р.т.: +7(919)989-0240.

A.S. GOROBTSOV, A.E. ANDREEV, A.E. MARKOV, A.V. SKORIKOV,
P.S. TARASOV

FEATURES OF SOLVING THE INVERSE DYNAMIC METHOD EQUATIONS FOR THE SYNTHESIS OF STABLE WALKING ROBOTS CONTROLLED MOTION

Gorobtsov A.S., Andreev A.E., Markov A.E., Skorikov A.V., Tarasov P.S. **Features of Solving the Inverse Dynamic Method Equations for the Synthesis of Stable Walking Robots Controlled Motion.**

Abstract. The problem of walking robots controlled motion synthesis by the inverse dynamic method is considered. The inverse dynamic method equations are represented by the methods of multibody system dynamics as free bodies motion equations and constraint equations. The variety of constraint equations group are introduced to specify the robot gait, to implement the robot stability conditions and to coordinate specified robot links movement. The key feature of the inverse dynamic method equations in this formulation is the presence of the second derivatives of the system coordinates in the constraint equations expressing the stability conditions that ensure the maintenance of the vertical position by the robot. The determined solution of such equations in general case is impossible due to the uncertainty of the initial conditions for the Lagrange multipliers. An approximate method for solving the inverse dynamic without taking into account the inertial components in the constraint equations that determine the stability of the robot is considered. Constraint equations that determine the coordinate movement of individual robot links and required for unique problem solving based on approximate equations are presented. The implementation of program motion synthesis methods in the control system of the humanoid robot AR-600 is presented. The comparison of theoretical and experimental parameters of controlled motion is performed. It has been established that with the achieved high accuracy of the robot links tracking drives control with an error of several percent, the indicators of the robot's absolute movements, in particular, the angles of roll, yaw and pitch, differ from the programmed by 30-40%. It's shown that proposed method allows to synthesize robot control in quasistatic mode for different movement types such as moving forward, sideways, walking on stairs, inclinations etc.

Keywords: robotics, walking robots, control, humanoid robots, inverse dynamic, androids.

Gorobtsov Aleksander Sergeevich — Ph.D., Dr. Sci., senior researcher, head further mathematics department, Volgograd State Technical University (VSTU); chief researcher, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences. Research interests: multibody systems dynamics, machinery dynamics, optimal control of mechanical systems. The number of publications – 200. vm@vstu.ru, www.frund/vstu.ru; 28, Lenin avenue, Volgograd, 400005, Russia; office phone: + 7(844)224-84-87, fax: + 7(844)224-84-89.

Andreev Andrey Evgenevich — Ph.D., head of Electronic Computing Machines and Systems Department of Faculty of Electronics and Computer Technology, Volgograd State Technical University (VSTU). Research interests: high performance computation, multibody systems dynamics, machinery dynamics, optimal control of mechanical systems. The number of publications – 140. adan2005@yandex.ru, www.frund/vstu.ru; 28, Lenin avenue, Volgograd, 400005, Russia; office phone: + 7(844)224-84-94, fax: + 7(844)224-84-89.

Markov Aleksey Evgenevich — Master Student of Electronic Computing Machines and Systems Department of Faculty of Electronics and Computer Technology, Volgograd State Technical University (VSTU). Research interests: humanoid robots control, software systems

development technology for control in robotics, computer vision. The number of publications – 9. markovalex95@gmail.com; 28, Lenin avenue, Volgograd, 400005, Russia; office phone: +7(919)983-0500.

Skorikov Andrey Viktorovich — Ph.D. Student of Electronic Computing Machines and Systems Department of Faculty of Electronics and Computer Technology, Volgograd State Technical University (VSTU). Research interests: humanoid robots control, software systems development technology for control in robotics. The number of publications – 10. scorpion_energy@mail.ru; 28, Lenin avenue, Volgograd, 400005, Russia; office phone: +7(927)066-8164.

Tarasov Pavel Sergeevich — Ph.D. Student of Electronic Computing Machines and Systems Department of Faculty of Electronics and Computer Technology, Volgograd State Technical University (VSTU). Research interests: humanoid robots control, multilink robotic systems control, software systems development technology for control in robotics. The number of publications – 25. tarasradio@mail.ru; 28, Lenin avenue, Volgograd, 400005, Russia; office phone: +7(919)989-0240.

References

1. Nelson G. et al. Petman: A humanoid robot for testing chemical protective clothing. *Journal of the Robotics Society of Japan*. 2012. vol. 30. no. 4. pp. 372–377.
2. Kim J.Y., Yang U.J. Mechanical design of powered prosthetic leg and walking pattern generation based on motion capture data. *Advanced Robotics*. 2015. vol. 29. no. 16. pp. 1061–1079.
3. Zhao J. et al. Design of variable-damping control for prosthetic knee based on a simulated biped. 2013 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR). 2013. pp. 1–6.
4. Abdolshah S., Abdolshah M., Tang S.H. Trajectory Planning and Walking Pattern Generation of Humanoid Robot Motion. *International Journal of Robotics and Automation (IAES)*. 2015. vol. 4. no. 2. pp. 135–142.
5. Liatsikos E. et al. Setup of da Vinci System for Kidney Surgery. *Laparoscopic and Robot-Assisted Surgery in Urology: Atlas of Standart Procedures*. 2011. pp. 32–36.
6. Lavrovsky E., Pismennaya E., Komaro P. [Walking control of lower limbs exoskeleton with visco-elastic coupling with the body of the human operator]. *Mehatronika, avtomatizacija, upravljenje – Mechatronics, automation, control*. 2015. Issue 16. vol. 2. pp. 96–100. (In Russ.).
7. Krutko P. *Obratnii zadachi dinamiki upravlyayemih sistem* [Inverse dynamics problems of controlled systems]. Moscow: Nauka. 1988. 328 p. (In Russ.).
8. Vukobratovic M. et al. *Biped locomotion – Dynamics, Stability, Control and Application*. Springer-Verlag. 1990. vol. 7. 349 p.
9. Beletsky V. *Dvunogaja hodba* [Biped locomotion]. Moscow: Nauka. 1984. 286 p. (In Russ.).
10. Formalsky A. *Pepemeshhenie antropomorfnyh mekhanizmov* [The movement of anthropomorphic mechanisms]. Moscow: Nauka. 1984. 368 p. (In Russ.).
11. Gorobtsov A., Kartsov S., Pletnev A., Polyakov Ju. *Komp'yuternye metody postroenija i issledovanija matematicheskikh modelej dinamiki konstrukcij avtomobilej* [Computer methods for constructing and investigating mathematical models of vehicle dynamics dynamics]. Moscow: Mashinostroenie. 2011. 462 p. (In Russ.).
12. Raibert M. H. Legged Robots. *Communications of the ACM*. 1986. vol. 29. no. 6. pp. 250.

13. Gorobtsov A. [Controlled motion of multi-link mechanical systems of arbitrary structure by the inverse problem method parameters synthesis]. *Mehatronika, avtomatizacija, upravljenje – Mechatronics, automation, control*. 2004. vol. 6. pp. 45–50. (In Russ.).
14. Yamaguchi J., Kinoshita N., Takanishi A., Kato I. Development of a biped walking robot adapting to the human's living floor. Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics & Automation. 1996. pp. 232–239.
15. Mann G. Stability Control in an Actively-Balanced Bipedal Robot. Proceedings of the Australian Conference on Robotics and Automation. 2000. pp. 191–195.
16. Yirose M., Ogawa K. Honda Humanoid Robot Development. *Philosophical transactions of the Royal Society A: Mathematical, physical, and engineering sciences*. 2007. pp. 11–19.
17. Kim J.Y., Park I.W., Oh J.H. Experimental realization of dynamic walking of the biped humanoid robot KHR-2 using zero moment point feedback and inertial measurement. *Advanced Robotics*. 2006. vol. 20. no. 6. pp. 707–736.
18. Kim J.H., Oh J.H. Realization of dynamic walking for the humanoid robot platform KHR-1. *Advanced Robotics*. 2004. vol. 18. no. 7. pp. 749–768.
19. Kim J.Y., Park I.W., Oh J.H. Walking Control Algorithm of Biped Humanoid Robot on Uneven and Inclined Floor. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. 2007. vol. 48. no. 4. pp. 457–484.
20. Park I.W., Kim J.Y., Oh J.H. Online Walking Pattern Generation and Its Application to a Biped Humanoid Robot – KHR-3 (HUBO). *Advanced Robotics*. 2008. vol. 22. no. 2-3. pp. 159–190.
21. Kim J.Y., Kim J.H. Error Analysis and Effective Adjustment of the Walking-Ready Posture for a Biped Humanoid Robot. *Advanced Robotics*. 2010. vol. 24. pp. 2137–2169.
22. Pinto C.M.A., Machado J.A.T. Fractional central pattern generators for bipedal locomotion. *Nonlinear Dynamics*. 2010. vol. 62. no. 1-2. pp. 27–37.
23. Di Gironimo G. et al. Biomechanically-based motion control for a digital human. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*. 2012. vol. 6. no. 1. pp. 1–13.
24. Kim J.Y., Lee J., Oh J.H. Experimental realization of dynamic walking for a human-riding biped robot, HUBO FX-1. *Advanced Robotics*. 2007. vol. 21. no. 3-4. pp. 461–484.
25. Engelsberger J. et al. Overview of the torque-controlled humanoid robot TORO. Proceedings of IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. 2014. pp. 916 – 923.
26. Engelsberger J., Ott C., Albu-Schaëffer A. Three-dimensional bipedal walking control using divergent component of motion. Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2013. pp. 2600–2607.
27. Pratt J., Carff J., Drakunov S., Goswami A. Capture point: A step toward humanoid push recovery. Proceedings of IEEE-RAS International Conference On Humanoid Robots. 2006. pp. 200–207.
28. Engelsberger J. Trajectory generation for continuous leg forces during double support and heel-to-toe shift based on divergent component of motion. Proceedings of IEEE RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2014. pp. 4022–4029.
29. Khusainov R., Klimchik A., Magid E. Swing leg trajectory optimization for a humanoid robot locomotion. Proceedings of the 13th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO). 2016. pp. 130–141.
30. Khusainov R., Shimchik I., Afanasyev I., Magid E. Toward a human-like locomotion: modelling dynamically stable locomotion of an anthropomorphic robot in simulink

- environment. Proceedings of 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO). 2015. pp. 141–148.
31. Khusainov R., Sagitov A., Afanasyev I., Magid E. Bipedal robot locomotion modelling with virtual height inverted pendulum and preview control approaches in Simulink environment. *Journal of Robotics, Networking and Artificial Life*. 2016. vol. 3. no 3. pp. 182–187.
 32. Khusainov R., Afanasyev I., Magid E. Anthropomorphic robot modelling with virtual height inverted pendulum approach in Simulink: step length and period influence on walking stability. International Conference on Artificial Life and Robotics (ICAROB). 2016.
 33. Liu C., Wang D., Chen Q. Central pattern generator inspired control for adaptive walking of biped robots. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* 2013. pp. 1206–1215.
 34. Shafii N., Abdolmaleki A., Lau N., Reis L.P. Development of an Omnidirectional Walk Engine for Soccer Humanoid Robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2015. 190 p.
 35. Zhou C. et al. Stabilization of bipedal walking based on compliance control. *Autonomous Robots*. 2016. vol. 40. no. 6. pp. 1041–1057.
 36. Santos C.P., Alves N., Moreno J.C. Biped Locomotion Control through a Biomimetic CPG-based Controller. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. 2017. vol. 85. no. 1. pp. 47–70.
 37. Kobayashi T. et al. Adaptive speed controller using swing leg motion for 3-D limit-cycle-based bipedal gait. *Nonlinear Dynamics*. 2016. vol. 84. no. 4. pp. 2285–2304.
 38. Dallali H. et al. On the use of positive feedback for improved torque control. *Control Theory Tech.* 2015. vol. 13. no. 3. pp. 266–285.
 39. Sutyasadi P., Parnichkun M. Gait Tracking Control of Quadruped Robot Using Differential Evolution Based Structure Specified Mixed Sensitivity Robust Control. *Journal of Control Science and Engineering*. 2016. 18 p.
 40. Ijspeert A.J. Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: a review. *Neural Networks*. 2008. vol. 21. no. 4. pp. 642–653.
 41. Kovalchuk A.K., Kulakov D.B., Semenov S.E. *Upravlenie ispolnitelnymi sistemami dvunogih shagajushchih robotov. Teorija i algoritmy* [Controlling the executive systems of bipedal walking robots. Theory and algorithms]. Moscow: MGOU Pub. 2007. 160 p. (In Russ.).
 42. Duan Y. et al. Benchmarking Deep Reinforcement Learning for Continuous Control. International Conference on Machine Learning. 2016. pp. 1329–1338.
 43. Peters J., Schaal S. Reinforcement learning of motor skills with policy gradients. *Neural Networks*. 2008. vol. 21. pp. 682–697.
 44. Gorobtsov A.S., Klimov S.Ju., Getmanskij V.V. Parallel Inverse Dynamics Method for Synthesis of Control Movement of Multidimensional Walking Robot. 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (IEEE ICMA 2009) 2009. pp. 3169–3172.
 45. Briskin E., Vershina I., Maloletov A., Sharonov N. [On the control of the movement of a walking machine with dual orthogonal-rotary propulsors]. *Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems*. 2014. vol. 3. pp. 168–176. (In Russ.).