УДК 629.191 **DOI** 10.15622/sp.18.1.202-229

В.И. Миронов, Ю.В. Миронов, И.В. Фоминов

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В НЕЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ НА ЭТАПЕ ДАЛЬНЕГО НАВЕДЕНИЯ

Миронов В.И., Миронов Ю.В., Фоминов И.В. **Энергетически оптимальное управление сближением космических аппаратов в нецентральном гравитационном поле земли на этапе дальнего наведения.**

Аннотация. Статья посвящена определению энергетически оптимальных программ управления сближением космического аппарата с орбитальным объектом на этапе дальнего наведения с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина. Предполагается, что космический аппарат оснащен продольной двигательной установкой, работающей на химическом топливе. Определению подлежат программы оптимального изменения секундного расхода топлива и вектора направляющих косинусов, определяющих ориентацию силы тяги двигательной установки. В качестве критерия оптимальности управления рассматривается функционал, определяющий минимальный расход рабочего тела. Задача оптимального управления решается в ограниченной области пространства состояний, определяемой диапазоном изменения угловой дальности полета космического аппарата в пределах одного витка. Приведены полные уравнения краевой задачи принципа максимума с использованием модели движения объекта в нормальном гравитационном поле Земли, краевые условия, а также аналитические зависимости, определяющие структуру управления в оптимальном режиме. Краевая задача оптимизации решается методом Ньютона. Для определения начального приближения сопряженных переменных дано аналитическое решение задачи энергетически оптимального управления сближением в однородном центральном поле. Приведены результаты численных исследований энергетически оптимальных программ управления перехватом в нормальном гравитационном поле Земли с конечной тягой на этапе дальнего наведения. В целом, применение алгоритмов оптимального управления сближением в бортовом и наземном комплексе позволяет уменьшить затраты топлива при выполнении маневра, сократить время, а также расширить область достижимости целевых объектов. Кроме того, оптимальное решение может рассматриваться в качестве эталона, с которым необходимо сравнивать различные варианты приближенных алгоритмов управления, оценивать их качество и принимать обоснованные решения по их практическому использованию.

Ключевые слова: космический аппарат, встреча на орбите, оптимальное управление, дальнее наведение.

1. Введение. В существующих и перспективных программах развития космической техники большое внимание уделяется вопросам создания маневрирующих космических аппаратов (КА), применение которых предусматривает выполнение операций сближения с целевыми орбитальными объектами (ЦО). В этом комплексе работ важную роль играют вопросы разработки автономных систем управления движением КА и их алгоритмического обеспечения, реализующих принцип терминального управления на этапе дальнего наведения и другие. Это позволяет обеспечить высокую точность перевода КА с дежурной орбиты в заданную окрестность ЦО при наличии повышенных возмущений. В перспективных системах терминального управления предусматривается решение на борту в ходе полета сложной и трудоемкой задачи расчета программ управления движением КА для его перевода в окрестность ЦО на этапе дальнего наведения по текущим навигационным данным.

При разработке соответствующих методов и алгоритмов необходимо получение энергетически оптимальных решений в широкой области маневрирования с учетом требования реализуемости на бортовой цифровой вычислительной машине (БЦВМ). Многие из ранее разработанных методов и алгоритмов управления встречей на орбите нашли свое отражение в известных монографиях и [1-5]. Сложность данного класса задач оптимального управления ограничивает возможность использования строгих методов их решения в бортовом контуре оперативного управления движением КА. Компромисс может быть достигнут путем разработки алгоритмов квазиоптимального управления.

Для достижения этой цели в работах [6,7] были предложены модели и алгоритмы системы терминального управления движением КА, реализующие маневры типа перехвата и мягкого сближения ОЦ на этапе дальнего наведения как при импульсной, так и при конечной тяге двигательной установки (ДУ). Отличительная особенность этих алгоритмов состоит в том, что управляемое движение рассматривается в нормальном гравитационном поле Земли, а в алгоритме определения квазиоптимального управления учитывается изменение массы КА при постоянной ориентации вектора силы тяги.

В связи с этим, возникает вопрос: в какой мере получаемые квазиоптимальные решения соответствуют строго оптимальным по энергетическим затратам. Для ответа на этот вопрос, необходимо поставить и решить соответствующую задачу оптимального управления с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Строго оптимальное решение в рассматриваемой задаче управления, с одной стороны, позволяет уменьшить затраты топлива при выполнении маневра, сократить время, а также расширить область достижимости ЦО. С другой стороны, оптимальное решение выступает в качестве эталона, с которым можно сравнивать различные варианты приближенных алгоритмов управления, оценивать их качество и принимать обоснованные решения по их практическому использованию.

Вопросам определения оптимальной программы управления сближением посвящено большое количество работ, как в отечественной, так и зарубежной литературе [1-5, 8-21 и др.], что объясняется большой значимостью данной проблематики в практике освоения и использования космического пространства в военных, научных и народно-хозяйственных целях. Работы [8-21] выполнены в последние годы. В [8, 13] рассмотрена задача определения оптимальной по затратам характеристической скорости двухимпульсной программы управления сближением КО, находящихся на некомпланарных орбитах в центральном гравитационном поле Земли. Задача решается с использованием уравнения времени Кеплера и универсальных переменных. При этом оптимизации подлежит не только управляющие импульсы скорости, но и время ожидания активного КО на орбите до начала маневра встречи.

Работа [9] посвящена вопросам оптимизации программы встречи активного КО с группой элементов космического мусора, орбиты которых имеют достаточно близкие наклонения для их последующего удаления. Предложенная методика предусматривает приближенную оценку затрат характеристической скорости и времени перелета между любой парой целевых объектов, чтобы оценить затраты на любую возможную последовательность их обхода. Далее предполагается решать известную проблему коммивояжера с целью выбора лучшей последовательности обхода целевых объектов с точки зрения расхода массы активного КО и времени выполнения операции.

В [10] предложен приближенный алгоритм управления перехватом КО, когда активный объект имеет достаточно высокий уровень постоянной тяги, сравнимой с тягой импульсного типа. Основная особенность этой работы состоит в том, чтобы осуществить процесс перехвата итерационно путем периодического уточнения управления для отработки прогнозируемого промаха, который обусловлен как влиянием возмущений, так и методическими ошибками формирования управляющих воздействий.

В работе [11] исследуется задача управление КО при сближении с маневрирующей невзаимодействующей мишенью на участке ближнего наведения. Предложены алгоритмы управления перед маневром и управления режимом «скольжения» после маневра мишени с использованием принятой приближенной модели относительного движения.

В [12] в импульсной постановке рассматривается задача оптимального управления перехватом КО, в которой совместно определяется как начальный вектор скорости, так и время маневра.

Задача решается в центральном гравитационном поле Земли на основе численного решения известного уравнения Эйлера — Ламберта.

В [14, 18] рассматривается задача расчета параметров маневров встречи КО с крупногабаритными объектами космического мусора (КОКМ), расположенными на околокруговых орбитах с близкими наклонениями. Предполагается, что КО-сборщик подлетает к КОКМ и захватывает его или вставляет в его сопло малый КА, имеющий собственную ДУ. В [18] из каталога NORAD выделены пять компактных групп таких объектов в диапазоне высот от 500 до 1000 км, а также на солнечно-синхронных орбитах. Кроме того, предложены схемы импульсного управления перелетом от одного объекта к другому. Работа [14] дополняет эти исследования. В ней рассмотрен вопрос подлета к КОКМ с заданной точностью с помощью двигателей малой тяги.

В [19] предложены схемы сближения с лунной орбитальной станцией космического корабля, стартующего с Земли. Внимание к задачам такого рода возрастает в связи с объявленным ведущими космическими агентствами возврата к программам освоения Луны. В работе рассмотрены несколько баллистических схем, позволяющих решить эту задачу с минимальными затратами топлива.

Работа [15] посвящена исследованию путей обеспечения ускоренного доступа к орбитальной станции для современных космических кораблей. В ней предложены новые схемы выведения с существенно меньшей продолжительностью автономного полета КА до стыковки с орбитальной станцией.

Ряд исследований, выполненных в последние годы, посвящены проблематике создания перспективной системы транспортно-технического обеспечения орбитальной группировки КА [16, 17, 20 и др.]. В этих работах для решения задач управления предполагается использование двигателей малой тяги. Так, в [20] рассматриваются перелеты между заданными орбитами при наличии возмущений разной природы. Предложен квазиоптимальный метод определения траектории перелета, основанный на линеаризации движения около опорных орбит. Однако возможности такого подхода ограничены, так как требуемая точность расчетов достигается путем увеличения числа опорных орбит. Работа [16] посвящена решению задачи минимизации тяги и ее приложениям на базе принципа максимума Понтрягина. Задачей оптимизации являются вычисление минимальной величины тяги для перелета за заданное время между фиксированными точками при постоянной скорости истечения и постоянной мощности ДУ. Применение разработанного метода позволяет определять зависимость минимальной тяги от располагаемого удельного импульса, минимального значения удельного импульса, а также нижние границы конечной массы КА и мощности электро-реактивной ДУ в зависимости от располагаемого удельного импульса. Кроме того, метод предполагает вычисление границы области существования траектории для КА с конечной тягой. В [17] предложен метод оптимизации проектных параметров энергодвигательного комплекса системы транспортно-технического обеспечения орбитальной группировки КА, базирующейся на использовании межорбитальных буксиров многократного применения. Их полезной нагрузкой являются топливо и резервные элементы КА орбитальной группировки, а также робототехнические комплексы для проведения ремонтных операций в космосе.

Анализ существующих методов и алгоритмов оптимального управления сближением КА показывает, что они в большинстве случаев ориентированы на решение задач в малой окрестности ЦО, характерной для этапа ближнего наведения, с использованием упрощенных линейных уравнений относительного движения. Несмотря на высокий уровень достигнутых результатов, соответствующие алгоритмы по области применения и своим характеристикам не в полной мере удовлетворяют предъявляемым требованиям, особенно на участке дальнего наведения. Вопросы оптимизации маневров сближения в широкой области пространства состояний, характерной для этапа дальнего наведения, рассматривались в небольшом числе работ. Нелинейность и сложность динамических моделей управления перехватом исключают возможность получения строгих аналитических решений и приводят к необходимости разработки и применения эффективных в вычислительном отношении итерационных методов. В имеющихся работах часто используется импульсный подход, в прямой постановке не делается акцента на обеспечение высоких точностных и вычислительных характеристик алгоритмов, обеспечения близости получаемых решений к оптимальным, их работоспособности в широком диапазоне возможных условий применения и подлета к целевым объектам, а также реализуемости в контурах оперативного управления. Таким образом, несмотря на имеющиеся результаты, вопросы разработки методов и алгоритмов оптимального управления сближением КА на этапе дальнего наведения нуждаются в дальнейшем исследовании.

Центральным моментом при численном решении краевой задачи принципа максимума является определение подходящего исходного приближения для неизвестных начальных значений вектора сопряженных переменных. От этого во многом зависит сходимость вычислительного процесса, а, следовательно, и сама возможность получения оптимального решения. В настоящее время, как известно, универсальных методов решения этого вопроса не существует. Основная трудность состоит в том, что сопряженные переменные не имеют ясной физической интерпретации. Для получения надежного результата необходимо ставить и решать исходную задачу в приближенной постановке, связанной с введением возможных упрощений.

Данная статья посвящена разработке алгоритмов расчета энергетически оптимальных программ управления сближением на этапе дальнего наведения с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина. Предполагается, что КА оснащен продольной двигательной установкой (ДУ), работающей на химическом топливе. Определению подлежат программы оптимального изменения секундного расхода топлива и вектора направляющих косинусов, определяющих ориентацию силы тяги ДУ. В качестве критерия оптимальности управления рассматривается функционал, определяющий минимальный расход рабочего тела. Задача оптимального управления решается в ограниченной области пространства состояний в диапазоне изменения угловой дальности полета КА в пределах одного витка.

Приведены полные уравнения краевой задачи принципа максимума с использованием модели движения КА в гравитационном поле Земли (ГПЗ), краевые условия, а также аналитические зависимости, определяющие структуру управления в оптимальном режиме. Краевая задача оптимизации решается методом Ньютона. Для определения начального приближения сопряженных переменных дано аналитическое решение задачи энергетически оптимального управления сближением в однородном центральном поле (ОЦП). Приведены результаты численных исследований энергетически оптимальных программ управления сближением КА в нормальном ГПЗ с конечной тягой на этапе дальнего наведения.

2. Постановка задачи, модели динамики и алгоритм расчета оптимальной по расходу топлива программы управления движением космических аппаратов в поле сжатого сфероида. При постановке и решении конкретных прикладных задач оптимизации управления сближением КА необходимо, прежде всего, конкретизировать вид критерия оптимальности, тип ДУ, математические модели динамики полета, а также состав ограничений и краевых условий.

Рассмотрим задачу оптимального по расходу топлива управления движения КА при его переводе из начального состояния $\bar{x}_0, \bar{V}_0$ в требуемое конечное состояние $\bar{x}_{\text{тр}}$ за заданное время T .

Для описания движения КА в нецентральном ГПЗ общего вида будем использовать абсолютную геоцентрическую экваториальную систему координат (АГЭСК). При этом будем полагать, что КА оснащен продольной ДУ с постоянным секундным расходом топлива.

Тогда уравнения движения КА принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = V_X, \ \dot{y} = V_Y, \ \dot{z} = V_Z; \\ \dot{V}_X = g_X\left(\bar{x}, t\right) + u\left(t\right)\alpha_X\left(t\right); \\ \dot{V}_Y = g_Y\left(\bar{x}, t\right) + u\left(t\right)\alpha_Y\left(t\right); \qquad t \in \left[t_0, T\right]; \\ \dot{V}_Z = g_Z\left(\bar{x}, t\right) + u\left(t\right)\alpha_Z\left(t\right); \\ \dot{m}_1 = -\beta, \end{cases} \tag{1}$$

$$u\left(t\right) = \frac{c\beta\left(t\right)}{m_1(t)}, \quad \beta\left(t\right) = \frac{\dot{m}\left(t\right)}{m_0}, \quad m_1(t) = \frac{m\left(t\right)}{m_0},$$

где g_X, g_Y, g_Z — проекции вектора гравитационного ускорения на оси АГЭСК; $u\left(t\right)$ — модуль реактивного ускорения, создаваемого тягой ДУ КА; $\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z$ — направляющие косинусы вектора тяги; $\bar{x} = \left(x, y, z\right)^{\mathrm{T}}$ — вектор текущих координат КА; $\bar{V} = \left(V_X, V_Y, V_Z,\right)^{\mathrm{T}}$ — вектор текущей скорости КА; T — время перелета в окрестность КА-Ц; c — скорость истечения газов; $\dot{m}\left(t\right), m_0$ — секундный расход топлива и начальная масса КА; $m_1(t)$ — относительная текущая масса КА; $\beta\left(t\right)$ — относительный секундный расход топлива.

Введем следующие обозначения: $\bar{u}\left(t\right)$ — вектор управляющего ускорения; $\bar{\alpha}\left(t\right)$ — вектор направляющих косинусов тяги ДУ КА.

Тогда:

$$\bar{u}\left(t\right) = u\left(t\right)\bar{\alpha}\left(t\right). \tag{2}$$

Краевые условия задачи определяются следующим образом.

Для маневра типа перехвата:

а) при $t = t_0$: $\quad \bar{x}\left(t\right) = x_0; \quad \bar{V}\left(t_0\right) = \bar{V}_0;$

б) при $t = T$: $\quad \bar{x}\left(T\right) = \bar{x}_T.$

Для маневра типа мягкого сближения:

а) при $t = t_0$: $\quad \bar{x}(t) = x_0; \quad \bar{V}(t_0) = \bar{V}_0;$

б) при $t = T$: $\quad \bar{x}(T) = \bar{x}_T; \ \bar{V}(T) = \bar{V}_T.$

Требуется найти энергетически оптимальную программу изменения вектор-функции направляющих косинусов $\bar{\alpha}(t)$ и относительного секундного расхода топлива $\beta(t)$ по критерию минимума расхода массы топлива:

$$I = \int_0^T \beta(t) dt; \tag{3}$$

при наличии следующих ограничений:

$$0 \le \beta(t) \le \beta_{\max}; \quad \bar{\alpha}^T(t)\bar{\alpha}(t) = 1; \quad \bar{u} = \left[\bar{\alpha}(t), \beta(t)\right].$$

Найденные таким образом функции $\bar{\alpha}(t)$ и $\beta(t)$ позволяют определить энергетически оптимальную программу изменения вектора управляющих ускорений $\bar{u}(t)$.

Для решения рассматриваемой задачи необходимо конкретизировать модель действующего вектора ускорений $\bar{g} = [g_X, g_Y, g_Z]^T$. Согласно [1], при движении КА в околоземном космическом пространстве вектор $\bar{g}$ может быть представлен следующим образом:

$$\bar{g}(\bar{x}) = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} + \Delta\bar{g},$$

где U — гравитационный потенциал Земли; $\Delta\bar{g}$ — вектор возмущений.

Общая формула для потенциала притяжения может быть описана в виде его классического разложения в ряд по сферическим функциям:

$$U = \frac{\mu}{r}\left\{1 + \left[\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}(c_{nm}\cos m\lambda + s_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\sin\phi)\right]\right\},$$

где R — экваториальный радиус Земли; μ — гравитационная постоянная; c_{nm}, s_{nm} — постоянные коэффициенты; ϕ —

геоцентрическая широта данной точки пространства; r — расстояние от центра Земли до точки пространства; λ — долгота, измеренная вдоль экватора от Гринвичского меридиана до меридиана данной точки пространства.

$P_{nm}(\sin\phi)$ — присоединенные функции Лежандра степени n и порядка m, определяемые по формуле:

$$P_{nm}(Q) = \frac{(1-Q^2)^{m/2}}{2^n n!} \cdot \frac{d^{n+m}(Q^2-1)^n}{dQ^{n+m}};$$

$$Q = \sin\phi.$$

Вектор возмущений $\Delta\bar{g}$ в общем случае обусловлен влиянием Солнца, Луны, атмосферы и давления солнечного света на КА. Соответствующие расчетные формулы для определения всех составляющих $\Delta\bar{g}$ приведены в [1]. Однако при маневрировании в околоземном космическом пространстве они малы и не учитываются при рассмотрении управляемых движений на ограниченных временных интервалах.

Следуя принципу максимума, составим Гамильтониан задачи оптимизации:

$$H\left(\bar{x},\bar{V},\bar{u},t\right) = \lambda_1 V_X + \lambda_2 V_Y + \lambda_3 V_Z + \lambda_4\left[g_X\left(\bar{x},t\right) + u\left(t\right)\alpha_X\left(t\right)\right] +$$
$$+\lambda_5\left[g_Y\left(\bar{x},t\right) + u\left(t\right)\alpha_Y\left(t\right)\right] + \lambda_6\left[g_Z\left(\bar{x},t\right) + u\left(t\right)\alpha_Z\left(t\right)\right] - \lambda_m\beta - \beta\left(t\right),$$

где $\lambda_i\left(t\right)$ — сопряженные переменные.

Тогда условие оптимальности управления примет следующий вид:

$$\bar{u}_{opt}\left(\bar{x},\bar{V},\bar{\lambda}_r,\bar{\lambda}_V,\lambda_m,t\right) = \max_{\bar{u}\in\Omega_u} H\left(\bar{x},\bar{V},\bar{u},\bar{\lambda}_r,\bar{\lambda}_V,\lambda_m,t\right);$$

$$\bar{\lambda}_r = \left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)^{\mathrm{T}}; \quad \bar{\lambda}_V = \left(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\right)^{\mathrm{T}},$$

где Ω_u — ограниченная область управления;

Это условие и приведенные выше ограничения позволяют определить структуру оптимального управления в зависимости от параметров движения и сопряженных переменных.

$$\bar{\alpha}\left(t\right) = \frac{\bar{\lambda}_V}{\left|\bar{\lambda}_V\right|}; \quad \Delta_\Pi = \frac{c}{m_1\left(t\right)}\left|\bar{\lambda}_V\right| - \lambda_m; \quad \beta\left(t\right) = \begin{cases}\beta_{\max}, \text{при } \Delta_\Pi \ge 1;\\ 0, \quad \text{при } \Delta_\Pi < 1,\end{cases}$$

где $\Delta_\Pi\left(t\right)$ — функция переключения тяги ДУ.

После дифференцирования гамильтониана H получаем полную систему дифференциальных уравнений движения и сопряженных уравнений принципа максимума (П-систему), которая имеет 14-й порядок:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = V_X, \; \dot{y} = V_Y, \; \dot{z} = V_Z; \\
\dot{V}_X = g_X(\bar{x}, t) + u(t)\,\alpha_X(t); \\
\dot{V}_Y = g_Y(\bar{x}, t) + u(t)\,\alpha_Y(t); \\
\dot{V}_Z = g_Z(\bar{x}, t) + u(t)\,\alpha_Z(t); \\
\dot{m}_1 = -\beta, \\
\dot{\lambda}_1 = -\lambda_4 \dfrac{\partial g_X}{\partial x} - \lambda_5 \dfrac{\partial g_Y}{\partial x} - \lambda_6 \dfrac{\partial g_Z}{\partial x}; \\
\dot{\lambda}_2 = -\lambda_4 \dfrac{\partial g_X}{\partial y} - \lambda_5 \dfrac{\partial g_Y}{\partial y} - \lambda_6 \dfrac{\partial g_Z}{\partial y}; \\
\dot{\lambda}_3 = -\lambda_4 \dfrac{\partial g_X}{\partial z} - \lambda_5 \dfrac{\partial g_Y}{\partial z} - \lambda_6 \dfrac{\partial g_Z}{\partial z}; \\
\dot{\lambda}_4 = -\lambda_1; \quad \dot{\lambda}_5 = -\lambda_2; \quad \dot{\lambda}_6 = -\lambda_3; \\
\dot{\lambda}_m = -\dfrac{c\beta}{m_1^2} \left|\bar{\lambda}_V\right|,
\end{cases}
\tag{4}
$$

где

$$
\bar{\alpha}(t) = \frac{\bar{\lambda}_V}{\left|\bar{\lambda}_V\right|}; \;\; \Delta_\Pi = \frac{c}{m_1(t)} \left|\bar{\lambda}_V\right| - \lambda_m;
$$

$$
\beta(t) = \begin{cases} \beta_{\max}, \text{при } \Delta_\Pi \ge 1; \\ 0, \quad\;\; \text{при } \Delta_\Pi < 1. \end{cases}
$$

Таким образом, в результате применения принципа максимума исходная задача оптимального управления сводится к решению двухточечной краевой задачи для приведенной П-системы (4) при следующих краевых условиях.

Для маневра типа перехвата:

а) при $t = t_0$: $\quad \bar{x} = \bar{x}_0; \;\; \bar{V} = \bar{V}_0;$

б) при $t = T$: $\quad \bar{x} = \bar{x}_{\text{тр}}; \;\; \bar{\lambda}_V = 0; \;\; \lambda_m = 0.$

Для маневра типа мягкого сближения:

а) при $t = t_0$: $\bar{x} = \bar{x}_0$; $\bar{V} = \bar{V}_0$;

б) при $t = T$: $\bar{x}(T) = \bar{x}_T$; $\bar{V}(T) = \bar{V}_T$; $\lambda_m = 0$.

Здесь учтено, что из условий трансверсальности конечные значения сопряженных переменных, соответствующие свободным параметрам траектории движения, по которым не заданы терминальные условия, принимают нулевые значения.

Решение данных краевых задач сводится к решению соответствующего обобщенного краевого уравнения относительно начального значения вектора сопряженных переменных $\bar{\lambda}_0 = \left(\bar{\lambda}_{r0}, \bar{\lambda}_{V0}, \lambda_{m0}\right)$.

При решении задачи перехвата это уравнение имеет вид:

$$\bar{S}\left(T, \bar{\lambda}_0\right) = \left[\bar{x}\left(T, \bar{\lambda}_0\right) - \bar{x}_{\text{тр}}, \bar{\lambda}_V\left(T, \bar{\lambda}_0\right), \lambda_m\left(T, \bar{\lambda}_0\right)\right]^T = 0,$$

а для маневра мягкого сближения:

$$\bar{S}\left(T, \bar{\lambda}_0\right) = \left[\bar{x}\left(T, \bar{\lambda}_0\right) - \bar{x}_{\text{тр}}, \bar{V}\left(T, \bar{\lambda}_0\right) - \bar{V}_{\text{тр}}, \lambda_m\left(T, \bar{\lambda}_0\right)\right]^T = 0.$$

Для решения задач применяется метод «пристрелки» с подбором недостающих начальных значений сопряженных переменных модифицированным методом Ньютона:

$$\bar{\lambda}_{0,k+1} = \bar{\lambda}_{0,k} - \gamma_k \cdot \left[\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{\lambda}_0}\right]_k^{-1} \cdot \bar{S}\left(T, \bar{\lambda}_{0,\text{k}}\right), \qquad k = 0, 1, 2...,$$

где k — номер итерации; γ_k — параметр шага.

В процессе итераций определяется программа оптимального управления движением КА, в которую входят моменты времени включения и выключения ДУ на каждом активном участке траектории, а также программы изменения ориентации вектора тяги.

Матрицы $\left[\dfrac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{\lambda}_0}\right]$ определяются методом конечных разностей. Основная трудность при решении краевой задачи оптимального управления заключается в определении подходящего начального значения для вектора $\bar{\lambda}_0 = \left(\bar{\lambda}_{ro}, \bar{\lambda}_{V_0}, \lambda_{m_0}\right)$. Этот вопрос рассматривается в п.4.

3. Уравнения краевой задачи принципа максимума в нормальном гравитационном поле Земли. Приведенная выше в п. 2 П-система дифференциальных уравнений представлена в обобщенном виде. Она справедлива при маневрировании КА для модели ГПЗ общего вида и нуждается в конкретизации.

Отметим основные факторы, поясняющие возможность и целесообразность упрощения уравнений движения и сопряженных уравнений (4) при решении задачи оптимального управления.

Во-первых, упрощение уравнений П-системы может приводить как к отклонениям оптимальной траектории от заданных граничных условий на правом конце траектории, так и к отклонению минимизируемого функционала от его строго оптимального значения.

В известной работе В. С. Новоселова [21] было показано, что при решении задач оптимального управления на базе принципа максимума для уравнений движения объекта с малым параметром допустимо упрощать сопряженную систему уравнений без существенной потери точности с точки зрения достижения экстремального значения минимизируемого функционала. Поэтому выполнение требований по точности выполнения краевых условий полностью определяется принятой моделью движения. Однако, близость минимизируемого функционала к его строго оптимальному значению определяется моделью сопряженных уравнений.

Во-вторых, при решении задач оптимизации программ управления движением КА, особенно на ограниченных временных интервалах, обычно нет необходимости учитывать малые возмущения в модели движения. Это обусловлено тем, что процесс реализации указанных программ всегда сопровождается влиянием большого числа других дополнительных возмущений, которые в совокупности приводят к значительно большим отклонениям траектории от расчетной по сравнению с малыми возмущениями в модели движения. К ним относятся ошибки навигации, ориентации, разброс характеристик ДУ и объекта управления и другие. В силу указанных обстоятельств в большинстве опубликованных работ, посвященных оптимизации управления движением КА, рассматриваются модели движения в центральном ГПЗ и в более простых полях [3, 4 и др.].

В-третьих, сложность применяемых моделей при оптимизации процессов управления движением КА в рассматриваемом классе задач не является принципиальным моментом с точки зрения обеспечения сходимости вычислительного процесса. Она определяет лишь вычислительную трудоемкость. Главной же проблемой при оптимизации управления движением КА с использованием принципа максимума является определение начальных значений сопряженных переменных, которые гарантируют сходимость вычислительного процесса, то есть саму возможность получения оптимального решения. Об этом сказано выше в п.1. Общего решения для их определения не существует. В п.4 данной статьи дано аналитическое решение этой задачи с использованием модели ОЦП. Для задачи с более сложной моделью движения эти результаты используются как начальные приближения начальных значений сопряженных переменных. Кроме того, эти результаты могут использоваться для оптимизации управления в любом ГПЗ, то есть в ГПЗ произвольной сложности, в том числе с учетом малых возмущений.

В данной работе при численных исследованиях используется модель нормального ГПЗ, в котором учитывается вторая зональная гармоника в разложении геопотенциала в ряд по сферическим функциям. Особенность работы состоит в том, что эта модель ГПЗ используется не только в уравнениях движения КА, но и в системе уравнений для сопряженных переменных.

Приведем в развернутом виде полную систему основных и сопряженных дифференциальных уравнений для определения энергетически оптимальной программы управления сближением в нормальном ГПЗ, учитывающем сжатие Земли.

Как известно, возможны различные формы представления дифференциальных уравнений движения КА в нормальном ГПЗ, отличающиеся компактностью записи и вычислительной трудоемкостью. С этой точки зрения предпочтительна форма, принятая в [1].

Для такой модели ГПЗ дифференциальные уравнения управляемого движения КА можно представить в следующем компактном, удобном для программирования, виде:

$$\dot{x} = V_x; \qquad \dot{y} = V_y; \qquad \dot{z} = V_z;$$

$$\dot{V}_x = -A\,x + \frac{c\,\beta}{m_1}\alpha_x;$$

$$\dot{V}_y = -A\,y + \frac{c\,\beta}{m_1}\alpha_y; \tag{5}$$

$$\dot{V}_z = \left(2BC - A\right)z + \frac{c\,\beta}{m_1}\alpha_z;$$

$$\dot{m}_1 = -\beta,$$

где

$$A = B\left[\alpha_{00} + C\left(D-1\right)\right];\ B = \frac{1}{r^2}\frac{R_Э}{r};$$

$$C = \frac{3}{2}\alpha_{20}\left(\frac{R_Э}{r}\right)^2;\ D = 5\left(\frac{z}{r}\right)^2;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\ r_1 = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};\ \alpha_{00} = \frac{\mu}{R_Э};\ \alpha_{20} = -\frac{c_{20}}{R_Э^3};$$

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ — компоненты вектора $\bar{\alpha}$ направляющих косинусов реактивного ускорения; μ, c_{20} — параметры модели ГПЗ; $R_Э$ — экваториальный радиус Земли.

При конкретизации системы дифференциальных уравнений, описывающих изменение сопряженных переменных, будем также использовать модель динамики КА с учетом второй зональной гармоники в разложении геопотенциала в ряд по сферическим функциям геоцентрической широты, как и в уравнениях движения.

После проведения необходимых преобразований и введения дополнительных обозначений, приходим к следующей записи сопряженной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_1 = A\lambda_4 - PE_\lambda x + 10BC\frac{xz}{r^2}\lambda_6;\\ \dot{\lambda}_2 = A\lambda_5 - PE_\lambda y + 10BC\frac{yz}{r^2}\lambda_6\\ \dot{\lambda}_3 = -\left(2BC - A\right)\lambda_6 - PE_\lambda z + 10BC\frac{z^2}{r^2}\lambda_6 + F_\lambda;\\ \dot{\lambda}_4 = -\lambda_1;\qquad \dot{\lambda}_5 = -\lambda_2;\qquad \dot{\lambda}_6 = -\lambda_3,\end{gathered}\tag{6}$$

где

$$P = 3A + 2BC\left(2D-1\right).$$

Входящие в эти уравнения функции A, B, C, D имеют тот же смысл, что и ранее.

Эта система сопряженных уравнений дополняется ранее полученным в п. 3 уравнением, определяющим поведение сопряженной переменной λ_m, которое остается неизменным:

$$\dot{\lambda}_m = \frac{c\beta}{m_1^2}\overline{\lambda}_V^T\overline{\alpha}(t).$$

Краевые условия, а также аналитические зависимости управляющих функций от переменных состояния и сопряженных переменных, определяющие структуру управления в оптимальном режиме, приведены выше в п. 2.

При использовании принципа максимума поиск оптимальной программы управления сводится к решению двухточечной краевой задачи для приведенных выше основной и сопряженной систем дифференциальных уравнений и заключается в определении неизвестных начальных значений сопряженных переменных $\overline{\lambda}_{10}, \overline{\lambda}_{20}, \overline{\lambda}_{m0}$.

Для организации вычислительного процесса, например, в рамках итерационного метода Ньютона, необходимо предварительно определить приближенные начальные значения неизвестных параметров. Общей методики поиска $\overline{\lambda}_{10}, \overline{\lambda}_{20}, \overline{\lambda}_{7_0}$ не существует. Грубость начальных значений сопряженных переменных может нарушить сходимость вычислительного процесса. В интересах решения этого вопроса рассмотрим приближенное аналитическое решение задачи энергетически оптимального управления сближением, соответствующее модели движения КА в ОЦП с постоянным реактивным ускорением.

4. Приближенное аналитическое решение задачи энергетически оптимального управления сближением. Рассмотрим приближенное аналитическое решение задачи энергетически оптимального управления сближением применительно к модели движения КА в ОЦП, описывающей движение в узком шаровом слое [4], с учетом изменения массы КА при постоянном секундном расходе топлива.

В дальнейшем для удобства записи введем следующие обозначения: $x_7 = m_1$, $\lambda_7 = \lambda_m$, $\lambda_{7_0} = \lambda_{m0}$.

При использовании модели ОЦП уравнения движения КА имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{V}; \\ \dot{\bar{V}} = -\omega^2 \cdot \bar{x} + \dfrac{c\beta}{x_7} \cdot \bar{\alpha}; \\ \dot{x}_7 = -\beta; \end{cases} \tag{7}$$

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu}{r_1^3}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_2^3}}\right),$$

где ω — средняя угловая скорость движения КА в рассматриваемом шаровом слое маневрирования.

Требуется найти оптимальное управление $\beta(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$, обеспечивающие перелет КА из начального состояния $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, $\bar{V}(0) = \bar{V}_0$ в конечную целевую точку $\bar{x}(T) = \bar{x}_{\text{т}}$ при минимальном значении энергетических затрат, характеризующихся функционалом $I = \int_0^T \beta(t)\,dt$ при наличии тех же ограничений по секундному расходу топлива и вектору направляющих косинусов силы тяги ДУ, что и ранее:

$$0 \le \beta(t) \le \beta_{\max}, \quad \bar{\alpha}^{\text{T}}(t)\bar{\alpha}(t) = 1.$$

Составим гамильтониан системы:

$$H = \bar{\lambda}_1^{\text{T}} \cdot \bar{V} + \bar{\lambda}_2^{\text{T}}\left(-\omega^2 \bar{x} + \frac{c\beta}{x_7}\bar{\alpha}\right) - \beta \cdot \lambda_7 - \beta, \tag{8}$$

и сформируем сопряженную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\lambda}}_1 = \omega^2 \bar{\lambda}_2; \\ \dot{\bar{\lambda}}_2 = -\bar{\lambda}_1; \\ \dot{\lambda}_7 = \dfrac{c\beta}{x_7^2} \bar{\lambda}_2^{\text{T}} \cdot \bar{\alpha}. \end{cases} \tag{9}$$

Поскольку значения $\bar{V}(T)$ и $x_7(T)$ являются свободными, то для системы (9) имеем граничные условия $\bar{\lambda}_2(T)=0,\ \lambda_7(T)=0.$

Из условия максимума гамильтониана определим структуру оптимального управления с учетом имеющихся ограничений:

$$\bar{\alpha}(t)=\frac{\bar{\lambda}_2(t)}{\lambda(t)};\quad \beta(t)=\begin{cases}\beta_{\max}, & \text{при } \Delta_\Pi(t)\ge 1;\\ 0, & \text{при } \Delta_\Pi(t)<1;\end{cases}$$
$$\Delta_\Pi(t)=\frac{c|\lambda(t)|}{x_7(t)}-\lambda_7(t), \tag{10}$$

где $\Delta_\Pi(t)$ — функция переключения тяги; $\lambda(t)=\left(\bar{\lambda}_2^{\mathrm{T}}(t)\bar{\lambda}_2(t)\right)^{1/2}$ — модуль вектора $\bar{\lambda}_2(t)$.

Проинтегрируем первые два уравнения системы сопряженных уравнений (9) на интервале от 0 до t. В результате получим:

$$\begin{cases}\bar{\lambda}_1(t)=\cos\omega \mathrm{t}\cdot\bar{\lambda}_{10}+\omega\cdot\sin\omega \mathrm{t}\cdot\bar{\lambda}_{20};\\ \bar{\lambda}_2(t)=-\dfrac{1}{\omega}\sin\omega \mathrm{t}\cdot\bar{\lambda}_{10}+\cos\omega \mathrm{t}\cdot\bar{\lambda}_{20}.\end{cases} \tag{11}$$

Воспользуемся граничными условиями на конечный момент времени сближения $\bar{\lambda}_2(T)=0.$ Тогда из второго уравнения (11) получим связь начальных значений $\bar{\lambda}_{10}$ и $\bar{\lambda}_{20}$:

$$\bar{\lambda}_{10}=\omega\cdot\mathrm{ctg}\omega T\cdot\bar{\lambda}_{20}. \tag{12}$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (11), получим:

$$\bar{\lambda}_2(t)=\varphi(t,T)\cdot\bar{\lambda}_{20}, \tag{13}$$

где $\varphi(t,T)=-\sin\omega t\cdot\mathrm{ctg}\omega T+\cos\omega t.$

Тогда:

$$\lambda(t)=\left(\bar{\lambda}_2^{\mathrm{T}}(t)\bar{\lambda}_2(t)\right)^{1/2}=|\varphi(t,T)|\cdot\left(\bar{\lambda}_{20}^{\mathrm{T}}\,\bar{\lambda}_{20}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Функцию $\varphi(t,T)$ можно представить в виде:

$$\varphi(t,T)=\frac{-\sin\omega T\cdot\cos\omega t+\sin\omega t\cdot\cos\omega T}{\sin\omega T}=\frac{\sin\omega(T-t)}{\sin\omega T}. \tag{15}$$

Тогда при $\omega T<\pi$ функция $\varphi(t,T)>0.$

Таким образом, при перехвате на первом полувитке, то есть при $T<\dfrac{\pi}{\omega},$ эта функция положительна и, следовательно, в выражении (14) модуль можно исключить:

$$\lambda(t)=\varphi(t,T)\sqrt{\bar{\lambda}_{20}^{\mathrm{T}}\cdot\bar{\lambda}_{20}}. \tag{16}$$

Теперь с учетом (10 и 13) получим:

$$\bar{\alpha}_{opt}=\frac{\bar{\lambda}_{20}}{\lambda_0}, \tag{17}$$

где $\lambda_0=\sqrt{\bar{\lambda}_{20}^{\mathrm{T}}\cdot\bar{\lambda}_{20}}$.

Из (17) следует, что оптимальное значение вектора направляющих косинусов тяги ДУ постоянно на всем активном участке траектории (АУТ) КА при заданной модели движения в ОЦП и зависит только от начальных значений вектора сопряженных переменных $\bar{\lambda}_{20}$.

Заметим далее, что согласно (10), в оптимальном режиме в момент окончания АУТ T_1 функция переключения принимает единичное значение, то есть должно выполняться равенство:

$$\Delta(T_1)=1.$$

Тогда из (10) следует:

$$\frac{c}{x_7(T_1)}\lambda(T_1)-\lambda_7(T_1)=1.$$

По условию задачи $\lambda_7(T)=0.$ Однако $\lambda_7(t)$ не изменяется с момента T_1 , поскольку управление на участке $[T_1,T]$ отсутствует, следовательно $\lambda_7(T_1)=0.$ С учетом этого имеем:

$$\lambda(T_1)=\frac{x_7(T_1)}{c}=\frac{1-\beta T_1}{c}. \tag{18}$$

Согласно (16) на момент T_1, получим:

$$\lambda(T_1) = \varphi(T_1, T)\lambda_0, \tag{19}$$

где

$$\varphi(T_1, T) = \frac{\sin\omega(T - T_1)}{\sin\omega T}.$$

Тогда из (18) и (19) определим λ_0:

$$\lambda_0 = \frac{(1 - \beta T_1)}{c} \cdot \frac{\sin\omega T}{\sin\omega(T - T_1)}. \tag{20}$$

Далее определим связь между начальными значениями сопряженных переменных с краевыми условиями уравнений относительного движения. Для этого проинтегрируем систему (7) на интервале времени от 0 до T в предположении, что модуль реактивного ускорения $u(t)$ равен его постоянному среднему значению $u_{\text{ср}}$ на АУТ. Тогда получим следующее приближенное решение:

$$\begin{cases} \bar{x}(T) = \cos\omega T \cdot \bar{x}_0 + \dfrac{1}{\omega}\sin\omega T \cdot \bar{V}_0 + \dfrac{u_{\text{ср}}}{\omega^2}\left[\cos\omega(T - T_1) - \cos\omega T\right]\dfrac{\bar{\lambda}_{20}}{\lambda_0}; \\ \bar{V}(T) = -\omega \cdot \sin\omega T \cdot \bar{x}_0 + \cos\omega T \cdot \bar{V}_0 + \dfrac{u_{\text{ср}}}{\omega}\left[\sin\omega T - \sin\omega(T - T_1)\right]\dfrac{\bar{\lambda}_{20}}{\lambda_0}. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем:

$$\bar{\alpha}_{opt} = \frac{\bar{\lambda}_{20}}{\lambda_0} = S_u(T_1, T),$$

где

$$\bar{S}_u(T_1, T) = \frac{\omega^2}{u_{\text{ср}}}\left[\frac{\bar{x}_T - \cos\omega T \cdot \bar{x}_0 - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega T \cdot \bar{V}_0}{\cos\omega(T - T_1) - \cos\omega T}\right]; \tag{21}$$

Отсюда можно найти соотношение для определения $\bar{\lambda}_{20}$:

$$\bar{\lambda}_{20} = \bar{S}_u(T_1, T)\lambda_0. \tag{22}$$

Тогда с учетом (20) окончательно получаем:

$$\bar{\lambda}_{20} = \frac{(1-\beta T_1)}{c} \cdot \frac{\sin \omega T}{\sin \omega (T - T_1)} \cdot \bar{S}_u (T_1, T). \tag{23}$$

Принимая во внимание (13), находим расчетное соотношение для определения $\bar{\lambda}_{10}$:

$$\bar{\lambda}_{10} = \omega \cdot \frac{(1-\beta T_1)}{c} \cdot \frac{\cos \omega T}{\sin \omega (T - T_1)} \cdot \bar{S}_u (T_1, T). \tag{24}$$

Таким образом, начальные значения сопряженных переменных $\bar{\lambda}_{10}, \bar{\lambda}_{20}$ определены аналитически и вычисляются, соответственно, по формулам (23) и (24). Однако, эти соотношения зависят от момента переключения T_1 и среднего реактивного ускорения $u_{\text{ср}}$, которые пока неизвестны. Для их определения можно предварительно решить задачу расчета программы управления перехватом КА в импульсной постановке или с учетом конечной тяги при постоянной ориентации вектора тяги. При этом могут быть использованы более точные модели динамики КА по сравнению с ОЦП, такие как модели движения в центральном или нецентральном ГПЗ [6, 7 и др.].

Если определены затраты характеристической скорости $V_{\text{хар}}$ на АУТ, то указанные параметры можно рассчитать по следующим формулам:

$$T_1 = \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{V_{\text{хар}}}{c}}\right); \; u_{\text{ср}} = \frac{V_{\text{хар}}}{T_1} = -\frac{c}{T_1} \ln(1-\beta T_1). \tag{25}$$

В рамках приближенного подхода можно воспользоваться результатами решения соответствующей модельной задачи сближения в ОЦП. В этом случае затраты характеристической скорости, необходимые для осуществления перехвата за заданное время, вычисляются по формуле:

$$\bar{V}_{xap} = \frac{\omega}{\sin \omega T} \bar{\rho}_{\text{T}},$$

где

$$\bar{\rho}_{\text{T}} = \bar{x}_T - \cos \omega T \cdot \bar{x}_0 - \frac{1}{\omega} \sin \omega T \cdot \bar{V}_0,$$

$\overline{\rho}_{\text{T}}$ — отклонение прогнозируемых координат КА от координат КА-Ц на конечный момент времени полета при его свободном движении.

После определения $V_{\text{хар}}$ по приведенным выше формулам находятся значения T_1 и $u_{\text{ср}}$. Тогда продолжительность активного участка можно итерационно уточнить по формуле:

$$T_1 = T - \frac{1}{\omega}\arccos\left(\frac{\omega^2}{u_{\text{ср}}}\left|\overline{\rho}_{\text{T}}\right| + \cos\omega T\right), \tag{26}$$

а, следовательно, скорректировать и значение параметра $u_{\text{ср}}$.

Далее перейдем к определению значения параметра λ_{70}. С этой целью рассмотрим последнее дифференциальное уравнение сопряженной системы (9), которое для оптимальной программы изменения вектора направляющих косинусов (10) примет следующий вид:

$$\dot{\lambda}_7 = \frac{c\beta(t)}{x_7^2(t)}\lambda(t).$$

Принимая во внимание (15) и (16) запишем это уравнение как:

$$\dot{\lambda}_7 = \frac{c\beta(t)}{x_7^2(t)} \cdot \frac{\sin\omega(T-t)}{\sin\omega T} \cdot \lambda_0.$$

Проинтегрируем данное уравнение на интервале времени от 0 до T в предположении, что модуль реактивного ускорения $u(t)$ равен его постоянному среднему значению $u_{\text{ср}}$ на АУТ. Тогда, принимая во внимание граничные условия $\lambda_7(T) = \lambda_7(T_1) = 0$ получим следующее приближенное решение:

$$\lambda_{70} = \frac{u_{cp}^2}{c\beta} \cdot \frac{\lambda_0}{\omega\sin\omega T}\left[\cos\omega T - \cos\omega(T - T_1)\right].$$

Подставляя в это выражение значение параметра λ_0 согласно (20) окончательно получим:

$$\lambda_{70} = \frac{u_{cp}^2}{c^2\beta} \cdot \frac{(1-\beta T_1)}{\omega\sin\omega(T-T_1)}\left[\cos\omega T - \cos\omega(T - T_1)\right].$$

Полученные результаты определяют исходное приближение для начальных значений сопряженных переменных, необходимых при итерационном решении полной краевой задачи оптимального управления в нормальном ГПЗ с постоянным секундным расходом топлива, рассмотренной в п.п. 2 и 3. Приведем их в окончательном виде, удобном для проведения расчетов.

$$\bar{\lambda}_{10} = \omega \cdot \frac{(1-\beta T_1)}{c} \cdot \frac{\cos\omega T}{\sin\omega(T-T_1)} \cdot \bar{S}_u(T_1, T).;$$

$$\bar{\lambda}_{20} = \frac{(1-\beta T_1)}{c} \cdot \frac{\sin\omega T}{\sin\omega(T-T_1)} \cdot \bar{S}_u(T_1, T).;$$

$$\lambda_{70} = \frac{u_{cp}^2}{c^2\beta} \cdot \frac{(1-\beta T_1)}{\omega\sin\omega(T-T_1)}\left[\cos\omega T - \cos\omega(T-T_1)\right]; \tag{27}$$

$$\bar{S}_u(T_1, T) = \frac{\omega^2}{u_{\text{ср}}}\left[\frac{\bar{x}_T - \cos\omega T \cdot \bar{x}_0 - \frac{1}{\omega}\sin\omega T \cdot \bar{V}_0}{\cos\omega(T-T_1) - \cos\omega T}\right].$$

5. Результаты тестовых расчетов. Для оценки сходимости предложенного способа расчета оптимального управления сближением, базирующихся на методологии принципа максимума, были проведены численные исследования.

Для анализа вычислительного процесса оптимизации программы управления КА принимались следующие исходные данные: $H_{КА} = 1000$ км, $H_{КА-Ц} = 1500$ км, $\Delta\varphi_0 = -5°$, $T_{ЗАД} = 700$ с, $\beta = 0.01$ с, которые соответствуют условиям быстрого сближения. Этот выбор продиктован тем, что основное влияние конечной тяги на значения энергетических затрат сказывается в области ограниченных угловых дальностей полета, что соответствует области повышенных энергетических затрат.

При проведении расчетов использовалась система дифференциальных уравнений (5), описывающая движение КА в нецентральном ГПЗ, и соответствующая ей система сопряженных уравнений (6). Для определения начальных значений сопряженных переменных применялись формулы (27), в которых параметры T_1 и $u_{\text{ср}}$ вычислялись путем решения двухточечной краевой задачи перехвата в центральном ГПЗ с учетом конечной тяги по методике, приведенной в [7]. Итерационный вычислительный процесс выполняется по алгоритму метода Ньютона (п.2).

В таблице 1 представлены результаты анализа сходимости вычислительного процесса расчетов программы энергетически оптимального управления сближением в нормальном ГПЗ с конечной тягой. Здесь приведены для каждой итерации значения модуля конечного промаха $\Delta\rho(T)$, продолжительности АУТ T_1, начальные значения всех компонент вектора сопряженных переменных λ_{x0}, λ_{y0}, λ_{z0}, $\lambda_{V_{x0}}$, $\lambda_{V_{y0}}$, $\lambda_{V_{z0}}$, λ_{7_0} и затрат характеристической скорости V_{xap}.

Таблица 1. Сходимость процесса оптимизации управления

Величина		№ итерации		
		0	1	2
$\Delta\rho(T)$	км	8.32	0.761	0.02
T_1	с	23.76	24.37	24.23
λ_{x0}	10^{-4}	-3.69	-3.75	-3.76
λ_{y0}	10^{-4}	6.06	6.04	5.99
λ_{z0}	10^{-4}	10.48	10.43	10.41
$\lambda_{V_{x0}}$	10^{-1}	-3.03	-3.09	-3.11
$\lambda_{V_{y0}}$	10^{-1}	4.94	4.92	4.89
$\lambda_{V_{z0}}$	10^{-1}	8.49	8.47	8.47
λ_{7_0}	10^{-1}	-2.51	-2.46	-2.43
V_{xap}	км/с	0.809	0.817	0.824

Полученные результаты расчетов показывают, что в рассмотренных расчетных условиях вычислительный процесс определения оптимальной программы управления перелета КА сходится за 3 итерации. При этом модуль промаха по относительным координатам попадания в целевую точку составляет 20 м. Это обстоятельство свидетельствует о достаточно высокой вычислительной экономичности исследуемых алгоритмов, а также о возможности их практического применения для решения задачи оптимального управления сближением КА с ЦО на этапе дальнего наведения.

6. Заключение. Предложенные алгоритмические средства расчета оптимальной по энергетическим затратам программы управления движения КА при его сближении с ЦО на этапе дальнего наведения обеспечивает решение задачи в широкой области маневрирования применительно к КА, оснащенному продольной ДУ. Это в значительной мере достигается за счет рационального определения нулевого приближения для вектора начальных значений сопряженных переменных по разработанной методике. При этом полновесно учитываются нецентральность ГПЗ как в модели движения КА, так и в модели сопряженных дифференциальных уравнений, а также неимпульсный характер действия силы тяги ДУ при постоянном секундном расходе топлива. Проведенные тестовые расчеты подтверждают работоспособность представленных алгоритмов.

В целом, применение алгоритмов оптимального управления сближением в бортовом и наземном комплексе позволяет уменьшить затраты топлива при выполнении маневра, сократить время, а также расширить область достижимости ЦО. Кроме того, оптимальное решение может рассматриваться в качестве эталона, с которым необходимо сравнивать различные варианты приближенных алгоритмов управления, оценивать их качество и принимать обоснованные решения по их практическому использованию.

Литература

1. *Авдуевский В.С., Антонов Б.М.* Основы теории полета космических аппаратов // М.: Машиностроение. 1972. 608 с.
2. *Лысенко Л.Н., Бетанов В.В., Звягин Ф.В.* Теоретические основы баллистико-навигационного обеспечения космических полетов // М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 520 с.
3. *Лебедев А.А., Соколов В.Б.* Встреча на орбите // М.: Машиностроение. 1969. 366 с.
4. *Ильин В.А., Кузмак Г.Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов // М.: Наука. 1976. 744 с.
5. *Ермилов Ю.А., Иванова Е.Е., Пантюшин С.В.* Управление сближением космических аппаратов // М.: Наука. 1977. 448 с.
6. *Миронов В.И., Миронов Ю.В, Макаров М.М.* Алгоритм расчета программы управления перехватом в нецентральном гравитационном поле Земли с учетом конечной тяги на основе уравнений Эйлера–Ламберта // Сборник трудов ВКА им. А.Ф. Можайского. 2014. №4(645). С. 64–72.
7. *Миронов В.И., Миронов Ю.В, Бурмистров В.В., Макаров М.М.* Алгоритм расчета программы управления сближением в нецентральном гравитационном поле Земли с учетом конечной тяги // Сборник трудов ВКА им. А.Ф. Можайского. 2014. №1(646). С. 85–94.
8. *Oghim S., Mok S.H., Leeghim H.* Optimal Spacecraft Rendezvous by Minimum Velocity Change and Wait Time // Advances in Space Research. 2017. vol. 60. no. 6. pp. 1188–1200.
9. *Shen H., Zhang T., Casalino L., Pastrone D.* Optimization of Active Debris Removal Missions with Multiple Targets // Jornal of Spacecrafts and Rockets. 2018. vol. 55. no. 1. pp. 181–189.
10. *Oghim S., Leeghim H., Kim D.* Real-time Spacecraft Intercept Strategy on J2-perturbed Orbits // Advances in Space Research. 2019. vol. 63. no. 2. pp. 1007–1016.

11. *Xu L., Zhang T., Zhou H., Li M.* Relative Orbit Control Method for Non-Cooperative Maneuvering Target Rendezvous // 2015 Chinese Automation Congress (CAC). 2015. pp. 1690–1695.
12. *Leeghim H., Kim D., Turner J.* Solution for Nonlinear Three-Dimensional Intercept Problem with Minimum Energy // Mathematical Problems in Engineering. 2013. vol. 2013. 8 p.
13. *Leeghim H.* Spacecraft intercept using minimum control energy and wait time // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2013. vol. 115. no. 1. pp. 1–19.
14. *Баранов А.А., Будянский А.А, Разумный Ю.Н.* Управление движением космического аппарата при подлете к крупногабаритному объекту космического мусора // Космические исследования. 2017. Т. 55. № 4. С. 285–289.
15. *Муртазин Р.Ф.* Схемы ускоренного доступа к орбитальной станции для современных космических кораблей // Космические исследования. 2014. Т. 52. № 2. С. 162–175.
16. *Иванюхин А.В., Петухов В.Г.* Задачи минимизации тяги и ее приложения // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 4. С. 320–331.
17. *Евдокимов Р.А., Чилин Ю.Н.* Параметрический синтез электродвигательного комплекса системы транспортно-технического обеспечения орбитальной группировки КА // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 3. С. 250–264.
18. *Баранов А.А., Гришко Д.А., Медведевских В.В., Лапшин В.В.* Решение задачи облетов крупногабаритного космичекского мусора на солнечно-синхронных орбитах // Космические исследования. 2016. Т. 54. № 3. С. 242–250.
19. *Муртазин Р.Ф.* Схема сближения с лунной орбитальной станцией космического корабля, стартующего с Земли // Космические исследования. 2016. Т. 54. № 3. С. 268–274.
20. *Суханов А.А., Прадо А.Ф.Б.* Межорбитальные перелеты с малой тягой в произвольном поле сил // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 2. С. 159–175.
21. *Новоселов В.С.* Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях // ЛГУ. 1972. 317 с.

Миронов Вячеслав Иванович — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий в системном анализе и моделировании, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: фундаментальные и прикладные исследования проблем комплексного моделирования, теория оптимального наблюдения и управления динамическими процессами, вычислительная математика, баллистика космических полетов, методы навигации и управления движением ракет-носителей и космических аппаратов, статистический анализ характеристик сложных технических систем. Число научных публикаций — 350. vi-mironov@yandex.ru; 14-я линия В.О., 39, Санкт-Петербург; 199178; р.т.: +7(812)328-3337; факс: +7(812)328-4450.

Миронов Юрий Вячеславович — д-р техн. наук, доцент, ведущий специалист АО «НИЦ СПб ЭТУ». Область научных интересов: баллистика космических полетов, методы навигации и управления движением ракет-носителей и космических аппаратов, теория статистического оценивания, вычислительная математика. Число научных публикаций — 150. mironuv@yandex.ru; ул. Политехническая, 22, лит."Н", Санкт Петербург, 194021; р.т.: +7(812)703-7583; факс: +7(812)703-7584.

Фоминов Иван Вячеславович — д-р техн. наук, начальник кафедры автономных систем управления, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: системы навигации и управления движением космических аппаратов. Число научных публикаций — 30. i.v.fominov@gmail.com; ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198; р.т.: +7(812)347-9521.

DOI 10.15622/sp.18.1.202-229

V.I. MIRONOV, Y.V. MIRONOV, I.V. FOMINOV

ENERGETICALLY OPTIMAL CONTROL OF THE CONVERGENCE OF THE SPACECRAFT IN NON-CENTRAL GRAVITATIONAL FIELD OF THE EARTH ON THE FAR GUIDANCE STAGE

Mironov V.I., Mironov Y.V., Fominov I.V. **Energetically Optimal Control of the Convergence of the Spacecraft in Non-Central Gravitational Field of the Earth on the Far Guidance Stage.**

Abstract. The article is devoted to the development of algorithms for calculating energy-optimal programs for controlling the approach of a spacecraft to an orbital object at the long-range guidance stage using the maximum principle L.S. Pontryagin. It is assumed that the spacecraft is equipped with a longitudinal propulsion system running on chemical fuel. The programs of optimal change in the second fuel consumption and the vector of cosine guides, which determine the orientation of the thrust force of the propulsion system, should be determined. As a criterion for optimal control, we consider a functional that determines the minimum consumption of the working fluid. The optimal control problem is solved in a limited region of the state space, which is determined by the range of variation of the angular range of the spacecraft within one revolution. The full equations of the boundary value problem of the maximum principle are given using the model of the object's motion in the normal gravitational field of the Earth, the boundary conditions, and also the analytical dependencies that determine the control structure in the optimal mode. The boundary optimization problem is solved with the Newton method. To determine the initial approximation of conjugate variables, an analytical solution is given to the problem of energy-optimal approach control in a uniform central field. The results of numerical studies of energy-optimal programs to control the interception in the normal gravitational field of the Earth with the final pitch at the stage of long-range guidance are presented. In general, the use of optimal approach control algorithms in the airborne and ground complex allows to reduce fuel costs when performing the maneuver, reduce time, and expand the reachability area of the target objects. In addition, the optimal solution can be considered as a reference, with which it is necessary to compare various variants of approximate control algorithms, evaluate their quality and make informed decisions on their practical use.

Keywords: Spacecraft, Meeting in Orbit, Optimal Control, Long-Range Guidance.

Mironov Vyacheslav Ivanovich — Ph.D., Dr. Sci., Professor, Chief Researcher of Information Technologies in System Analysis and Modeling Laboratory, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: Fundamental And Applied Researches in Complex Modeling; Theory of Optimal Observation and Control of Dynamic Processes; Computing Mathematics; Ballistics of Space Flight; Statistical Analysis of Complex Technical Systems. The number of publications — 350. vi-mironov@yandex.ru; 14 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone: +7(812)328-3337, fax: +7(812)328-4450.

Mironov Yuri Vyacheslavovich — Ph.D., Dr. Sci., Associate Professor, Leading Specialist of System Design Department, JSC "R&EC ETU". Research interests: Ballistics of Space Flights, Methods of Navigation and Control of The Motion of Carrier Rockets and Space Vehicles, Theory of Statistical Estimation, Computational Mathematics. The number of publications — 150. vi-mironov@yandex.ru; 22, Politechnicheskaya str., building N, St. Petersburg, 194021, Russia; office phone: +7(812) 703-7583, fax: +7(812) 703-7584.

Fominov Ivan Vyacheslavovich — Ph.D., Dr. Sci., Head of Autonomous Control Systems Department, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: Navigation and Control Systems of Spacecrafts. The number of publications — 30. i.v.fominov@gmail.com; 13, Zhdanovskaya str., St.-Petersburg, 197198, Russia; office phone: +7(812)347-9521.

References

1. Avduevskij V.S., Antonov B.M. *Osnovy teorii poleta kosmicheskih apparatov* [Fundamentals of the theory of spacecraft flight]. M.: Mashinostroenie. 1972. 608 p. (In Russ.).
2. Lysenko L.N., Betanov V.V., Zvjagin F.V. *Teoreticheskie osnovy ballistiko-navigacionnogo obespechenija kosmicheskih poletov* [Theoretical foundations of ballistic-navigational support of space flights of spacecraft flight theory]. M.: Bauman Moscow State Technical University. 2014. 520 p. (In Russ.).
3. Lebedev A.A., Sokolov V.B. *Vstrecha na orbite* [Meeting in orbit]. M.: Mashinostroenie. 1969. 366 p. (In Russ.).
4. Il'in V.A., Kuzmak G.E. *Optimal'nye perelety kosmicheskih apparatov* [Optimal spacecraft flights]. M.: Nauka. 1976. 744 p. (In Russ.).
5. Ermilov Yu.A., Ivanova E.E., Pantyushin S.V. *Upravlenie sblizheniem kosmicheskih apparatov* [Control of the approach of space vehicles]. M.: Nauka. 1977. 448 p. (In Russ.).
6. Mironov V.I., Mironov Yu.V, Makarov M.M. [Algorithm for calculating the interception control program in the noncentral gravitational field of the Earth with allowance for the final thrust based on the Euler-Lambert equations]. *Sbornik trudov VKA im. A.F.Mozhajskogo – Proceedings of Mozhaysky Acadimy*. 2014. vol. 4(645). pp. 64–72. (In Russ.).
7. Mironov V.I., Mironov Yu.V, Burmistrov V.V., Makarov M.M. [Algorithm for calculating the approach control program in the noncentral gravitational field of the Earth with allowance for the final thrust]. *Sbornik trudov VKA im. A.F.Mozhajskogo – Proceedings of Mozhaysky Acadimy*. 2014. vol. 1(646). pp. 85–94. (In Russ.).
8. Oghim S., Mok S.H., Leeghim H. Optimal Spacecraft Rendezvous by Minimum Velocity Change and Wait Time. *Advances in Space Research*. 2017. vol. 60. no. 6. pp. 1188–1200.
9. Shen H., Zhang T., Casalino L., Pastrone D. Optimization of Active Debris Removal Missions with Multiple Targets. *Jornal of Spacecrafts and Rockets.* 2018. vol. 55. no. 1. pp. 181–189.
10. Oghim S., Leeghim H., Kim D. Real-time Spacecraft Intercept Strategy on J2-perturbed Orbits. *Advances in Space Research.* 2019. vol. 63. no. 2. pp. 1007–1016.
11. Xu L., Zhang T., Zhou H., Li M. Relative Orbit Control Method for Non-Cooperative Maneuvering Target Rendezvous. 2015 Chinese Automation Congress (CAC). 2015. pp. 1690–1695.
12. Leeghim H., Kim D., Turner J. Solution for Nonlinear Three-Dimensional Intercept Problem with Minimum Energy. *Mathematical Problems in Engineering*. 2013. vol. 2013. 8 p.
13. Leeghim H. Spacecraft intercept using minimum control energy and wait time. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2013. vol. 115. no. 1. pp. 1–19.
14. Baranov A.A., Budjanskij A.A, Razumnyj Yu.N. [Spacecraft motion control when approaching a large space debris object]. *Kosmicheskie issledovaniya – Outer Space Research.* 2017. vol .55. no 4. pp. 285–289. (In Russ.).
15. Murtazin R.F. [Schemes of accelerated access to the orbital station for modern spacecraft]. *Kosmicheskie issledovaniya – Outer Space Research.* 2014. vol. 52. no. 2. pp. 162–175. (In Russ.).

16. Ivanjuhin A.V., Petuhov V.G. [Tasks to minimize thrust and its applications]. *Kosmicheskie issledovaniya – Outer Space Research.* 2015. vol. 53. no. 4. pp. 320–331. (In Russ.).
17. Evdokimov R.A., Chilin Yu.N. [Parametric synthesis of the electric motor complex of the transport-technical support system of the orbital group of spacecraft]. *Kosmicheskie issledovaniya – Outer Space Research.* 2013. vol. 51. no. 3. pp. 250–264. (In Russ.).
18. Baranov A.A., Grishko D.A., Medvedevskih V.V., Lapshin V.V. [The solution of the problem of overflights of large-sized kosmoschek garbage in sun-synchronous orbits]. *Kosmicheskie issledovaniya – Outer Space Research.* 2016. vol. 54. no. 3. pp. 242–250. (In Russ.).
19. Murtazin R.F. [The approach to the lunar orbital station of a spacecraft starting from Earth]. *Kosmicheskie issledovaniya – Outer Space Research.* 2016. vol. 54. no. 3. pp. 268–274. (In Russ.).
20. Suhanov A.A., Prado A.F.B. [Small-scale interorbital flights in an arbitrary force field]. *Kosmicheskie issledovaniya – Outer Space Research.* 2013. vol. 51. no. 2. pp. 159–175. (In Russ.).
21. Novoselov V.S. *Analiticheskaya teoriya optimizacii v gravitacionnyh polyah* [Analytical theory of optimization in gravitational fields]. Publishing House of Leningrad University. 1972. 317 p. (In Russ).