

В.Я. Копп, М.В. ЗАМОРЕНОВ, Н.И. ЧАЛЕНКОВ, И.А. СКАТКОВ  
**ФАЗОВОЕ УКРУПНЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ БЕЗ  
ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА**

*Копп В.Я., Заморёнов М.В., Чаленков Н.И., Скатков И.А. Фазовое укрупнение полумарковских систем без определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова.*

**Аннотация.** Рассматривается фазовое укрупнение полумарковских систем, не требующее определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Под фазовым укрупнением понимается эквивалентная замена полумарковской системы с общим фазовым пространством состояний системой с дискретным пространством состояний. Нахождение стационарного распределения вложенной цепи Маркова для системы с непрерывным фазовым пространством состояний является одним из наиболее трудоемких и не всегда разрешимым этапом, так как в ряде случаев приводит к решению интегральных уравнений с ядрами, содержащими сумму и разность переменных. Для таких уравнений известно только частное решение, а общих решений на сегодняшний день не существует. Для этой цели используется лемма о виде функции распределения разности двух случайных величин, при условии, что первая величина больше вычитаемой. Показано, что вид функции распределения разности двух случайных величин при указанном условии зависит от одной константы, которая определяется численным методом решения уравнения, приведенного в лемме. На основе леммы строится теорема о разности случайной величины и непростого потока восстановления. Использование данного метода демонстрируется на примере моделирования технической системы, состоящей из двух последовательно соединенных технологических ячеек, при условии, что одновременно отказать обе ячейки не могут. Определяются функции распределения времен пребывания системы в укрупненных состояниях, а также в подмножестве работоспособных и неработоспособных состояний. Сравнение результатов моделирования рассматриваемым и классическим методами показало полное совпадение искомых величин.

**Ключевые слова:** полумарковская система; алгоритм фазового укрупнения; функция распределения; непрерывные состояния; времена пребывания в состояниях; плотности вероятностей перехода; вложенная цепь Маркова.

**1. Введение.** Одним из наиболее трудоемких этапов построения полумарковских моделей для систем с общим фазовым пространством состояний является определение стационарного распределения вложенной цепи Маркова (ВЦМ) [1-7], которое зачастую связано с решением интегральных уравнений, ядра которых содержат функции от суммы разности переменных. Данная задача в общем виде не решена и представляется возможным находить для нее отдельные частные решения [8-17]. Предлагается новый численный метод, позволяющий определить функции распределения времен пребывания в укрупненных состояниях дискретной системы. Метод называется численным, так как позволяет определить необходимые константы, входящие в уравнение для функции распределения остаточного времени наработки системы. Это стало возможным благодаря указанной лемме, в которой доказано, что всегда можно найти такое время, прошедшее с начала наработки, чтобы эти функции распределения точно совпали. Доказанная лемма, хоть и

имеет самостоятельное значение, в данном случае служит для доказательства теоремы о разности двух случайных величин, причем вторая является непростым потоком восстановления. Приведенные ниже исследования на конкретном примере доказывают правильность полученных выводов. Решается задача о последовательном соединении двух технологических ячеек и найденное решение сравнивается с известным из литературы методом, основанным на решении уравнений марковского восстановления [18-22].

Цель данной работы – подтвердить правильность предложенного метода укрупнения полумарковских систем с общим фазовым пространством состояний на примере моделирования технической системы, состоящей из двух последовательно соединенных технологических ячеек, при условии, что одновременно отказать обе ячейки не могут.

**2. Решение проблемы фазового укрупнения.** В классическом случае для фазового укрупнения полумарковских (ПМ) систем используется формула, предложенная В. С. Королюком [1], для определения функции распределения случайной величины  $\gamma$ , являющейся разностью случайных величин (СВ)  $\alpha$  и  $\beta$  при условии, что  $\alpha > \beta$ . В литературе она обозначается  $\gamma = [\alpha - \beta]^+$ , а выражение для ее функции распределения имеет вид:

$$F_{\gamma}(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] dF_2(y)}{\int_0^{\infty} \overline{F_1}(t) f_2(t) dt}, \quad (1)$$

где  $F_1(t)$  – функция распределения СВ  $\alpha$ , причем  $\overline{F_1}(t) = 1 - F_1(t)$ , а  $F_2(t)$  и  $f_2(t)$  – функция и плотность распределения СВ  $\beta$ .

Данная формула (1) пригодна для случая, когда рассматриваются просто случайные величины  $\alpha$  и  $\beta$  с функциями распределения (ФР)  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ , имеющими плотности распределения (ПР)  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . В ряде случаев, когда эта формула применяется однократно, такой прием очень удобен. Однако, в случае ее многократного использования, возникают значительные сложности, так как получаются крайне громоздкие выражения, переполняющие память компьютера. Поэтому в [23] на основе доказанной леммы была решена задача определения вида функции, которая позволяет абсолютно точно аппроксимировать выражение (1), являющееся смесью.

В формуле (1) выражение:

$$\frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] dF_2(y)}{\int_0^{\infty} \overline{F_1}(t) f_2(t) dt}$$

представляет собой зависящее от действительного параметра  $y > 0$  семейство функций распределения, а  $F_2(t)$  – весовую функцию.

Доказанная в [23] лемма сформулирована в следующей форме. Функция распределения  $F_\gamma(t)$  времени разности двух СВ  $(\alpha - \beta)$  с функциями распределения  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  соответственно, при условии, что  $(\alpha > \beta)$ , определяемая выражением:

$$F_\gamma(t) = \frac{\int_0^{\infty} F_1(t+y) f_2(y) dy - \int_0^{\infty} F_1(y) f_2(y) dy}{\int_0^{\infty} \overline{F_1}(t) f_2(t) dy},$$

с учетом того, что

$$F_2(t) = 1_x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq x_g; \\ 0, & t < x_g, \end{cases}$$

имеет вид:

$$F_\gamma(t, x) = \frac{F_1(t + x_g) - F_1(x_g)}{\overline{F_1}(x_g)},$$

где значение параметра  $x_g$  выбирается из равенства:

$$F_\gamma(y) = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] f_2(y) dy}{\int_0^{\infty} \overline{F_1}(y) f_2(y) dt} = \frac{F_1(t + x_g) - F_1(x_g)}{\overline{F_1}(x_g)}. \quad (2)$$

Если же вместо СВ  $\beta$  рассматривается простой процесс восстановления, порождаемый ФР  $F_2(t)$ , то есть со СВ  $\beta_\Sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ , где  $\beta_k = \sum_{i=1}^k \beta$  с ПР  $f_2^{(*)k}(t)$ ,  $\beta$  – случайная величина с ПР  $f_2(t)$ , то нужно пользоваться формулой:

$$F_{\alpha-\beta_\Sigma}(t) = P\{[\alpha - \beta_\Sigma]^+ \leq t\} = \frac{\int_0^\infty [F_1(t+y) - F_1(y)]h_2(y)dy}{\int_0^\infty \overline{F_1(x)}h_2(dx)}, \quad (3)$$

где  $h_2(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_2^{(*)k}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2,k}(y)$  – плотность функции восстановления.

В случае, если вместо простого процесса восстановления рассматривается непростой процесс, порождаемый ФР  $F_\gamma(t)$  и  $F_2(t)$ , то есть со СВ  $\beta_\Sigma = \gamma + \sum_{k=0}^k \beta = \gamma + \beta_k$ , где СВ  $\beta$

имеет ПР  $f_2(t)$ , СВ  $\beta_k = \sum_{i=1}^k \beta$  имеет ПР  $f_2^{(*)k}(t)$ , СВ  $\gamma$  является временем первого скачка и имеет ПР  $f_\gamma(t)$ , а СВ  $\beta_\Sigma$  имеет ПР  $f_\gamma(t) * f_2^{(*)k}(t)$ , ( $k = \overline{0, \infty}$ ), то формула (3) неприменима и необходимо воспользоваться теоремой о ФР времени пребывания системы в подмножестве непрерывных состояний с учетом непростого процесса восстановления, доказательство которой приведено в [23].

Теорема и вытекающие из нее следствия доказаны в [23].

*Теорема.* ФР разности СВ  $\alpha$  и СВ  $\beta_\Sigma = \gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$  – времени восстановления в одноименном непростом потоке, порождаемом ФР  $F_2(t)$  СВ  $\beta$  и ФР  $F_\gamma(t)$  СВ  $\gamma$  при условии, что  $\alpha > \beta_\Sigma$ , имеет вид:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t) &= P\{\alpha - \beta_k \leq t\} = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] h_2^y(y) dy}{\int_0^{\infty} \overline{F_1}(y) h_2^y(y) dy} = \\
 &= \frac{F_1(t+x_g) - F_1(x_g)}{F_1(x_g)},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где  $f_{\gamma}(t)$  и  $h_2^y(y)$  – плотность распределения СВ  $\gamma$  и плотность возобновления потока восстановлений, порождаемого СВ  $\beta$  и  $\gamma$ ;

$h_2^y(y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{\gamma}(y) * f_2^{(*)k}(y)$ , а  $x_g$  подбирается численно из соотношения (4).

*Следствие 1.* В частном случае, когда  $\alpha$  и  $\beta$  являются просто случайными величинами, и необходимо найти их разность при условии, что  $\alpha > \beta$ , получается формула (3):

$$F_{\gamma}(t) = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] dF_2(y)}{\int_0^{\infty} \overline{F_1}(t) f_2(t) dt} = \frac{F_1(t+x_g) - F_1(x_g)}{F_1(x_g)}.$$

*Следствие 2.* В случае, когда вместо СВ  $\beta$  рассматривается простой процесс восстановления, порождаемый ФР  $F_2(t)$ , то в соответствии с (3) получается формула:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha-\beta_{\Sigma}}(t) &= P\{\alpha - \beta_k \leq t\} = \frac{\int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] h_2(y) dy}{\int_0^{\infty} \overline{F_1}(x) h_2(dx)} = \\
 &= \frac{F_1(t+x_g) - F_1(x_g)}{F_1(x_g)}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

*Следствие 3.* В случае, если может произойти не более  $n$  восстановлений, то получается формула:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha-\beta\Sigma}^n(t) &= P\{\alpha - \beta_k \Big|_{\Sigma}^+ \leq t\} = \\
 &= \int_0^{\infty} [F_1(t+y) - F_1(y)] \frac{\sum_{n=1}^n \frac{f_{\gamma} \cdot f_2^{(*n)}(y) dy}{\sum_{k=1}^n P\{\alpha > (\gamma + \sum_{i=0}^n \beta)\}}} = \\
 &= \frac{F_1(t+x_g) - F_1(x_g)}{F_1(x_g)}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

На основании выражений ((2), (4)-(6)) леммы и Теоремы строится метод фазового укрупнения регенерирующих и нерегенерирующих полумарковских систем, который не включает в себя этап определения стационарного распределения ВЦМ для систем с общим фазовым пространством.

**3. Метод фазового укрупнения, не требующий определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова.** Фазовое укрупнение базируется на двух принципах.

Первый принцип заключается в том, что вид функции распределения, получающийся как разность двух случайных величин, при условии, что первая больше вычитаемой, причем вычитаемая может быть как просто СВ, так и простым или непростым процессом восстановления, остается одинаковой и определяется только константой  $x_g$ , входящей в формулы (4)-(6).

Второй принцип предполагает, что какие-то параметры системы или входящих в нее элементов остаются неизменными. Эти параметры позволяют сформировать дополнительные условия для поиска неизвестных констант, определяющих функции распределения. Так, например, для обслуживающей системы такими параметрами могут быть коэффициент готовности системы и среднее время обслуживания единицы продукции, для чего может использоваться теорема о математическом ожидании времени пребывания системы в заданном подмножестве состояний.

После введения констант  $x_{gi}$ , ( $i = \overline{1, q}$ ), где  $q$  – число состояний, система считается дискретной. Уравнения для определения искомых параметров записываются в следующем порядке.

1. Определяются времена пребывания в состояниях и соответствующие им функции распределения.
2. Определяются вероятности переходов.
3. Определяется стационарное распределение ВЦМ, что для дискретной системы не представляет сложности:

$$\rho_k = \sum_{k \in E} \rho_r \cdot p_{rk}.$$

4. Определяется стационарное распределение полумарковского процесса:

$$\pi_k = \frac{\rho_k \cdot m_k}{\sum_{k \in E} \rho_r \cdot m_{rk}}.$$

5. Составляются  $q$  дополнительных условий, которые запишем в общем виде:

$$\Pi_{zi} = \Pi_{mi}(F_q, \rho_q, \pi_q, x_{iq}), (i = \overline{1, q}), \quad (7)$$

где  $\Pi_{zi}$  – неизменный параметр;  $\Pi_{mi}(F_q, \rho_q, \pi_q, x_{iq})$  – этот же параметр, вычисленный по модели.

Система уравнений для определения параметров  $x_{qi}$ ,  $(i = \overline{1, q})$  имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_k = \sum_{k \in E} \rho_r \cdot p_{rk}, \\ \pi_k = \frac{\rho_k \cdot m_k}{\sum_{k \in E} \rho_r \cdot m_{rk}}, \\ \Pi_{zi} = \Pi_{mi}(F_q, \rho_q, \pi_q, x_{qi}), (i = \overline{1, q}). \end{cases} \quad (8)$$

Система уравнений (8) решается численно относительно параметров  $x_{qi}$ ,  $(i = \overline{1, q})$ .

**4. Пример моделирования.** Рассматриваемая система содержит две последовательно соединенные технологические ячейки (ТЯ).

Функции распределения времен наработки на отказ  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  и времен восстановления  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$  первой и второй ТЯ:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= P\{\alpha_1 < t\}, G_1(t) = P\{\beta_1 < t\}, \\ \overline{F}_1(t) &= 1 - F_1(t), \overline{G}_1(t) = 1 - G_1(t), \\ F_2(t) &= P\{\alpha_2 < t\}, G_2(t) = P\{\beta_2 < t\}, \\ \overline{F}_2(t) &= 1 - F_2(t), \overline{G}_2(t) = 1 - G_2(t). \end{aligned}$$

При отказе первой ТЯ (ТЯ<sub>1</sub>) вторая прекращает работу и наоборот, то есть – система функционирует только при исправности обеих ТЯ. Отсюда физические состояния системы:

- 1 – обе ТЯ исправны;
- 2 – отказала первая ТЯ;
- 3 – отказала вторая ТЯ (ТЯ<sub>2</sub>).

Полумарковские состояния:

– 100х – ТЯ<sub>1</sub> и ТЯ<sub>2</sub> исправны, система находится в работоспособном состоянии, последнее изменение состояния произошло в ТЯ<sub>1</sub>, которая перешла из неисправного состояния в исправное, до окончания работы ТЯ<sub>2</sub> осталось время  $x$ ;

– 200х – ТЯ<sub>1</sub> и ТЯ<sub>2</sub> исправны, система находится в работоспособном состоянии, последнее изменение состояния произошло во ТЯ<sub>2</sub>, которая перешла из неисправного состояния в исправное, до окончания работы ТЯ<sub>1</sub> осталось время  $x$ ;

– 110х – ТЯ<sub>1</sub> отказала, система находится в отказовом состоянии, до окончания работы ТЯ<sub>2</sub> осталось время  $x$  (в этом состоянии вторая ТЯ отказать не может – в ней изменений не происходит);

– 201х – ТЯ<sub>2</sub> отказала, система находится в отказовом состоянии, до окончания работы ТЯ<sub>1</sub> осталось время  $x$  (в этом состоянии первая ТЯ отказать не может – в ней изменений не происходит).

Время пребывания в состоянии 100х определяется двумя факторами: отказом ТЯ<sub>1</sub>, который происходит через время  $\alpha_1$ , и отказом ТЯ<sub>2</sub> – через время  $x$ .

Аналогично определяется время пребывания в состоянии 200х. Времена пребывания в состояниях 110х и 201х определяются временами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  восстановлений первой и второй ячеек соответственно.



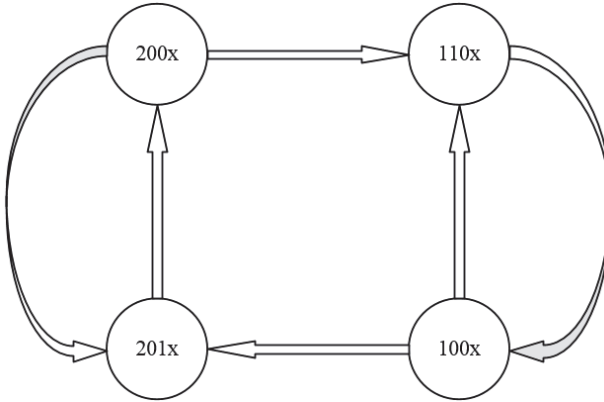


Рис. 1. Граф состояний и временная диаграмма функционирования двухфазной системы

Времена пребывания в полумарковских состояниях  $\theta$  равны:

$$\theta_{100_x} = \alpha_1 \wedge x; \theta_{200_x} = \alpha_2 \wedge x; \theta_{110_x} = \beta_1; \theta_{201_x} = \beta_2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{100_x \rightarrow 110, x - \alpha_1\} = \{\alpha_1 < x\}; \\ \{100_x \rightarrow 201, \alpha_1 - x\} = \{\alpha_1 > x\}; \\ \{200_x \rightarrow 201, x - \alpha_2\} = \{\alpha_2 < x\}; \\ \{200_x \rightarrow 110, \alpha_2 - x\} = \{\alpha_2 > x\}; \\ \{201_x \rightarrow 200_x\} = \{\beta_2 < t\}; \\ \{110_x \rightarrow 100_x\} = \{\beta_1 < t\}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Функции распределения времен пребывания в состояниях равны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{G}_{100_x}(t) = P\{\alpha_1 \wedge x > t\} = \bar{F}_1(t)\bar{I}_x(t) = \begin{cases} \bar{F}_1(t), t < x; \\ 0, t \geq x; \end{cases} \\ \bar{G}_{200_x}(t) = P\{\alpha_2 \wedge x > t\} = \bar{F}_2(t)\bar{I}_x(t) = \begin{cases} \bar{F}_2(t), t < x; \\ 0, t \geq x; \end{cases} \\ \bar{G}_{110_x}(t) = \bar{G}_1(t); \\ \bar{G}_{201_x}(t) = \bar{G}_2(t); \end{array} \right. ,$$

где  $\bar{I}_x(t) = I_x(t - x)$  — единичное распределение в точке  $x$ .

Выражения для плотностей вероятностей перехода вложенной цепи Маркова:

$$\begin{cases} p_{100_x,110dy} = P\{100_x \rightarrow 110, x - \alpha_1 \in dy\} = P\{\alpha_1 \in x - dy\} = F_1(x - dy); \\ p_{100_x,201dy} = P\{100_x \rightarrow 201, \alpha_1 - x \in dy\} = P\{\alpha_1 \in x + dy\} = F_1(x + dy); \\ p_{200_x,201dy} = P\{200_x \rightarrow 201, x - \alpha_2 \in dy\} = P\{\alpha_2 \in x - dy\} = F_2(x - dy); \\ p_{200_x,110dy} = P\{200_x \rightarrow 110, \alpha_2 - x \in dy\} = P\{\alpha_2 \in x + dy\} = F_2(x + dy). \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{110_x,100_x} = 1; \\ P_{201_x,200_x} = 1. \end{cases}$$

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова:

$$\begin{cases} \rho_{110}(x) = \int_x^\infty f_1(y-x)\rho_{100}(y)dy + \int_0^\infty f_2(y+x)\rho_{200}(y)dy; \\ \rho_{201}(x) = \int_0^\infty f_1(y+x)\rho_{100}(y)dy + \int_x^\infty f_2(y-x)\rho_{200}(y)dy; \\ \rho_{100}(x) = \rho_{110}(x); \\ \rho_{200}(x) = \rho_{201}(x). \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} \rho_{100}(x) = \rho_{110}(x) = \rho_0 \overline{F_2}(x); \\ \rho_{200}(x) = \rho_{201}(x) = \rho_0 \overline{F_1}(x). \end{cases}$$

$\rho_0$  возможно получить из условия нормировки  $\int_x \rho(dx) = 1$ .

Подмножества состояний:

$$\begin{cases} M_+ = \{100_x, 200_x, x \geq 0\}; \\ M_- = \{110_x, 201_x, x \geq 0\}. \end{cases}$$

Для перехода к дискретной системе используется алгоритм фазового укрупнения (АФУ).

Необходимо определить вероятности переходов, стационарное распределение ВЦМ и ФР времен пребывания системы в дискретных состояниях  $S_{100}$  и  $S_{200}$  системы по формулам [19]:

$$\hat{P}_{k,r} = \frac{\int_{E_k}^{\infty} \rho(dx)P(x, E_r)}{\rho(E_k)}, \quad (10)$$

$$\hat{F}_{k,r} = \frac{\int_{E_k}^{\infty} \rho(dx)F_x(t)}{\rho(E_k)}. \quad (11)$$

Для состояния  $S_{200}$ :

$$\rho_{200} = \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{F}_1(x) dx = \rho_0 m_{\alpha_1},$$

$$P_{200}^{101} = 1 - \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_1(x)F_2(x) dx}{m_{\alpha_1}}.$$

$$P_{200}^{101} = \frac{\rho_0 \int_0^x \int_0^x f_2(x-y) \bar{F}_1(x) dy dx}{\rho_0 m_{\alpha_1}} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_1(x) dx \int_0^x f_2(x-y) dy}{m_{\alpha_1}} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} z = x - y \\ dz = -dy \\ y = 0 : z = x \\ y = x : z = 0 \end{array} \right] = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_1(x) dx \int_0^x f_2(z) dz}{m_{\alpha_1}} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_1(x) F_2(x) dx}{m_{\alpha_1}}.$$

Найдем ФР времени пребывания системы в дискретном состоянии  $S_{200}$ , используя (11):

$$\hat{F}_{200}(t) = \frac{\rho_0 \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) dy [1 - \bar{I}_x(t) \bar{F}_2(t)] dx}{\rho_0 m_{\alpha_1}} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) dy [1 - \bar{I}_x(t) \bar{F}_2(t)] dx}{m_{\alpha_1}}.$$

Рассмотрим числитель:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) dy [1 - \bar{I}_x(t) \bar{F}_2(t)] dx &= \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) dy - \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) dy [\bar{I}_x(t) \bar{F}_2(t)] dx = \\ &= m_{\alpha_1} - \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) \bar{F}_2(t) dy + \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) \bar{I}_x(t) \bar{F}_2(t) dy = \\ &= m_{\alpha_1} - m_{\alpha_1} \bar{F}_2(t) + \int_0^t \bar{F}_1(y) \bar{F}_2(t) dy = m_{\alpha_1} \bar{F}_2(t) + \bar{F}_2(t) \int_0^t \bar{F}_1(y) dy. \end{aligned}$$

Тогда  $\hat{F}_{200}(t)$  равна:

$$\hat{F}_{200}(t) = \frac{m_{\alpha_1} \bar{F}_2(t) + \bar{F}_2(t) \int_0^t \bar{F}_1(y) dy}{m_{\alpha_1}}.$$

Для состояния  $S_{100}$ :

$$\begin{aligned} \rho_{100} &= \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) dx = \rho_0 m_{\alpha_2}, \\ P_{100}^{101} &= \frac{\rho_0 \int_0^{\infty} \int_0^x f_1(x-y) \bar{F}_2(x) dy dx}{\rho_0 m_{\alpha_2}} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) dx \int_0^x f_1(x-y) dy}{m_{\alpha_2}} = \\ &= \left[ \begin{array}{l} z = x - y \\ dz = -dy \\ y = 0 : z = x \\ y = x : z = 0 \end{array} \right] = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) dx \int_0^x f_1(z) dz}{m_{\alpha_2}} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) F_1(x) dx}{m_{\alpha_2}}, \\ P_{100}^{201} &= 1 - \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) F_1(x) dx}{m_{\alpha_2}}. \end{aligned}$$

Найдем ФР времени пребывания системы в дискретном состоянии  $S_{100}$ , используя (11):

$$\hat{F}_{100}(t) = \frac{\rho_0 \int_0^{\infty} \bar{F}_2(y) dy [1 - \bar{I}_x(t) \bar{F}_1(t)] dx}{\rho_0 m_{\alpha_2}} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_2(y) dy [1 - \bar{I}_x(t) \bar{F}_1(t)] dx}{m_{\alpha_2}}.$$

Рассмотрим числитель:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{F}_2(y) dy [1 - \bar{I}_x(t) \bar{F}_1(t)] dx &= \int_0^{\infty} \bar{F}_2(y) dy - \int_0^{\infty} \bar{F}_2(y) dy [\bar{I}_x(t) \bar{F}_1(t)] dx = \\ &= m_{\alpha_2} - \int_0^{\infty} \bar{F}_2(y) \bar{F}_1(t) dy + \int_0^{\infty} \bar{F}_2(y) \bar{I}_x(t) \bar{F}_1(t) dy = \\ &= m_{\alpha_2} - m_{\alpha_2} \bar{F}_1(t) + \int_0^t \bar{F}_2(y) \bar{F}_1(t) dy = m_{\alpha_2} \bar{F}_1(t) + \bar{F}_1(t) \int_0^t \bar{F}_2(y) dy. \end{aligned}$$

Тогда  $\hat{F}_{100}(t)$  равна:

$$\hat{F}_{100}(t) = \frac{m_{\alpha_2} \bar{F}_1(t) + \bar{F}_1(t) \int_0^t \bar{F}_2(y) dy}{m_{\alpha_2}}.$$

После определения вероятностей переходов  $\hat{P}_{k,r}$  и ФР  $\hat{F}_k(t)$  времен пребывания системы в дискретных состояниях нахождение стационарного распределения  $\hat{\rho}_k$  ВЦМ для укрупненной системы не вызывает трудностей, оно определяется по формуле:  $\hat{\rho}_k = \sum_{k \in E} \hat{\rho}_r \cdot \hat{P}_{k,r}$ .

Таким образом, классическим методом [19] был осуществлен переход к эквивалентной системе с дискретными состояниями. Граф такой системы представлен на рисунке 2. Как видно из рисунка 2, у состояний графа отсутствуют непрерывные компоненты, то есть система является дискретной.

Рассмотрим решение задачи укрупнения этой же системы численным методом, предлагаемым в данной статье.

В приведенной укрупненной системе (рис. 1) имеются две непрерывные компоненты. Запишем два дополнительных условия, необходимых для их определения. Собственно говоря, составление дополнительных уравнений (условий) является наиболее ответственным этапом моделирования. Каждое условие, как указано

выше, связано с неизменяющимся параметром, которыми в данном конкретном случае являются коэффициенты готовности  $K_{\text{зд}}$  первого и второго производственных элементов. Эти величины равны:

$$K_{\text{зд}1} = \frac{m_1}{m_1 + m_{\text{г}1}}, K_{\text{зд}2} = \frac{m_2}{m_2 + m_{\text{г}2}}.$$

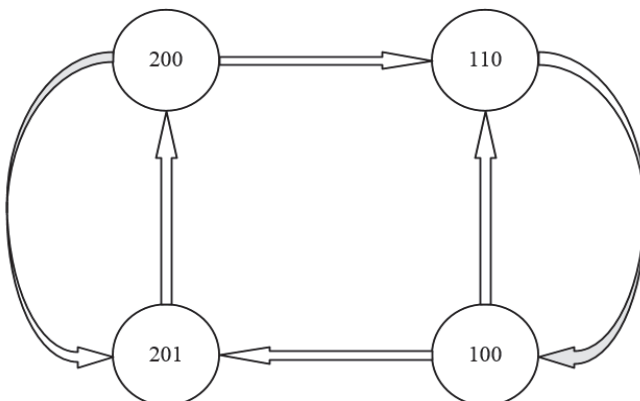


Рис. 2. Граф состояний системы с дискретными состояниями

Определим эти же параметры из укрупненной полумарковской модели. Сумма вероятностей состояний  $(\pi_{100} + \pi_{200} + \pi_{201})$  в которых ТЯ<sub>1</sub> работоспособна, представляет собой вероятность того, что ТЯ<sub>1</sub> работоспособна при условии, что обе ТЯ одновременно отказать не могут, то есть она является условной вероятностью. Вероятность  $P_{\text{раб}}$  того, что обе ТЯ не отказали, равна:

$$P_{\text{раб}} = (1 - (1 - K_{\text{зд}1})(1 - K_{\text{зд}2})).$$

Тогда:

$$(\pi_{100} + \pi_{200} + \pi_{201}) = \frac{K_{\text{з}1}}{P_{\text{раб}}} = \frac{K_{\text{з}1}}{(1 - (1 - K_{\text{зд}1})(1 - K_{\text{зд}2}))}.$$

Откуда:

$$K_{\text{з}1} = (\pi_{100} + \pi_{200} + \pi_{201})(1 - (1 - K_{\text{зд}1})(1 - K_{\text{зд}2})).$$

Аналогично:

$$K_{\text{з}2} = (\pi_{200} + \pi_{100} + \pi_{110})(1 - (1 - K_{\text{зд}1})(1 - K_{\text{зд}2})).$$

Тогда дополнительные условия имеют вид:

$$(\pi_{100} + \pi_{200} + \pi_{201})(1 - (1 - K_{\varepsilon\partial 1})(1 - K_{\varepsilon\partial 2})) = \frac{m_1}{m_1 + m_{g1}};$$

$$(\pi_{200} + \pi_{100} + \pi_{110})(1 - (1 - K_{\varepsilon\partial 1})(1 - K_{\varepsilon\partial 2})) = \frac{m_2}{m_2 + m_{g2}}.$$

Далее определяем выражения для  $\rho_k$  и  $\pi_k$  по формулам:

$$\rho_k = \sum_{r \in E} \rho_r \cdot p_{rk}; \pi_k = \frac{\rho_k \cdot m_k}{\sum_{r \in E} \rho_r \cdot m_{rk}}.$$

После проведенных выкладок запишем систему уравнений, которой должны удовлетворять искомые параметры  $x_{e1}$  и  $x_{e2}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{100} = \frac{P_{200}^{110}}{2(P_{200}^{110} + P_{100}^{201})} \\ \rho_{110} = \rho_{100} \\ \rho_{200} = \frac{P_{100}^{201}}{2(P_{200}^{110} + P_{100}^{201})} \\ \rho_{201} = 1 - \rho_{100} - \rho_{200} - \rho_{110} \\ \pi_{100} = \frac{\rho_{100} m_{100}}{\rho_{100} m_{100} + \rho_{201} m_{201} + \rho_{200} m_{200} + \rho_{110} m_{110}} \\ \pi_{200} = \frac{\rho_{200} m_{200}}{\rho_{100} m_{100} + \rho_{201} m_{201} + \rho_{200} m_{200} + \rho_{110} m_{110}} \\ \pi_{201} = \frac{\rho_{201} m_{201}}{\rho_{100} m_{100} + \rho_{201} m_{201} + \rho_{200} m_{200} + \rho_{110} m_{110}} \\ \pi_{110} = \frac{\rho_{110} m_{110}}{\rho_{100} m_{100} + \rho_{201} m_{201} + \rho_{200} m_{200} + \rho_{110} m_{110}} \\ (\pi_{100} + \pi_{200} + \pi_{201})(1 - (1 - K_{\varepsilon\partial 1})(1 - K_{\varepsilon\partial 2})) = \frac{m_1}{m_1 + m_{g1}} \\ (\pi_{200} + \pi_{100} + \pi_{110})(1 - (1 - K_{\varepsilon\partial 1})(1 - K_{\varepsilon\partial 2})) = \frac{m_2}{m_2 + m_{g2}} \end{array} \right. , \quad (12)$$

где  $P_{100}^{201}$ ,  $P_{100}^{201}$  – вероятности перехода из состояния  $S_{100}$  в состояние  $S_{201}$  и из  $S_{200}$  в состояние  $S_{110}$ .

Эти вероятности равны:

$$P_{100}^{201} = \int_0^{\infty} \hat{F}_2(t, x_{e_2}) f_1(t) dt; P_{200}^{110} = \int_0^{\infty} \hat{F}_1(t, x_{e_1}) f_2(t) dt,$$

где  $\hat{F}_1(t, x_{e_1})$ ,  $\hat{F}_2(t, x_{e_2})$  – функции распределения СВ, определяющиеся на каждом шаге по формулам:

$$\hat{F}(t, x_{e_1}) = \frac{F_1(t + x_{e_1}) - F_1(x_{e_1})}{1 - F_1(x_{e_1})},$$

$$\hat{F}(t, x_{e_2}) = \frac{F_1(t + x_{e_2}) - F_1(x_{e_2})}{1 - F_1(x_{e_2})}.$$

Численно решив систему уравнений (12), получаем  $x_{e_1}$  и  $x_{e_2}$ , а также  $\hat{P}_{200}^{201}$ ,  $\hat{P}_{100}^{110}$ ,  $\hat{\rho}_{100}$ ,  $\hat{\rho}_{110}$ ,  $\hat{\rho}_{200}$  и  $\hat{\rho}_{201}$  для укрупненной системы.

Соответственно, функции распределения времен пребывания системы в состояниях будут равны:

$$\begin{cases} \hat{F}_{100}(t) = 1 - \overline{F}_1(t) \overline{F}_2(t, x_{e_2}), \\ \hat{F}_{110}(t) = G_1(t), \\ \hat{F}_{200}(t) = 1 - \overline{F}_2(t) \overline{F}_1(t, x_{e_2}), \\ \hat{F}_{201}(t) = G_2(t). \end{cases}$$

Найдем функции распределения времени наработки на отказ и восстановление всей системы, для чего воспользуемся формулой смеси, где коэффициентами взвеси будут служить условные вероятности удельных частот попадания в состояния  $\hat{\rho}_{100}$  и  $\hat{\rho}_{200}$  для наработки на отказ,  $\hat{\rho}_{110}$  и  $\hat{\rho}_{201}$  – для времени восстановления:



$$F_p(t) = \hat{F}_{100}(t) \frac{\hat{\rho}_{100}}{\hat{\rho}_{100} + \hat{\rho}_{200}} + \hat{F}_{200}(t) \frac{\hat{\rho}_{200}}{\hat{\rho}_{100} + \hat{\rho}_{200}},$$

$$F_m(t) = \hat{F}_{110}(t) \frac{\hat{\rho}_{110}}{\hat{\rho}_{110} + \hat{\rho}_{201}} + \hat{F}_{201}(t) \frac{\hat{\rho}_{201}}{\hat{\rho}_{110} + \hat{\rho}_{201}}.$$

Коэффициент готовности такой системы равен:

$$K_g = \frac{mF_p(t)}{mF_p(t) + mF_m(t)}.$$

**4. Результаты моделирования.** Исходными данными для моделирования служат ФР  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ ,  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$ , распределенные по закону Эрланга второго порядка с параметрами  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ . Причем:

$$f_1(t) = \frac{\nu_1 \nu_2 (e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t})}{\nu_2 - \nu_1},$$

где  $\nu_1=2.00$  (ч<sup>-1</sup>);  $\nu_2=0.05$  (ч<sup>-1</sup>);

$$f_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где  $\lambda_1=2$  (ч<sup>-1</sup>);  $\lambda_2=0.1$  (ч<sup>-1</sup>);

$$g_1(t) = \frac{\mu_1 \mu_2 (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t})}{\mu_2 - \mu_1},$$

где  $\mu_1=2$  (ч<sup>-1</sup>);  $\mu_2=0.18$  (ч<sup>-1</sup>);

$$g_2(t) = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t})}{\gamma_2 - \gamma_1},$$

где  $\gamma_1=1$  (ч<sup>-1</sup>);  $\gamma_2=0.5$  (ч<sup>-1</sup>).



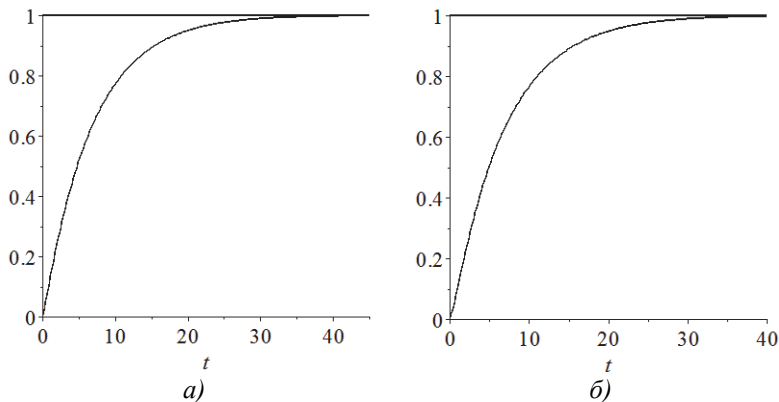


Рис. 3. Результаты моделирования – функций  $\hat{F}_{100}(t)$  и  $\hat{F}_{200}(t)$  времени пребывания в состояниях (а)  $S_{100}$  и (б)  $S_{200}$  при использовании классического и предложенного методов

Таблица 1. Сравнительная оценка укрупненных характеристик классическим и предлагаемым методами

Укрупненные характеристики	Классический метод	Предлагаемый метод	Погрешность, %
$P_{200}^{110}$	0.3492016279047807899681785	0.349201627904780789968178	$1.391 \cdot 10^{-22}$
$P_{200}^{201}$	0.6507983720952192100318215	0.6507983720952192100318210	$7.467 \cdot 10^{-23}$
$P_{100}^{110}$	0.3182253931382851243478423	0.3182253931382851243478418	$1.515 \cdot 10^{-22}$
$P_{100}^{201}$	0.6817746068617148756521577	0.6817746068617148756521581	$7.068 \cdot 10^{-23}$
$\rho_{100} = \rho_{110}$	0.1693548387096774193548387	0.1693548387096774193548388	$8.241 \cdot 10^{-23}$
$\rho_{200} = \rho_{201}$	0.3306451612903225806451613	0.3306451612903225806451611	$4.221 \cdot 10^{-23}$
$K_{e1}$	0.7719665271966527196652719	0.7719665271966527196652718	$1.989 \cdot 10^{-23}$
$K_{e2}$	0.7777777777777777777777777777777	0.7777777777777777777777777777778	$2.857 \cdot 10^{-24}$

На рисунке 4 приведены результаты моделирования ФР  $\hat{F}_p(t)$  и  $\hat{F}_m(t)$  времени наработки на отказ и восстановление системы, полученные предлагаемым и классическим методами.

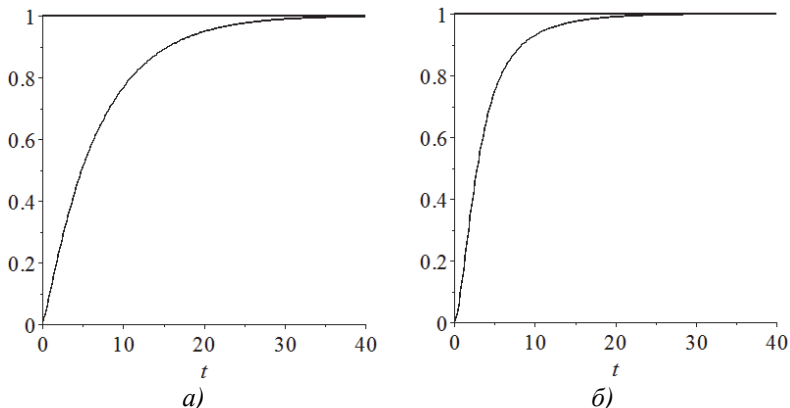


Рис. 4. Результаты моделирования функций (а)  $\hat{F}_p(t)$  и (б)  $\hat{F}_m(t)$  распределения времени наработки на отказ и восстановления системы при использовании классического и предложенного метода

Представленный пример моделирования системы, состоящей из двух последовательно соединенных ячеек, показывает корректность предложенного метода для конкретного примера. Результаты моделирования классическим и предложенным методами продемонстрировали практически полное совпадение искомых величин.

**5. Заключение.** Рассмотрен метод фазового укрупнения полумарковских систем, не требующий определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Данный метод строится на приведенной лемме и теореме о функции распределения разности двух случайных величин, причем вторая порождена непростым потоком восстановления. Использование метода фазового укрупнения полумарковских систем, не требующего определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова, демонстрируется на примере моделирования технической системы, которая состоит из двух последовательно соединенных технологических ячеек, при условии, что одновременно отказать обе ячейки не могут. Определены вероятности переходов, стационарное распределение, коэффициенты готовности первого и второго элементов, а также функции распределения времен пребывания в укрупненных состояниях и подмножестве работоспособных и неработоспособных состояниях. Произведено сравнение полученных результатов предложенным методом с классическим методом фазового укрупнения полумарковских систем. Сравнение показало полное совпадение искомых величин. Предлагаемый метод фазового укрупнения

полумарковских систем в совокупности с методом траекторий [13] позволяет автоматизировать процесс создания полумарковских моделей для анализа стохастических систем, что дает возможность в дальнейших исследованиях приступить к созданию программного комплекса автоматизированного построения полумарковских моделей и получения результатов моделирования.

### Литература

1. *Королюк В.С.* Стохастические модели систем // Наукова думка. 1989. 208 с.
2. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надёжности систем // Наукова думка. 1982. 236 с.
3. *Obzherin Yu.E., Boyko E.G.* Semi-Markov Models: Control of Restorable Systems with Latent Failures // Academic Press. 2015. 212 p.
4. *Obzherin Yu.E., Sidorov S.M., Fedorenko S.N.* Analysis of the time reserve influence on the technological cell productivity // International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2017). vol. 129. 2017. pp. 03009.
5. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.I.* Methods for analysis of queueing models with instantaneous and delayed feedbacks // International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling. 2015. pp. 185–199.
6. *Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M.* Methods for analysis of multi-channel queueing models with instantaneous and delayed feedbacks // Cybernetics and System Analysis. 2016. vol 52. no. 1. pp. 58–70.
7. *Liang C., Luh H.* Efficient method for solving a two-dimensional Markov chain model for call centers // Industrial Management & Data Systems. 2015. pp. 901–922.
8. *Ushakov I.A.* Probabilistic Reliability Models // John Wiley & Sons. 2012. 211 p.
9. *Yao D.D., Buzacott J.A.* Flexible Manufacturing Systems: A Review of Analytical Models // Management Science. 1986. vol. 32. pp. 890–905.
10. *Smith M.G.J., Tan B.* Handbook of Stochastic Models and Analysis of Manufacturing System Operations // Springer-Verlag: New York. 2013.
11. *Curry G.L., Feldman R.M.* Manufacturing Systems Modeling and Analysis, 2nd Edition // Spring Science & Business Media. 2010. 338 p.
12. *Limnios N., Nikulin M.* Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice, and Inference // Springer: Science & Business Media. 2000. 514 p.
13. *Limnios N., Oprisan G.* Semi-Markov Processes and Reliability // Springer Science & Business Media. 2012. 286 p.
14. *Jansen J., Limnios N.* Semi-Markov Models and Applications // Springer Science & Business Media. 2013. 295 p.
15. *Korolyuk V.S., Swishchuk A.* Semi-Markov Random Evolutions // Dordrecht. 1995. pp. 59–91.
16. *Korolyuk V.S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space // World Scientific. 2005.
17. *Silvestrov D., Silvestrov S.* Nonlinearly Perturbed Semi-Markov Processes // Springer International Publishing. 2017. p. 143.
18. *Zamoryonov M.V., Kopp V.Ya., Chengar O.V., Rapatskiy Yu.L.* Simulation of a single-component system using the trajectories method taking into account the scheduling preventive maintenance // Computer Science On-line Conference 2017 (CSOC2017). 2017. pp. 264–271.
19. *Заморёнов М.В., Копп В.Я., Заморёнова Д.В., Скидан А.А.* Моделирование процесса функционирования обслуживающего устройства с

- необесценивающимися отказами методом путей // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. № 4. С. 71–82.
20. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Фазовое укрупнение сложных систем // Киев: Вища школа. 1978. 112 с.
  21. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход // М.: Радио и связь. 1988. 392 с.
  22. *Обжерин Ю.Е., Бойко Е.Г., Сидоров С.М.* Производительность технологической ячейки с мгновенно пополняемым резервом времени // Прикладные задачи математики. 2015. С. 159–163.
  23. *Kopp V.Ja, Zamorynov M.V., Chalenkov N.I.* The numerical method of the phase integration of non-regenerating semi-Markov systems // Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems. 2018. pp. 3–15.

**Копп Вадим Яковлевич** — д-р техн. наук, профессор, кафедра приборных систем и автоматизации технологических процессов, Севастопольский государственный университет (СевГУ). Область научных интересов: математическое моделирование, стохастические модели систем, автоматизация технологических процессов, многократные измерения. Число научных публикаций — 104. v\_kopp@mail.ru; ул. Университетская, 33, 299053, Севастополь, Россия; р.т.: +7(978)742-00-07.

**Заморёнов Михаил Вадимович** — канд. техн. наук, доцент, кафедра информационных технологий и компьютерных систем, Севастопольский государственный университет (СевГУ). Область научных интересов: математическое моделирование, стохастические модели систем, схемотехника. Число научных публикаций — 65. zamoryonoff@gmail.com; ул. Университетская, 33, 299053, Севастополь, Россия; р.т.: +7(978)742-00-03.

**Чаленков Никита Игоревич** — аспирант, кафедра приборных систем и автоматизации технологических процессов, Севастопольский государственный университет (СевГУ). Область научных интересов: математическое моделирование, стохастические системы, разработка мехатронных систем. Число научных публикаций — 12. chalenkov-nikita@yandex.ru; ул. Университетская, 33, 299053, Севастополь, Россия; р.т.: +7(978)711-56-50.

**Скатков Иван Александрович** — канд. техн. наук, доцент, кафедра приборных системы и автоматизация технологических процессов, Севастопольский государственный университет (СевГУ). Область научных интересов: информатика, программирование, численные методы, математическое моделирование. Число научных публикаций — 14. sks144@yandex.ru; ул. Университетская, 33, 299053, Севастополь, Россия; р.т.: +7(978)829-92-73.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00704-а).

V. KOPP, M. ZAMORYONOV, N. CHALENKOV, I. SKATKOV  
**PHASE ENLARGEMENT OF SEMI-MARKOV SYSTEMS  
WITHOUT DETERMINING STATIONARY DISTRIBUTION OF  
EMBEDDED MARKOV CHAIN**

---

*Kopp V., Zamoryonov M., Chalenkov N., Skatkov I.* **Phase Enlargement of Semi-Markov Systems without Determining Stationary Distribution of Embedded Markov Chain.**

**Abstract.** A phase enlargement of semi-Markov systems that does not require determining stationary distribution of the embedded Markov chain is considered. Phase enlargement is an equivalent replacement of a semi-Markov system with a common phase state space by a system with a discrete state space. Finding the stationary distribution of an embedded Markov chain for a system with a continuous phase state space is one of the most time-consuming and not always solvable stage, since in some cases it leads to a solution of integral equations with kernels containing sum and difference of variables.

For such equations there is only a particular solution and there are no general solutions to date. For this purpose a lemma on a type of a distribution function of the difference of two random variables, provided that the first variable is greater than the subtracted variable, is used.

It is shown that the type of the distribution function of difference of two random variables under the indicated condition depends on one constant, which is determined by a numerical method of solving the equation presented in the lemma.

Based on the lemma, a theorem on the difference of a random variable and a complicated recovery flow is built up. The use of this method is demonstrated by the example of modeling a technical system consisting of two series-connected process cells, provided that both cells cannot fail simultaneously. The distribution functions of the system residence times in enlarged states, as well as in a subset of working and non-working states, are determined. The simulation results are compared by the considered and classical method proposed by V. Korolyuk, showed the complete coincidence of the sought quantities.

**Keywords:** Semi-Markov System, Phase Enlargement Algorithm, Distribution Function, Continuous States, Dwelling Time in States; Transition Probability Density; Embedded Markov Chain.

---

**Kopp Vadim** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Department of Instrument Systems and Automation of Technological Processes, Sevastopol State University (SevSU). Research interests: mathematical modeling, stochastic models of systems, automation of technological processes, multiple measurements. The number of publications — 104. v.kopp@mail.ru; 33, Universitetskaya str., 299053, Sevastopol, Russia; office phone: +7(978)742-00-07.

**Zamoryonov Mikhail** — Ph.D., Associate Professor, Department of Information Technology and Computer Systems, Sevastopol State University (SevSU). Research interests: mathematical modeling, stochastic models of systems, circuitry. The number of publications — 65. zamoryonoff@gmail.com; 33, Universitetskaya str., 299053, Sevastopol, Russia; office phone: +7(978)742-00-03.

**Chalenkov Nikita** — Ph.D. Student, Department of Instrument Systems and Automation of Technological Processes, Sevastopol State University (SevSU). Research interests: mathematical modeling, stochastic systems, development of mechatronic systems. The number of publications — 12. chalenkov-nikita@yandex.ru; 33, Universitetskaya str., 299053, Sevastopol, Russia; office phone: +7(978)711-56-50.

**Skatkov Ivan** — Ph.D., Associate Professor, Department of Instrument Systems and Automation of Technological Processes, Sevastopol State University (SevSU). Research interests: computer science, programming, numerical methods, mathematical modeling. The number of publications — 14. sks144@yandex.ru; 33, Universitetskaya str., 299053, Sevastopol, Russia; office phone: +7(978)829-92-73.

**Acknowledgements.** This research is supported by RFBR (grant 19-01-00704-a).

## References

1. Korolyuk V.S. *Stokhasticheskie modeli sistem* [Stochastic models of systems]. Naukova dumka. 1989. 208 p. (In Russ.).
2. Korolyuk V.S., Turbin A.F. *Processy markovskogo vosstanovleniya v zadachah nadyozhnosti sistem* [Markov recovery processes in the problems of system reliability]. Naukova dumka. 1982. 236 p. (In Russ.).
3. Obzherin Yu.E., Boyko E.G. *Semi-Markov Models: Control of Restorable Systems with Latent Failures*. Academic Press. 2015. 212 p.
4. Obzherin Yu.E., Sidorov S.M., Fedorenko S.N. Analysis of the time reserve influence on the technological cell productivity. International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2017). vol. 129. 2017. pp. 03009.
5. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.Ā. Methods for analysis of queueing models with instantaneous and delayed feedbacks. International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling. 2015. pp. 185–199.
6. Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Methods for analysis of multi-channel queueing models with instantaneous and delayed feedbacks. *Cybernetics and System Analysis*. 2016. vol 52. no. 1. pp. 58–70.
7. Liang C., Luh H. Efficient method for solving a two-dimensional Markov chain model for call centers. *Industrial Management & Data Systems*. 2015. pp. 901–922.
8. Ushakov I.A. *Probabilistic Reliability Models*. John Wiley & Sons. 2012. 211 p.
9. Yao D.D., Buzacott J.A. *Flexible Manufacturing Systems: A Review of Analytical Models*. *Management Science*. 1986. vol. 32. pp. 890–905.
10. Smith M.G J., Tan B. *Handbook of Stochastic Models and Analysis of Manufacturing System Operations*. Springer-Verlag: New York. 2013.
11. Curry G.L., Feldman R.M. *Manufacturing Systems Modeling and Analysis*, 2nd Edition. Springe Science & Business Media. 2010. 338 p.
12. Limnios N., Nikulin M. *Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice, and Inference*. Springer: Science & Business Media. 2000. 514 p.
13. Limnios N., Oprisan G. *Semi-Markov Processes and Reliability*. Springer Science & Business Media. 2012. 286 p.
14. Jansen J., Limnios N. *Semi-Markov Models and Applications*. Springer Science & Business Media. 2013. 295 p.
15. Korolyuk V.S., Swishchuk A. *Semi-Markov Random Evolutions*. Dordrecht. 1995. pp. 59–91.
16. Korolyuk V.S., Limnios N. *Stochastic Systems in Merging Phase Space*. World Scientific. 2005.
17. Silvestrov D., Silvestrov S. *Nonlinearly Perturbed Semi-Markov Processes*. Springer International Publishing. 2017. p. 143.
18. Zamoryonov M.V., Kopp V.Ya., Chengar O.V., Rapatskiy Yu.L. Simulation of a single-component system using the trajectories method taking into account the scheduling preventive maintenance. Computer Science On-line Conference 2017 (CSOC2017). 2017. pp. 264–271.



19. Zamorenov M.V., Kopp V.Ya., Zamorenova D.V., Skidan A.A. [Modeling the process of functioning of a service device with non-depreciating failures by the path method]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki. – News of Tula State University. Technical science.* 2016. vol. 4. pp. 71–82. (In Russ.).
20. Korolyuk V.S., Turbin A.F. *Fazovoe ukрупnenie slozhnyh sistem* [Phase enlargement of complex systems]. Kiev: Vishcha shkola. 1978. 112 p. (In Russ.).
21. Baykhelt F., Franken P. *Nadezhnost' i tekhnicheskoe obsluzhivanie. Matematicheskij podhod* [Reliability and maintenance. The mathematical approach]. M.: Radio i svyaz. 1988. 392 p. (In Russ.).
22. Obzherin Yu.E., Boyko E.G., Sidorov S.M. [Process cell productivity with instantly replenished time reserve]. *Prikladnye zadachi matematiki – Applied Mathematics.* 2016. pp. 159–163. (In Russ.).
23. Kopp V.Ja, Zamorynov M.V., Chalencov N.I. The numerical method of the phase integration of non-regenerating semi-Markov systems. Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems. 2018. pp. 3–15.