

ISSN 2713-3192  
DOI 10.15622/ia.20.1  
<http://ia.spcras.ru>

ТОМ 20 № 1

ИНФОРМАТИКА  
И АВТОМАТИЗАЦИЯ

INFORMATICS  
AND AUTOMATION



СПб ФИЦ РАН

Санкт-Петербург  
2021

# INFORMATICS AND AUTOMATION

Volume 20 № 1, 2021

Scientific and educational journal primarily specialized in computer science, automation, robotics, applied mathematics, interdisciplinary research

Founded in 2002

---

## Founder and Publisher

St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS)

---

## Editor-in-Chief

**R. M. Yusupov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, St. Petersburg, Russia

---

## Editorial Council

<b>A. A. Ashimov</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan
<b>N. P. Veselkin</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, St. Petersburg, Russia
<b>I. A. Kalyaev</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, Taganrog, Russia
<b>Yu. A. Merkurjev</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of the Latvian Academy of Sciences, Riga, Latvia
<b>A. I. Rudskoi</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, St. Petersburg, Russia
<b>V. Sgurev</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria
<b>B. Ya. Sovetov</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAE, St. Petersburg, Russia
<b>V. A. Soyfer</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, Samara, Russia

---

## Editorial Board

<b>O. Yu. Gusikhin</b>	Ph. D., Dearborn, USA
<b>V. Delic</b>	Prof., Dr. Sci., Novi Sad, Serbia
<b>A. Dolgui</b>	Prof., Dr. Sci., St. Etienne, France
<b>M. N. Favorskaya</b>	Prof., Dr. Sci., Krasnoyarsk, Russia
<b>M. Zelezny</b>	Assoc. Prof., Ph.D., Plzen, Czech Republic
<b>H. Kaya</b>	Assoc. Prof., Ph.D., Utrecht, Netherlands
<b>A. A. Karpov</b>	Assoc. Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>S. V. Kuleshov</b>	Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>A. D. Khomonenko</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>D. A. Ivanov</b>	Prof., Dr. Habil., Berlin, Germany
<b>K. P. Markov</b>	Assoc. Prof., Ph.D., Aizu, Japan
<b>R. V. Meshcheryakov</b>	Prof., Dr. Sci., Moscow, Russia
<b>N. A. Moldovian</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>V. Yu. Osipov</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>V. K. Pshikhopov</b>	Prof., Dr. Sci., Taganrog, Russia
<b>A. L. Ronzhin</b>	Prof., Dr. Sci., Deputy Editor-in-Chief, St. Petersburg, Russia
<b>H. Samani</b>	Assoc. Prof., Ph.D., Plymouth, UK
<b>V. Skormin</b>	Prof., Ph.D., Binghamton, USA
<b>A. V. Smirnov</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>B. V. Sokolov</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia

---

**Editor:** E. P. Miroshnikova

**Technical editor:** M. S. Avstriyskaya

**Interpreter:** E.N. Mesheryakova

---

## Editorial office address

14-th line V.O., 39, SPIIRAS, St. Petersburg, 199178, Russia,

e-mail: [ia@spcras.ru](mailto:ia@spcras.ru), web: <http://ia.spcras.ru>

**The journal is indexed in Scopus**

The journal is published under the scientific-methodological supervision of Department for Nanotechnology and Information Technology of the Russian Academy of Sciences  
© St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, 2021

# ИНФОРМАТИКА И АВТОМАТИЗАЦИЯ

Том 20 № 1, 2021

Научный, научно-образовательный журнал с базовой специализацией  
в области информатики, автоматизации, робототехники, прикладной математики  
и междисциплинарных исследований.

Журнал основан в 2002 году

---

## Учредитель и издатель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
«Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук»  
(СПб ФИЦ РАН)

---

## Главный редактор

**Р. М. Юсупов**, чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

---

## Редакционный совет

<b>А. А. Ашимов</b>	академик Национальной академии наук Республики Казахстан, д-р техн. наук, проф., Алматы, Казахстан
<b>Н. П. Веселкин</b>	академик РАН, д-р мед. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
<b>И. А. Каляев</b>	академик РАН, д-р техн. наук, проф., Таганрог, РФ
<b>Ю. А. Меркурьев</b>	академик Латвийской академии наук, д-р, проф., Рига, Латвия
<b>А. И. Рудской</b>	академик РАН, д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
<b>В. Сгурев</b>	академик Болгарской академии наук, д-р техн. наук, проф., София, Болгария
<b>Б. Я. Советов</b>	академик РАО, д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
<b>В. А. Соيفер</b>	академик РАН, д-р техн. наук, проф., Самара, РФ

---

## Редакционная коллегия

<b>О. Ю. Гусихин</b>	д-р наук, Диаборн, США
<b>В. Делич</b>	д-р техн. наук, проф., Нови-Сад, Сербия
<b>А. Б. Долгий</b>	д-р наук, проф. Сент-Этьен, Франция
<b>М. Железны</b>	д-р наук, доцент, Пльзень, Чешская республика
<b>Д. А. Иванов</b>	д-р экон. наук, проф., Берлин, Германия
<b>Х. Кайя</b>	д-р наук, доцент, Утрехт, Нидерланды
<b>А. А. Карпов</b>	д-р техн. наук, доцент, Санкт-Петербург, РФ
<b>С. В. Кулешов</b>	д-р техн. наук, Санкт-Петербург, РФ
<b>К. П. Марков</b>	д-р наук, доцент, Аицу, Япония
<b>Р. В. Мещеряков</b>	д-р техн. наук, проф., Москва, РФ
<b>Н. А. Молдовян</b>	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
<b>В.Ю. Осипов</b>	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
<b>В. Х. Пшихопов</b>	д-р техн. наук, проф., Таганрог, РФ
<b>А. Л. Ронжин</b>	д-р техн. наук, проф., зам. главного редактора, Санкт-Петербург, РФ
<b>Х. Самани</b>	д-р наук, доцент, Плимут, Соединённое Королевство
<b>В. А. Скормин</b>	д-р наук, проф., Бингемптон, США
<b>А. В. Смирнов</b>	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
<b>Б. В. Соколов</b>	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
<b>Л. В. Уткин</b>	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
<b>М. Н. Фаворская</b>	д-р техн. наук, проф., Красноярск, РФ
<b>А. Д. Хомоненко</b>	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
<b>Л. Б. Шереметов</b>	д-р техн. наук, Мехико, Мексика

---

**Выпускающий редактор:** Е. П. Мирошникова

**Технический редактор:** М. С. Австрийская

**Переводчик:** Е. Н. Мещерякова

---

## Адрес редакции

199178, г. Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д. 39

e-mail: [ia@spcras.ru](mailto:ia@spcras.ru), сайт: <http://ia.spcras.ru>

**Журнал индексируется в международной базе данных Scopus**

Журнал входит в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук»

Журнал выпускается при научно-методическом руководстве Отделения нанотехнологий и информационных технологий Российской академии наук

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

«Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук», 2021  
Разрешается воспроизведение в прессе, а также сообщение в эфир или по кабелю опубликованных в составе печатного периодического издания - журнала «ИНФОРМАТИКА И АВТОМАТИЗАЦИЯ» статей по текущим экономическим, политическим, социальным и религиозным вопросам с обязательным указанием имени автора статьи и печатного периодического издания

## CONTENTS

### ***Robotics, Automation and Control Systems***

G. Maltsev, A. Evteev  
STABILITY OF TRACKING THE DELAY OF PHASE-SHIFT KEYED SIGNALS WITH SPECTRUM EXPANDING IN SYNCHRONIZATION SYSTEMS OF RADIO ENGINEERING SYSTEMS 16

V. Gorbulin, E. Kotyashov, V. Chernyavskiy, N. Gruzdev  
HOLDING GEOSTATIONARY SATELLITE AT GIVEN STANDING POINT, TAKING INTO ACCOUNT ADDITIONAL PHASE RESTRICTIONS 43

A. Aleshkin, S. Balakirev, V. Nevzorov, P. Savochkin  
INCREASING EFFICIENCY OF OVER-THE-HORIZONT SURFACE WAVE RADARS FOR DETECTING SURFACE OBJECTS BASED ON THE ANTENNA SYSTEM APERTURE 68

### ***Artificial Intelligence, Knowledge and Data Engineering***

N. Kapralov, Zh. Nagornova, N. Shemyakina  
CLASSIFICATION METHODS FOR EEG PATTERNS OF IMAGINARY MOVEMENTS 94

M. Fadhel, Z. Omar  
GEOMETRIC PIECEWISE CUBIC BÉZIER INTERPOLATING POLYNOMIAL WITH  $C^2$  CONTINUITY 133

### ***Digital Information Telecommunication Technologies***

A. Andreev, A. Shabaev  
MODELS AND METHODS FOR DISCOVERY OF LOCAL AREA NETWORK TOPOLOGY WITH INCOMPLETE DATA 160

Y. Vybornova, V. Sergeev  
METHOD FOR PROTECTION OF COPYRIGHT ON VECTOR DATA 181

## СОДЕРЖАНИЕ

### ***Робототехника, автоматизация и системы управления***

Г.Н. Мальцев, А.В. Евтеев

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛЕЖЕНИЯ ЗА ЗАДЕРЖКОЙ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С РАСШИРЕНИЕМ СПЕКТРА В СИСТЕМАХ СИНХРОНИЗАЦИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ 16

В.И. Горбулин, Е.В. Котяшов, В.А. Чернявский, Н.В. Груздев

УДЕРЖАНИЕ ГЕОСТАЦИОНАРНОГО СПУТНИКА В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ СТОЯНИЯ С УЧЕТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ 43

А.П. Алёшкин, С.Н. Балакирев, В.И. Невзоров, П.В. Савочкин

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАГОРИЗОНТНЫМИ РЛС ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НАДВОДНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ СИНТЕЗА АПЕРТУРЫ АНТЕННОЙ СИСТЕМЫ 68

### ***Искусственный интеллект, инженерия данных и знаний***

Н.В. Капралов, Ж.В. Нагорнова, Н.В. Шемякина

МЕТОДЫ КЛАССИФИКАЦИИ ЭЭГ-ПАТТЕРНОВ ВООБРАЖАЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ 94

М.А. Фадхель, З.Б. Омар

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КУСОЧНО-КУБИЧЕСКИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН БЕЗЪЕ С НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ  $C^2$  133

### ***Цифровые информационно-телекоммуникационные технологии***

А.А. Андреев, А.И. Шабает

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ВЫЯВЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ЛОКАЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ ПРИ НЕПОЛНЫХ ДАННЫХ 160

Ю.Д. Выборнова, В.В. Сергеев

МЕТОД ЗАЩИТЫ АВТОРСКИХ ПРАВ НА ВЕКТОРНЫЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ 181

# К 70-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ СОКОЛОВА БОРИСА ВЛАДИМИРОВИЧА



18 января 2021 года исполнилось 70 лет Заслуженному деятелю науки Российской Федерации, доктору технических наук, профессору, Лауреату премии Правительства РФ в области науки и техники, Лауреату премии Правительства Санкт-Петербурга, Лауреату Стипендии Президента РФ «За выдающиеся заслуги в области вооружения, военной и специальной техники», руководителю лаборатории – главному научному сотруднику информационных технологий в системном анализе и моделировании Санкт-Петербургского Федерального исследовательского центра

Российской академии наук Соколову Борису Владимировичу.

Соколов Борис Владимирович родился 18 января 1951 года в Ленинграде. Проучившись 8 классов в 73 ленинградской школе, поступил в Ленинградское суворовское военное училище, которое окончил в 1969 году. В августе 1969 года был принят слушателем Ленинградской военной инженерной Краснознаменной академии имени А.Ф. Можайского (ЛВИКА), которую окончил с отличием в 1974 году по специальности «Баллистика и теория полета». С 1974 по 1978 год служил в наземном автоматизированном комплексе управления космическими аппаратами на должностях старшего инженера отделения, начальника отделения. В 1978 году поступил в очную адъюнктуру на кафедру «Автоматизированных систем управления космическими аппаратами» (кафедру № 62) Военного инженерного Краснознаменного института имени А.Ф. Можайского (ВИКИ), которую окончил в 1981 году и 20 мая 1982 года защитил кандидатскую диссертацию. Далее проходил службу в ВИКИ имени А.Ф. Можайского на должностях: с ноября 1981 года по декабрь 1984 года – преподаватель 62 кафедры ВИКИ; с декабря 1984 года по октябрь 1988 года – начальник научно-исследовательской лаборатории; с октября 1988 года по январь 1990 года – старший преподаватель 62 кафедры; с января 1990 года по март 1992 года

старший научный сотрудник – соискатель НИО ВИКИ. 6 мая 1992 года защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук, 30 марта 1994 года ему присвоено ученое звание профессора. С мая 1992 года по июнь 1998 года являлся начальником 62 кафедры Военной инженерно-космической академии им. А.Ф. Можайского. Военную службу закончил в воинском звании полковника.

Основная трудовая и научная деятельность Б.В. Соколова после окончания военной службы связана с Санкт-Петербургским институтом информатики и автоматизации РАН, ныне - Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН (СПб ФИЦ РАН). Здесь он трудился и продолжает трудиться на должностях ведущего научного сотрудника (1999-2006 г.г.), заместителя директора по научной работе (2006-2017 г.г.), руководителя лаборатории – главного научного сотрудника (с 2017 г. по настоящее время).

Начало активной научно-педагогической деятельности Б.В. Соколова связано с обучением в адъюнктуре, с 1982 г. Однако тяга к точным наукам и исследовательские навыки проявились и начали формироваться у Бориса Соколова гораздо раньше. Интерес к математике пробудился на школьных уроках, благодаря увлеченному учителю математики Игорю Васильевичу Кондрашову и книге знаменитого венгерского-американского математика Д. Пойя «Как решать задачу» (М., Учпедгиз, 1959). Этот интерес развился на занятиях в математическом кружке ЛенСВУ, занятия в котором вела талантливый педагог Сократилина Ирина Петровна, впоследствии Заслуженный учитель РФ. Позже, в академии, курсант Борис Соколов все пять лет обучения занимался в Военно-научном обществе на своей выпускающей кафедре под руководством известного ученого в области баллистики и теории управления полетом космических аппаратов доктора технических наук профессора Баринава Константин Никитича. Именно в это время у курсанта Борис Соколова проявился подлинный интерес к научным исследованиям, сформировались навыки научной работы.

В воинской части, куда был распределен лейтенант Б.В. Соколов в 1974 году, он попал в центр интересных событий, связанных с внедрением первой в СССР интегрированной АСУ разнородными группировками космических аппаратов (КА). Работая в отделении математического и программного обеспечения КА в должности старшего инженера, а затем и его начальника, Борис Владимир принимал непосредственное участие в автономных и комплексных испытаниях перспективных систем автоматизации, в

создании и отладке программных продуктов. Это дало ему бесценный практический опыт работы со средствами и системами автоматизации процессов управления КА, а также определило профиль будущей исследовательской работы – из «чистого» баллистика, математика Борис Владимирович, существенно расширив профиль своей профессиональной деятельности, стал специалистом по АСУ КА. Поступление в 1978 году в адъюнктуру на кафедру «Автоматизированных систем управления космическими аппаратами» ВИКА имени А.Ф. Можайского позволило ему реализовать сформировавшиеся творческие замыслы – заниматься математикой для решения задач автоматизации управления сложными объектами.

Становление Б.В. Соколова как ученого прошло в ходе обучения в адъюнктуре, работы в научных подразделениях и на кафедре 62 ВИКА им. А.Ф. Можайского, подготовки кандидатской, а затем докторской диссертации в рамках научной школы «Системного анализа и космической кибернетики», возглавляемой докторами технических наук профессорами Резниковым Борисом Абрамовичем и Калининым Владимиром Николаевичем. Здесь в методологию научных исследований, проводимых Б.В. Соколовым, как на теоретическом, так и на прикладном уровнях, прочно вошли основы системного подхода к решению сложных задач автоматизации управления.

Владение этим подходом и впоследствии, уже во время работы в СПИИРАН, позволило Борису Владимировичу под руководством и в сотрудничестве с директором СПИИРАН членом-корреспондентом РАН Юсуповым Рафаэлем Мидхатовичем организовывать и успешно выполнять междисциплинарные исследования, объединяющие результаты ученых и специалистов, работающих в различных предметных областях.

В настоящее время профессор Б.В. Соколов известный ученый, автор более 650 научных работ, 5 монографий, 20 изобретений, основатель нового научного направления в области автоматизации процессов проактивного управления сложными техническими объектами (СТО), связанного с комплексным описанием и междисциплинарным исследованием процессов адаптивного многокритериального структурно-функционального синтеза технологий и программ управления развитием СТО в критических приложениях.

Успешно развивается созданная им научная школа по исследованию проблем проактивного управления структурной динамикой сложных объектов.



Профессором Соколовым Б.В. и его научной школой получен целый ряд фундаментальных и прикладных результатов, в том числе:

- разработаны научные основы теории проактивного управления структурной динамикой сложных объектов;

- разработан кибернетический подход к многокритериальному оцениванию, анализу и управлению качеством моделей и полимодельных комплексов, описывающих сложные объекты;

- разработаны научно-методологические, методические и технологические основы создания и использования распределенных систем поддержки принятия решений при управлении сложными объектами;

- созданы и внедрены опытные образцы программного обеспечения решения задач календарного планирования и составления расписаний на предприятиях и в организациях ракетно-космической отрасли, в судостроении, в транспортно-логистических системах, в организациях и войсковых частях МО РФ.

Б.В. Соколовым предложен принципиально новый вариант динамической декомпозиции задач группового управления СТО, основанный на методе локальных сечений В.Г. Болтянского. Были найдены в явном виде динамические множители Лагранжа (в качестве которых выступали соответствующие сопряженные переменные, интерпретируемые как «теневые цены» на распределяемые ресурсы). В результате были разработаны и реализованы методы и алгоритмы поиска эталонных (оптимальных) решений в задаче группового управления СТО для различных сценариев их взаимодействия, относительно которых можно уже обоснованно вводить различного рода эвристики, основываясь на метафорах биоинспирированных подходов, либо агентных технологиях (данные результаты включены в список важнейших результатов РАН в 2004, 2005, 2008, 2009, 2010, 2015 г.г.).

На основе развития положений теории проактивного управления структурной динамикой СТО профессором Б.В. Соколовым получен ряд новых результатов в области создания систем поддержки принятия решений (СППР) при выработке управляющих воздействий применительно к АСУ объектами военно-государственного управления (ОВГУ). Научная новизна и эффективность этих результатов состоят в том, что на их базе удастся на конструктивной основе осуществить переход от существующих эвристических методов описания процессов функционирования АСУ к последовательности целенаправленных теоретически и практически обоснованных этапов построения моделей и алгоритмов анализа и проактивного управления многоструктурными макросостояниями (аттракторами) ОВГУ. Данный переход позволил

существенно уменьшить трудоемкость процессов построения таких моделей, методов и алгоритмов, а также понизить уровень требований, предъявляемых к квалификации их разработчиков, за счет перевода данных процессов из категории «искусство» в категорию «технология». В ходе исследований, выполненных Б.В. Соколовым, доказано, что процессы проактивного мониторинга и управления функционированием ОБГУ различной природы и назначения на функциональном уровне их рассмотрения имеют существенно меньшее и вполне обозримое разнообразие, чем разнообразие их конструктивных реализаций. Научные результаты, полученные в данном направлении профессором Б.В. Соколовым и его учениками, позволили, во-первых, непосредственно связать те общие цели, на достижение которых ориентировано функционирование конкретной СППР на конкретном этапе ее жизненного цикла, с ее стратегическими и тактическими целями, во-вторых, обоснованно определять и выбирать соответствующие последовательности решаемых задач и выполняемых операций (действий), связанных управляемой структурной динамикой (управляемой самоорганизацией ОБГУ), и, в-третьих, осознанно находить компромиссные многокритериальные решения при распределении ограниченных ресурсов АСУ ОБГУ, выделяемых на управление структурной динамикой указанных систем в условиях возможных кризисных, чрезвычайных и аварийных ситуаций (данные результаты включены в список важнейших результатов РАН в 2011, 2012 гг).

Новизна и перспективность исследований, проводимых Б.В. Соколовым, эффективность получаемых результатов, послужили основанием для открытия в СПИИРАН новой лаборатории, созданной по его непосредственному участию в 2005 году. Наименование вновь созданного подразделения – Лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании. В результате исследований, выполняемых лабораторией профессора Б.В. Соколова под руководством и при непосредственном участии директора СПИИРАН члена-корреспондента РАН Р.М. Юсупова, сформировано новое направление междисциплинарных исследований – основы квалиметрии моделей и полимодельных комплексов, а также разработаны прикладные программные решения для реализации междисциплинарных проектов. Основные теоретические результаты данного направления нашли отражение в монографии (Микони С.В., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Квалиметрия моделей и полимодельных комплексов. М.: РАН, 2019. 314 с). Совокупность полученных теоретических и прикладных результатов позволили лаборатории успешно выполнить целый ряд междисциплинарных проектов, в том числе проект 17-11-01254 по гранту Российского научного фонда, в

котором в полной мере реализованы как теоретические, так и прикладные результаты нового научного направления и на базе этого создана автоматическая система мониторинга и прогнозирования наводнений применительно к участку реки Северная Двина. Наименование проекта: «Методология и сервис-ориентированная технология создания и использования системы комплексного автоматизированного моделирования природных и природно-технологических объектов и ее реализация для оперативного прогнозирования речных наводнений».

Другим новым направлением исследований, проводимых профессором Б.В. Соколовым под руководством члена-корреспондента РАН Р.М. Юсупова, является развитие неокибernetики как науки, обобщающей результаты классической кибернетики, информатики и системологии, и позволяющей с общих позиций перейти к описанию процессов развития не только технических объектов, но социально-экономических систем как целенаправленных управляемых процессов (Юсупов Р.М., Соколов Б.В. Роль и место неокибernetики в современной структуре системы знаний // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 6 (99)).

В рамках данных исследований, основываясь на концепциях системного моделирования и проактивного интеллектуального управления, сформулирована методология и разработано методическое обеспечение решения проблем синтеза технологий и комплексных планов функционирования социо-кибер-физических систем, которые удалось к настоящему времени реализовать в промышленном Интернете. По результатам данных исследований в 2020 году в СПИИРАН успешно защищена докторская диссертация учеником профессора Б.В. Соколова талантливым молодым ученым С.А. Потрясаевым.

Свидетельством фундаментальности и общности полученных профессором Б.В. Соколовым результатов является успешное применение положений разработанной им теории управления структурной динамикой сложных объектов для решения задач управления в транспортно-логистических системах. В отечественной практике это привело к созданию технологии управления грузоперевозками на воздушном транспорте. За решение данной задачи Б.В. Соколов в 2013 в составе авторского коллектива был удостоен звания Лауреата премии Правительства РФ в области науки и техники. Фундаментальные результаты по данному направлению получили и широкое международное признание, опубликованы более чем в 20 статьях в высокорейтинговых международных изданиях и в коллективной монографии, вышедшей под редакцией Б.В. Соколова

(Sokolov B., Ivanov D., Dolgui A. (eds) *Scheduling in Industry 4.0 and Cloud Manufacturing*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer, Cham, 2020. Vol 289).

Говоря о прикладных результатах, полученных профессором Б.В. Соколовым, необходимо отметить, что начиная с 1978 года он принимал непосредственное участие в выполнении более 100 научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ. Из них – 26 грантов РФФИ, 2 гранта РФ, 8 международных проектов, 36 проектов в интересах МО СССР (впоследствии МО РФ). В 37 работах он являлся научным руководителем.

Наибольшее число практических реализаций получено в отечественной ракетно-космической отрасли. В период с 1990 и по настоящее время под его руководством и непосредственном участии проводились широкомасштабные фундаментальные и прикладные исследования, выполняемые в интересах МО РФ, и, прежде всего, Военно-космических сил. Профессор Б.В.Соколов, возглавляя в 1992-1998 годах кафедру в ВИКА имени А.Ф. Можайского, совместно со своими учениками и сотрудниками провел комплексные исследования по вопросам: разработки общей методологии системного анализа и управления сложными военно-техническими системами (научно-исследовательские работы (НИР) «Аксиома», «Аквагория-1А», «Комплекс»); разработки принципов, методов, моделей алгоритмов и методик комплексного планирования операций и управления структурами в АСУ орбитальными группировками космических аппаратов, оперативного управления космическими средствами в условиях нештатных ситуаций (НИР «Планета-40», «Метеор-40», «Вымпел-40», «Аист-60»); проектирования и эксплуатации программно-математического и информационного обеспечения тренажерных комплексов и автоматизированных обучающих систем для подготовки операторов дежурных смен АСУ КА (НИР «Гибрид-6», «Гибрид-9», «Игра-92», «Галактика-НВО») и научно-технического обоснования облика учебного наземного комплекса управления (УНКУ) ВИКА имени А.Ф. Можайского, разработки и внедрения в учебный процесс аппаратно-программных средств УНКУ (НИР «Вектор-30», «Галактика-НВО»).

Работая с 1999 года и по настоящее время в СПИИРАН, ныне СПб ФИЦ РАН, профессор Б.В.Соколов продолжает активно участвовать в проектах, выполняемых в интересах МО РФ. Результаты исследований, выполненных под руководством Б.В.Соколова, получили широкую и разнообразную практическую реализацию в научных учреждениях и промышленных организациях РФ (РНИИ КП,

НПО «Энергия», ЦНИИ МАШ, НПО «ЭЛАС», НПО ПМ) при создании и эксплуатации специального программно-математического обеспечения планирования и управления работой различных классов сложных технических объектов. В частности, профессором Соколовым Б.В. и его учениками был разработан и внедрен в промышленных и военных организациях РФ ряд комбинированных методов, алгоритмов и методик комплексного автоматизированного планирования работы космических средств и управления их структурной динамикой, который позволил сократить затраты ресурсов и повысить эффективность применения таких космических систем как «ГЛОНАСС», «Глобус», «Строй», «Молния».

В настоящее время методология и информационные технологии комплексного моделирования успешно развиваются лабораторией профессора Б.В.Соколова в направлении создания СППР по управлению развитием территорий с интегрированным использованием разнородных данных, включая данные дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ). Полученные результаты реализованы при выполнении проектов в интересах города Санкт-Петербурга и Ленинградской области при создании информационных систем и тематических сервисов, основанных на использовании данных ДЗЗ, а также на международном уровне, в проектах Программ приграничного сотрудничества Россия – Латвия – Эстония в 2011-2014 годах (проект INFROM, Baltic ICT Platform) и Россия – Юго-Восточная Финляндия в 2019-2021 годах (проект InnoForestView).

С 2006 по 2017 год Б.В. Соколов был заместителем директора СПИИРАН по научной работе, выполняя широкий круг обязанностей по реализации институтом планов фундаментальных и прикладных исследований, подготовке кадров высшей квалификации – кандидатов и докторов наук, проведению отраслевых, всероссийских и международных конференций, взаимодействию с внешними организациями и многое другое. На этом посту ярко проявились его способности к системному обобщению различных направлений деятельности лабораторий СПИИРАН и определению направлений интеграции проводимых в институте разработок. Он сумел организовать творческое взаимодействие научных направлений СПИИРАН при выполнении комплексных междисциплинарных исследований, выполняемых как в рамках госзадания, так и по хозяйственным договорам.

Системообразующая деятельность профессора Б.В. Соколова на посту заместителя директора по научной работе распространилась и за

пределы СПИИРАН. При его активнейшем участии было создано Национальное общество имитационного моделирования, первоочередная задача которого – сформировать связи между специалистами в области моделирования в России, определить круг организаций, институтов и промышленных предприятий, использующих моделирование как средство исследования и проектирования, способствовать созданию горизонтальных связей для объединения усилий при выполнении междисциплинарных проектов.

Опыт научно-организационной работы профессора Б.В. Соколова востребованы в настоящее время также в связи со структурными преобразованиями, проводимыми в СПб ФИЦ РАН под руководством директора доктор технических наук профессора РАН Андрея Леонидовича Ронжина СПИИРАН. К СПИИРАН присоединились пять институтов Российской Академии наук, и имеющиеся у Бориса Владимировича навыки системных исследований, его активная позиция и опыт в вопросах проведения междисциплинарных исследований, помогают в организации совместной работы различных институтов для получения качественно новых результатов уже в рамках СПб ФИЦ РАН в целом.

Профессор Б.В. Соколов сам ведет активную научно-организационную и педагогическую деятельность, работая с 1982 г. преподавателем, а в последующем (с 1992 г. по 1998 г.) начальником кафедры в Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. В период с 1999 по 2002 год являлся профессором кафедры «Инженерного обеспечения городского хозяйства» Санкт-Петербургского Государственного технического университета. С 1999 г. и по настоящее время является профессором кафедры «Компьютерных технологий и программной инженерии» Санкт-Петербургского Государственного университета аэрокосмического приборостроения. С 2016 года по настоящее время - профессор Департамента логистики и управления цепями поставок Национального исследовательского университета Высшей школы экономики в г. Санкт-Петербурге.

Профессор Б.В. Соколов является членом ученых советов СПб ФИЦ РАН и СПИИРАН, двух диссертационных советов (в том числе и в Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского), членом Федерации космонавтики РФ, действительным членом международной Академии навигации и управления движением, членом Ассоциации

«Северо-Запад», членом Ученого совета Библиотеки РАН; экспертом РАН и РФФИ, членом Научного совета по информатизации Санкт-Петербурга, членом президиума Национального общества имитационного моделирования, членом Санкт-Петербургской группы национального комитета по автоматическому управлению (НКАУ).

Особым признанием заслуг научной школы профессора Б.В. Соколова является его назначение на пост председателя секции «Кибернетики им. академика А.И. Берга» при Доме ученых им. М. Горького РАН.

Б.В. Соколов неоднократно входил в состав программных комитетов всероссийских и международных конференций, в том числе является членом организационного комитета Международной научной школы «Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах», членом программного комитета конференции «Кибернетика и высокие технологии XXI века», председателем программного комитета конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика», является членом ряда редакционных советов и редколлегий российских и зарубежных журналов в области информатики и теории управления (в том числе «Известия вузов. Приборостроение», «Информационные технологии», «Информатизация и связь», «Надежность», «Вопросы радиоэлектроники»).

Выдающийся вклад профессора Б.В. Соколова в отечественную науку подтверждается полученными званиями и наградами. Б.В. Соколов – Заслуженный деятель науки и техники РФ (2007 г.), Лауреат Стипендии Президента РФ «За выдающиеся заслуги в области вооружения, военной и специальной техники» (2009-2011 г.г.), Лауреат премии Правительства Санкт-Петербурга за выдающиеся достижения в области высшего и среднего профессионального образования за 2009 г., номинация: Научные достижения, способствующие повышению качества подготовки специалистов и кадров высшей квалификации, Лауреат премии Правительства Российской Федерации в области науки и техники» (2013 г.)

Сотрудники СПб ФИЦ РАН, коллеги из других организаций, его ученики и последователи, редакционная коллегия журнала «Информатика и автоматизация» (Труды СПИИРАН) от души поздравляют Бориса Владимировича Соколова с юбилеем и желают ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов!

## Основные публикации Б.В. Соколова

1. *Соколов Б.В., Калинин В.Н.* Динамическая модель и алгоритм оптимального планирования комплекса работ с запретами на прерывание // Автоматика и телемеханика. 1985. № 5. С. 106–114.
2. *Соколов Б.В., Калинин В.Н.* Динамическая модель процесса переналадки приборов активного подвижного объекта // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1626–1629.
3. *Соколов Б.В., Калинин В.Н.* Оптимальное планирование процесса взаимодействия активных подвижных объектов // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 752–757.
4. *Соколов Б.В.* Комплексное моделирование операций и управление структурами в АСУ активными подвижными объектами // М.: МО. 1992. 232 с.
5. *Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Концептуальные основы оценивания и анализа качества моделей и полимодельных комплексов // Теория и системы управления. 2004. №6. С.5–16.
6. *Соколов Б.В., Калинин В.Н.* Многомодельный подход к описанию процессов управления космическими средствами // Теория и системы управления. 1995. № 1. С.149–156.
7. *Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Комплексное моделирование рисков при выработке управленческих решений в сложных организационно-технических системах // Проблемы информатики и управления. 2006. № 1. С. 39–59.
8. *Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов // М.: Наука. 2006. 410 с.
9. *Павлов А.Н., Соколов Б.В., Москвин Б.В., Верзиллин Д.Н.* Военная системотехника и системный анализ: учебник СПб.: ВКА имени А.Ф. Можайского. 2010. 251 с.
10. *Микони С.В., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Квалиметрия моделей и полимодельных комплексов // М.: РАН. 2019. 314 с.
11. *Юсупов Р.М., Соколов Б.В.* Роль и место неок cyberнетики в современной структуре системы знаний // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 6(99). С. 156–172.
12. *Юсупов Р.М., Соколов Б.В., Охтилев М.Ю.* Теоретические и технологические основы концепции проактивного мониторинга и управления сложными объектами // Известия Южного Федерального университета. Технические науки. 2015. №1(162). С. 162–174.
13. *Ivanov D., Sokolov B.* Adaptive Supply Chain Management // Springer. 2010. 269 p.
14. *Ivanov D., Sokolov B.* Control and system-theoretic identification of the supply chain dynamics domain for planning, analysis, and adaptation of performance under uncertainty // European Journal of Operational Research. 2013. vol. 224(2), pp. 313–323.
15. *Ivanov D., Sokolov B., Dolgui A.* Optimal Control Algorithms and Their Analysis for Short-Term Scheduling in Manufacturing Systems // Algorithms. 2018. vol. 11(5), pp. 57.
16. *Ivanov D., Sokolov B.* Dynamic supply chain scheduling // Journal of Scheduling. 2012. vol. 15(2), pp. 201–216.
17. *Dolgui A. et al.* Scheduling in production, supply chain and Industry 4.0 systems by optimal control: fundamentals, state-of-the-art and applications // International Journal of Production Research. 2018. vol. 56. no. 1-2, pp. 414–430.
18. *Ivanov D., Sokolov B.* (2013) Dynamic coordinated scheduling in the supply chain under a process modernization, International Journal of Production Research. DOI:10.1080/00207543.2012.737950
19. *Zelentsov V, Sokolov B., Merkurjev Y., Yusupov R.,* (2014) Multiple models of information fusion process-es: Quality definition and estimation. Journal of Computational Science, Volume 5, Issue 3, May 2014, Pages 380–386
20. *Sokolov B., Ivanov D., Dolgui A.* (eds) Scheduling in Industry 4.0 and Cloud Manufacturing. International Series in Operations Research & Management Science. 2020. Series volume 289. Switzerland: Springer, Cham. 273 p.



Г.Н. МАЛЬЦЕВ, А.В. ЕВТЕЕВ  
**УСТОЙЧИВОСТЬ СЛЕЖЕНИЯ ЗА ЗАДЕРЖКОЙ  
ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С  
РАСШИРЕНИЕМ СПЕКТРА В СИСТЕМАХ СИНХРОНИЗАЦИИ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

---

*Мальцев Г.Н., Евтеев А.В. Устойчивость слежения за задержкой фазоманипулированных сигналов с расширением спектра в системах синхронизации радиотехнических систем.*

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы обеспечения устойчивости слежения за задержкой в системах синхронизации радиотехнических систем при приеме фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе псевдослучайных последовательностей. При работе с подвижными объектами задержка принимаемого сигнала непрерывно меняется, возникают ошибки синхронизации, и качество приема сигналов в значительной степени зависит от устойчивости работы схемы слежения за задержкой, характеризуемой вероятностью срыва слежения. Слежение за задержкой, как правило, рассматривается в качестве основной задачи синхронизации радиотехнических систем с фазоманипулированными сигналами с расширением спектра на основе псевдослучайных последовательностей.

Исследовано влияние ошибок синхронизации при слежении за задержкой принимаемого фазоманипулированного сигнала с расширением спектра на основе псевдослучайных последовательностей на вероятность срыва слежения. Расчетным методом получены семейства зависимостей вероятности срыва слежения от величин случайной и систематической составляющих ошибки слежения за задержкой, нормированных к полосе захвата временного дискриминатора, при различных сочетаниях этих параметров. Определены области слабого и сильного влияния величины ошибок слежения за задержкой принимаемого сигнала на вероятность срыва слежения. Проанализирован характер влияния случайной и систематической составляющих ошибки слежения за задержкой на вероятность срыва слежения. Установлено, что в общем случае имеет место неоднозначность среднего квадрата нормированной ошибки слежения за задержкой как критерия оптимизации при выборе параметров системы синхронизации.

Расчеты, проведенные для широкого диапазона изменения нормированных ошибок слежения за задержкой, показывают, что для обеспечения заданного качества приема сигналов в радиотехнической системе с фазоманипулированными сигналами с расширением спектра на основе псевдослучайных последовательностей необходим совместный выбор параметров системы синхронизации, определяющих величину случайной и систематической составляющих ошибки слежения за задержкой. Полученные результаты могут быть использованы при анализе характеристик систем синхронизации информационных и измерительных радиотехнических систем и при обосновании технических решений, обеспечивающих требуемое качество приема фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе псевдослучайных последовательностей.

**Ключевые слова:** фазоманипулированные сигналы с расширением спектра, синхронизация, схема слежения за задержкой, вероятность срыва слежения

---

**1. Введение.** В радиотехнических системах (РТС) передачи информации, навигации и управления подвижными объектами широкое распространение получило использование фазоманипулированных

сигналов с расширением спектра на основе псевдослучайных последовательностей (ПСП) [1-4]. Такие сигналы используются в РТС отечественных и зарубежных космических систем [5-8], в том числе в глобальных навигационных спутниковых системах ГЛОНАСС и GPS, и представлены в рекомендациях международного Консультативного комитета по системам передачи космических данных (Consultative Committee for Space Data Systems – CCSDS) [9-11].

Особенностью оптимального корреляционного приема фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП является узкая ширина полосы захвата временного дискриминатора корреляционного приемника, которая определяется длительностью символа модулирующей ПСП. Слежение за задержкой принимаемого сигнала осуществляется схемой слежения за задержкой модулирующей ПСП, входящей в состав системы синхронизации РТС. Под системой синхронизации в данном случае понимается система слежения за параметрами принимаемого сигнала в приемном устройстве РТС [6, 12]. В общем случае слежение осуществляется за задержкой, частотой и фазой принимаемого сигнала [13-16]. При этом из-за узости полосы захвата схемы слежения за задержкой, соизмеримой с длительностью символа модулирующей ПСП, число которых в периоде ПСП в РТС различного назначения может составлять от сотен до десятков тысяч, слежение за задержкой, как правило, рассматривается в качестве основной задачи системы синхронизации РТС с фазоманипулированными сигналами с расширением спектра на основе ПСП [17-21].

При радиосвязи с подвижными объектами, в частности, при работе наземных РТС с космическими и летательными аппаратами задержка принимаемого сигнала непрерывно меняется вследствие изменения дальности до объекта. В этих условиях может иметь место существенное влияние точности синхронизации по задержке на качество приема фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП, которое будет зависеть от устойчивости работы схемы слежения за задержкой. В [22] исследовано влияние ошибок слежения за задержкой принимаемого сигнала на вероятность ошибочного приема символов передаваемой информации в условиях, когда ошибка слежения за задержкой не выходит за пределы полосы захвата системы слежения. При выходе ошибки слежения за задержкой принимаемого сигнала за пределы полосы захвата происходит срыв синхронизации. Для достижения требуемого качества приема сигналов необходим обоснованный выбор параметров следящей системы с учетом

влияния связанных с ними случайной и систематической составляющих ошибки слежения за задержкой на выбранный показатель устойчивости системы синхронизации.

Представлены результаты исследования устойчивости слежения за задержкой модулирующей ПСП в РТС с шумоподобными фазоманипулированными сигналами при наличии ошибок слежения. В качестве показателя устойчивости системы синхронизации рассматривается вероятность срыва слежения. Цель работы – анализ влияния ошибок синхронизации при слежении за задержкой принимаемого фазоманипулированного сигнала с расширением спектра на основе ПСП на вероятность срыва слежения. Представлены результаты исследования влияния случайной и систематической составляющих ошибки слежения за задержкой на вероятность срыва слежения.

**2. Особенности дискриминационной характеристики схемы слежения за задержкой при приеме фазоманипулированных сигналов на основе ПСП и постановка задачи.** Роль систем синхронизации в РТС определяется тем, что слежение за изменяющимися параметрами принимаемых сигналов позволяет получить оценки их текущих значений и использовать эти оценки для соответствующей настройки опорных сигналов при реализации оптимального приема сигналов, что обеспечивает достижение потенциальной помехоустойчивости РТС [2, 14]. В общем случае система синхронизации осуществляет слежение за частотой, задержкой и фазой принимаемого сигнала после поиска и захвата принимаемого сигнала по этим параметрам. Слежение осуществляется в пределах полосы захвата, ширина которой определяется шириной дискриминационной характеристики по соответствующему параметру сигнала. При выходе ошибки слежения за пределы полосы захвата происходит срыв синхронизации и необходим повторный поиск сигнала по одному или нескольким параметрам. В типичных условиях приема фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП область неопределенности превышает ширину полосы захвата по частоте в единицы и десятки раз, а ширину полосы захвата по задержке – в сотни и тысячи раз, поэтому слежение за задержкой, как правило, рассматривается в качестве основной задачи системы синхронизации РТС, использующих такие сигналы.

Используемые в РТС фазоманипулированные сигналы с расширением спектра на основе ПСП могут быть в общем виде представлены следующим образом [2, 6]:

$$s(t) = U \sum_{n=1}^N \text{rect} \left[ \frac{t - \tau - (n-1)\Delta t}{\Delta t} \right] \sin [2\pi(f_0 + F_D)t + \varphi + \varphi_n], \quad (1)$$

где  $U$  – амплитуда сигнала;  $f_0$  – несущая частота;  $\varphi$  – начальная фаза;  $\tau$  – временная задержка;  $F_D$  – доплеровский сдвиг частоты сигнала;  $\Delta t$  – длительность символа модулирующей ПСП;  $N$  – число символов в периоде (длина) модулирующей ПСП;  $\varphi_n$  – дискретные фазовые сдвиги, соответствующие символам ПСП  $n=1, \dots, N$ .

Прямоугольная функция «окна» вида  $\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x < 0, \quad x \geq 1, \end{cases}$  под

знаком суммы в (1) задает длительность символа  $\Delta t$  модулирующей двоичной ПСП. Длительность анализируемого сигнала определяется длительностью периода модулирующей ПСП  $\Delta T = N\Delta t$ . Наибольшее распространение в РТС с фазоманипулированными сигналами на основе ПСП получает фазовая манипуляция  $[0, \pi]$  в соответствии с чередованием символов  $[0, 1]$  модулирующей ПСП. В этом случае  $\varphi_n = \{0, \pi\}$ . При этом используются ПСП с числом символов  $N$  в периоде, составляющем сотни и тысячи, а в глобальных навигационных спутниковых системах и радиолиниях с высокой энергетической скрытностью – до десятков тысяч [5, 6, 23].

Основой технической реализации поиска и слежения за фазоманипулированными сигналами с расширением спектра на основе ПСП по задержке является корреляционный приемник ПСП, представляющий собой квазиоптимальный следящий измеритель [12–14]. В нем формирование дискриминационной характеристики временного дискриминатора  $D(\tau)$  осуществляется с помощью корреляционных функций  $B(\tau)$  опорной и принимаемой ПСП, сдвинутых на  $\Delta t$  или на  $2\Delta t$ , как это показано на рисунке 1. Ширина рабочего участка дискриминационной характеристики при этом составляет  $\Delta = \Delta t$  (а) или  $\Delta = 2\Delta t$  (б) соответственно. Тем самым определяется максимально возможная ширина полосы захвата  $\Delta$  при слежении за задержкой  $\tau$  принимаемого сигнала.

Практически ширина полосы захвата по задержке выбирается исходя из допустимых потерь в отношении сигнал/шум, вызванных уменьшением значения автокорреляционной функции ПСП. В типовом временном дискриминаторе схемы слежения за задержкой ПСП ширина полосы захвата равна длительности одного символа ПСП. На рисунке 2 показан главный пик нормированной корреляционной функции ПСП  $B(\tau)$ . Длительности одного символа ПСП  $\Delta t$  соответствует изменение нормированной задержки в

диапазоне  $-0,5 < \tau/\Delta t < 0,5$ . При этом на границах полосы захвата значения нормированной корреляционной функции ПСП  $B(\tau)$  равны 0,5 (сечение функций  $B(\tau)$  штриховой линией), что соответствует потерям в отношении сигнал/шум 3 дБ. Принцип формирования дискриминационной характеристики не изменяется при использовании различных видов ПСП и модификаций корреляционного приема с вычислением корреляционной функции сегментов ПСП или моментов высших порядков корреляционной функции ПСП, а также при программной реализации корреляционного приема [15, 24-26].

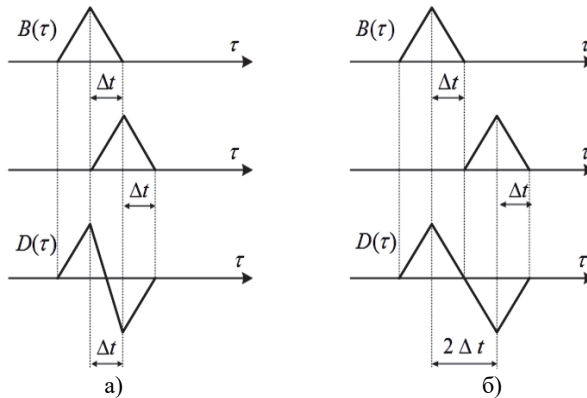


Рис. 1. Дискриминационные характеристики корреляционного приемника ПСП: а)  $\Delta = \Delta t$ ; б)  $\Delta = 2\Delta t$

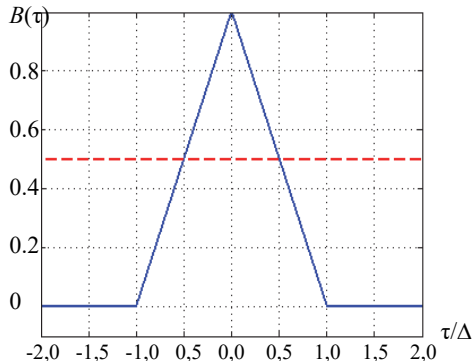


Рис. 2. Определение потерь в отношении сигнал/шум на границе полосы захвата по задержке

При выходе ошибки  $\Delta t$  слежения за задержкой  $\tau$  принимаемого сигнала за пределы полосы захвата  $\Delta$  происходит срыв синхронизации. В этих условиях качество приема фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП в значительной степени зависит от устойчивости слежения за задержкой, которая будет тем выше, чем выше точность оценки задержки принимаемого сигнала в схеме слежения за задержкой системы синхронизации. Правильный выбор параметров следящего фильтра схемы слежения за задержкой позволяет уменьшить случайную и систематическую составляющие ошибки слежения за задержкой и связанную с ними вероятность срыва слежения системы синхронизации.

Содержательная постановка задачи исследования состоит в следующем. Необходимо выполнить статистическое описание ошибок слежения за задержкой принимаемого фазоманипулированного сигнала с расширением спектра на основе ПСП и получить аналитические зависимости вероятности срыва слежения за задержкой от параметров закона распределения ошибок слежения за задержкой. При этом рассматриваются условия приема сигналов, характерные для работы наземных РТС с космическими и летательными аппаратами, когда в приемном устройстве в смеси с аддитивным шумом выделяется фазоманипулированный сигнал РТС вида (1) с временной задержкой  $\tau$ , за которой осуществляется слежение системой синхронизации, а эффекты многолучевого распространения проявляются слабо. В качестве параметров статистического описания ошибок слежения за задержкой рассматриваются случайная и систематическая составляющие ошибки слежения, которые в рассматриваемых условиях зависят от отношения сигнал/шум на входе приемного устройства, параметров следящего фильтра схемы слежения за задержкой и динамики изменения задержки принимаемого сигнала.

**3. Статистическое описание ошибок слежения за задержкой принимаемого сигнала.** При анализе динамики слежения за параметрами сигнала в следящих системах используется описание процесса слежения в виде марковского случайного процесса [27]. В этом случае плотность распределения ошибки слежения  $\Delta\lambda$  за параметром сигнала  $\lambda$  в условиях помех определяется решением уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова относительно плотности распределения  $w(t, \Delta\lambda)$  сигнала рассогласования следящей системы. Однако общее аналитическое решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для переходных режимов и произвольного вида помех отсутствует, и

большинство известных результатов связаны с анализом стационарного решения для  $w(\Delta\lambda)$ , как точного [27], так и приближенного [28], при  $dw(t, \Delta\lambda)/dt=0$ .

В схеме слежения за задержкой модулирующей ПСП принимаемого фазоманипулированного сигнала с расширением спектра сигналом рассогласования следящей системы является ошибка слежения за задержкой:  $\Delta\lambda=\Delta t$ . Анализ точных и численных решений уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, представленных в работах [27, 28], показывает, что при приеме сигналов в условиях белого гауссовского шума для описания плотности распределения ошибки слежения за задержкой  $\Delta t$  в стационарном режиме может быть использован нормальный закон распределения с параметрами:  $\sigma_\tau$  – среднеквадратическое отклонение ошибки слежения за задержкой (случайная составляющая ошибки);  $\delta\tau$  – математическое ожидание ошибки слежения за задержкой (систематическая составляющая ошибки).

Ширина полосы захвата  $\Delta$  схемы слежения за задержкой фазоманипулированного сигнала с расширением спектра определяется длительностью символа модулирующей ПСП:  $\Delta=\Delta t$  или  $\Delta=2\Delta t$  в зависимости от варианта реализации дискриминатора корреляционного приемника ПСП. При проведении аналитических расчетов удобно использовать параметры системы слежения за задержкой, нормированные к полуширине дискриминационной характеристики  $\Delta$ . Введем обозначения:  $\Delta x = 2\Delta\tau/\Delta$  – нормированная ошибка слежения за задержкой;  $\delta x = 2\delta\tau/\Delta$  – математическое ожидание нормированной ошибки слежения за задержкой;  $\sigma_x = 2\sigma_\tau/\Delta$  – среднеквадратическое отклонение нормированной ошибки слежения за задержкой. Тогда при нормальном законе распределения ошибки слежения за задержкой  $\Delta t$  плотность распределения нормированной ошибки слежения за задержкой  $\Delta x$  имеет вид:

$$w(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[ -\frac{(\Delta x - \delta x)^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (2)$$

В общем случае гауссовское приближение (2) является хорошей аппроксимацией более точных описаний плотности распределения ошибки слежения за задержкой, например, закона распределения Тихонова [13, 29, 30]:

$$w(\Delta x) = \frac{\exp\left[\cos(2\pi\Delta x)/(2\pi\sigma_x)^2\right]}{I_0\left[1/(2\pi\sigma_x)^2\right]}, \quad (3)$$

где  $I_0(\cdot)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $\Delta x$  и  $\sigma_x$  соответствуют введенным параметрам нормированной ошибки слежения за задержкой и среднеквадратического отклонения нормированной ошибки слежения за задержкой при этом полагается, что систематическая ошибка слежения отсутствует ( $\delta x = \delta \tau = 0$ ).

Результаты расчетов плотности распределения ошибки слежения за задержкой в соответствии с выражениями (2) и (3) представлены в работах [22, 30, 31], в которых показано, что в области существенных значений ошибки слежения за задержкой оба закона распределения практически совпадают. На рисунке 3 приведены результаты расчетов плотности распределения ошибки слежения за задержкой в соответствии с выражениями (2) и (3) при  $\sigma_x = 0,1$  и  $\delta x = 0$  [22]. Кривая 1 соответствует нормальному закону распределения, кривая 2 – закону распределения Тихонова. В области существенных значений ошибки слежения за задержкой оба закона распределения практически совпадают.

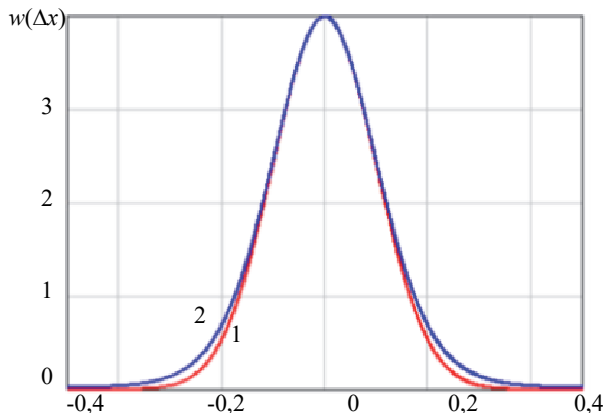


Рис. 3. Плотности нормального закона распределения и закона распределения Тихонова для нормированной ошибки слежения за задержкой

Близость к нормальному закону распределения ошибки слежения за задержкой подтверждается результатами



моделирования гибридной системы фазовой и тактовой синхронизаций фазоманипулированных сигналов с расширением спектра [17]. Закон распределения ошибки слежения за задержкой также стремится к нормальному закону и при цифровой реализации схемы слежения за задержкой и большом числе уровней квантования сигнала [32]. Поэтому в исследовании вероятности срыва слежения за задержкой при приеме фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП в условиях ошибок синхронизации использовался нормальный закон распределения (2) для нормированной ошибки слежения за задержкой.

Значения параметров  $\sigma_\tau$  и  $\delta\tau$  могут быть связаны с параметрами схемы слежения за задержкой и условиями приема сигналов, в частности с динамикой изменения задержки принимаемого сигнала, отношением сигнал/шум на входе приемника, видом и характеристиками дискриминатора (когерентный или некогерентный) и следящего фильтра (порядок фильтра) [6, 12, 13, 33-35]. При этом конкретные значения параметров схемы слежения за задержкой  $\sigma_\tau$  и  $\delta\tau$  и их сочетания могут в различных условиях приема сигналов обеспечиваться при использовании следящих фильтров и дискриминаторов с различными характеристиками.

При задании параметров  $\sigma_\tau$  и  $\delta\tau$  также должно учитываться то обстоятельство, что при приеме фазоманипулированных сигналов на основе ПСП в системе синхронизации происходит слежение как за задержкой, так и за частотой и фазой принимаемых сигналов, что находит отражение в использовании комбинированных систем синхронизации, состоящих из нескольких подсистем [6, 19, 33, 35]. Ошибка слежения за задержкой и параметры  $\sigma_\tau$  и  $\delta\tau$  в общем случае зависят от параметров, совместно функционирующих со схемой слежения за задержкой систем частотной и фазовой автоподстройки. Так, снижение ошибки слежения за задержкой принимаемых сигналов может быть обеспечено применением комплексной системы слежения, осуществляющей оптимальную оценку задержки принимаемого сигнала на основе совместного (комплексного) использования информации, содержащейся в его огибающей и фазе высокочастотного колебания [27,29].

В рамках используемого подхода для статистического описания ошибок слежения за задержкой в соответствии с выражением (2) может быть проведен анализ вероятности срыва слежения  $P_C$  в схеме слежения за задержкой в выбранном диапазоне изменения нормированных параметров  $\sigma_x$  и  $\delta x$  для заданных характеристик точности слежения за задержкой – случайной  $\sigma_\tau$  и

систематической  $\delta\tau$  составляющих ошибки слежения. Это позволяет аналитически исследовать влияние характеристик схемы слежения за задержкой принимаемого сигнала на вероятность срыва слежения  $P_C$  и определить условия ее минимизации или достижения требуемых значений, определяющих устойчивость системы синхронизации и помехоустойчивость передачи информации в РЭС с шумоподобными фазоманипулированными сигналами на основе ПСП. Очевидно, что при этом не учитывается возможность срыва слежения по другим параметрам сигнала, и для определения вероятности срыва слежения в комбинированной системе синхронизации необходимо провести аналогичные исследования для всех входящих в ее состав подсистем.

Выбранный показатель устойчивости слежения за задержкой – вероятность срыва слежения – определяется вероятностью выхода ошибки слежения  $\Delta\tau$  за пределы рабочего участка  $[-\Delta/2, \Delta/2]$  дискриминационной характеристики дискриминатора следящего фильтра:  $P_C = P(\Delta\tau < -\Delta/2) + P(\Delta\tau > \Delta/2)$ . Для гауссовской плотности распределения ошибки слежения за задержкой получаем:

$$P_C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau} \int_{-\infty}^{-\Delta/2} \exp\left[-\frac{(\Delta\tau - \delta\tau)^2}{2\sigma_\tau^2}\right] d\Delta\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau} \int_{\Delta/2}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\Delta\tau - \delta\tau)^2}{2\sigma_\tau^2}\right] d\Delta\tau, \quad (4)$$

где  $\Delta$  – ширина дискриминационной характеристики дискриминатора следящего фильтра, осуществляющего слежение за задержкой принимаемого сигнала при ее изменении в диапазоне  $-\Delta/2 < \Delta\tau < \Delta/2$ .

Величина вероятности срыва слежения  $P_C$ , определяемая выражением (4), может быть выражена через гауссов интеграл ошибок:

$$P_C = 1 - \left[ \Phi_0\left(\frac{\Delta - 2\delta\tau}{2\sigma_\tau}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\Delta - 2\delta\tau}{2\sigma_\tau}\right) \right], \quad (5)$$

где  $\Phi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\right) d\mu$ . В отсутствие систематической составляющей ошибки слежения за задержкой ( $\delta\tau=0$ ) выражение (5)

сводится к виду  $P_C = 1 - 2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{2\sigma_\tau}\right)$ , а в отсутствии случайной составляющей ошибки слежения за задержкой ( $\sigma_\tau = 0$ ) – к виду  $P_C = \begin{cases} 0, & |\delta\tau| < \Delta/2, \\ 1, & |\delta\tau| \geq \Delta/2. \end{cases}$

При переходе к нормированной ошибке слежения за задержкой  $\Delta x$  выражение (5) для вероятности срыва слежения приводится к виду:

$$P_C = 1 - \left[ \Phi_0\left(\frac{1-\delta x}{\sigma_x}\right) - \Phi_0\left(\frac{-1-\delta x}{\sigma_x}\right) \right]. \quad (6)$$

В отсутствие систематической составляющей ошибки слежения за задержкой ( $\delta\tau=0$ ) выражение (6) сводится к виду  $P_C = 1 - 2\Phi_0(1/\sigma_x)$ , а в отсутствие случайной составляющей ошибки слежения за задержкой ( $\sigma_\tau=0$ ) – к виду  $P_C = \begin{cases} 0, & |\delta x| < 1, \\ 1, & |\delta x| \geq 1. \end{cases}$

Выражение (6) позволяет произвести анализ зависимости вероятности срыва слежения  $P_C$  от параметров схемы слежения за задержкой принимаемого сигнала при различных соотношениях между систематической  $\delta\tau$  и случайной  $\sigma_\tau$  составляющими ошибки слежения и шириной дискриминационной характеристики дискриминатора следящего фильтра  $\Delta$ , характеризуемых нормированными параметрами  $\delta x$  и  $\sigma_x$ . Кроме того, может быть проанализировано влияние на вероятность срыва слежения среднеквадратической ошибки слежения  $\varepsilon_\tau = \sqrt{\delta\tau^2 + \sigma_\tau^2}$  или нормированной среднеквадратической ошибки слежения  $\varepsilon_x = \sqrt{\delta x^2 + \sigma_x^2}$ , которые рассматриваются в работах [18, 20] в качестве интегральных характеристик ошибок слежения за параметрами принимаемых сигналов и минимизируются в обобщенном фильтре, оптимальном по критерию минимума квадрата средней ошибки фильтрации [36, 37].

**4. Результаты исследования вероятности срыва слежения при приеме фазоманипулированных сигналов с расширением спектра при наличии ошибок слежения за задержкой.** В соответствии с выражением (7) были рассчитаны зависимости вероятности срыва слежения  $P_C$  при слежении за задержкой при

приеме фазоманипулированного сигнала с расширением спектра от значений нормированных параметров схемы слежения за задержкой  $\delta x$ ,  $\sigma_x$  и  $\varepsilon_x$ . В результате проведенных расчетов получены приведенные на рисунках 4–7 семейства зависимостей вероятности срыва слежения  $P_C$  от параметров  $\delta x$ ,  $\sigma_x$  и  $\varepsilon_x$  при их различных сочетаниях.

На рисунке 4 приведены графики расчетных зависимостей  $P_C$  от нормированной случайной ошибки слежения  $\sigma_x$  при различных значениях нормированной систематической ошибки слежения  $\delta x$  в широком диапазоне значений вероятности срыва слежения  $P_C < 0,5$  (а) и в области малых значений вероятности срыва слежения  $P_C < 0,1$  (б). Кривая 1 соответствует  $\delta x = 0$ , кривая 2 –  $\delta x = 0,2$ , кривая 3 –  $\delta x = 0,4$ , кривая 4 –  $\delta x = 0,6$ , кривая 5 –  $\delta x = 0,8$ , кривая 6 –  $\delta x = 1$ . С увеличением  $\sigma_x$  вероятность срыва слежения  $P_C$  увеличивается, а при фиксированной величине  $\sigma_x$  на величину  $P_C$  существенно влияет изменение величины  $\delta x$ . На всех зависимостях имеется область малых значений  $\sigma_x$ , в которой при  $\delta x = \text{const}$  вероятность срыва слежения  $P_C$  близка к 0, а при дальнейшем увеличении величины  $\sigma_x$  начинается монотонное увеличение вероятности срыва слежения  $P_C$ . Так, при  $\delta x \leq 0,4$  вероятность срыва слежения близка к 0 в диапазоне значений  $\sigma_x = 0 \dots 0,2$ . В наихудшем случае при  $\delta x = 1$  во всем диапазоне изменения  $\sigma_x$  величина  $P_C$  существенно не меняется и близка к 0,5.

На рисунке 5 приведены графики расчетных зависимостей  $P_C$  от нормированной систематической ошибки слежения  $\delta x$  при различных значениях нормированной случайной ошибки слежения  $\sigma_x$  в широком диапазоне значений вероятности срыва слежения  $P_C < 0,5$  (а) и в области малых значений вероятности срыва слежения  $P_C < 0,1$  (б). Кривая 1 соответствуют  $\sigma_x = 0$ , кривая 2 –  $\sigma_x = 0,2$ , кривая 3 –  $\sigma_x = 0,4$ , кривая 4 –  $\sigma_x = 0,6$ , кривая 5 –  $\sigma_x = 0,8$ , кривая 6 –  $\sigma_x = 1$ . С увеличением  $\delta x$  вероятность срыва слежения  $P_C$  увеличивается, а при фиксированной величине  $\delta x$  определяющее влияние на величину  $P_C$  оказывает изменение величины  $\sigma_x$ . На всех зависимостях имеется область малых значений  $\delta x$ , в которой при  $\sigma_x = \text{const}$  имеет место медленное увеличение вероятности срыва слежения  $P_C$ , а при дальнейшем увеличении величины  $\delta x$  начинается более резкое увеличение вероятности срыва слежения  $P_C$ . Так, при  $\sigma_x \leq 0,4$  вероятность срыва слежения медленно изменяется с увеличением  $\delta x$  в диапазоне значений  $\sigma_x = 0 \dots 0,4$ . В предельном случае при  $\sigma_x = 0$  увеличение нормированной систематической ошибки слежения в диапазоне  $0 \leq \delta x < 1$  не приводит к срыву слежения ( $P_C = 0$ ), а при  $\delta x \geq 1$  с вероятностью 1 происходит срыв слежения ( $P_C = 1$ ).

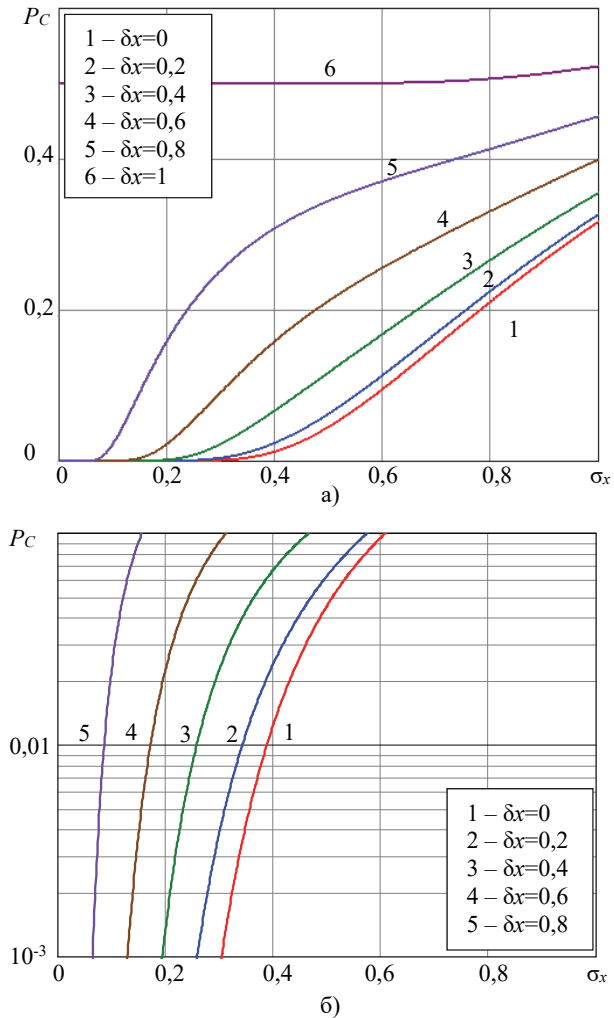


Рис. 4. Вероятность срыва слежения в зависимости от среднеквадратического отклонения нормированной ошибки слежения за задержкой: а)  $P_c < 0,5$ ; б)  $P_c < 0,1$

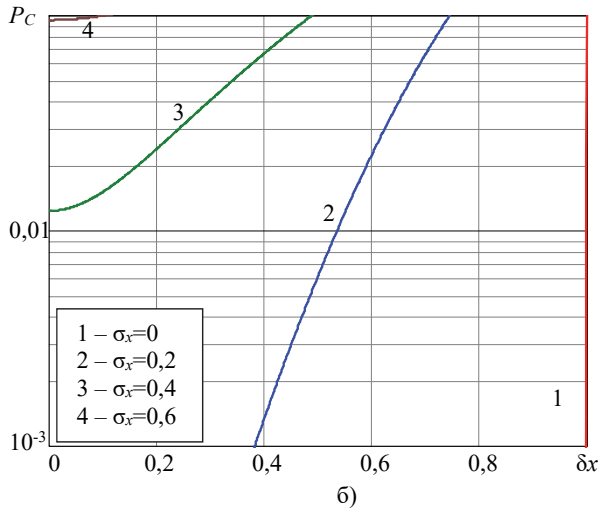
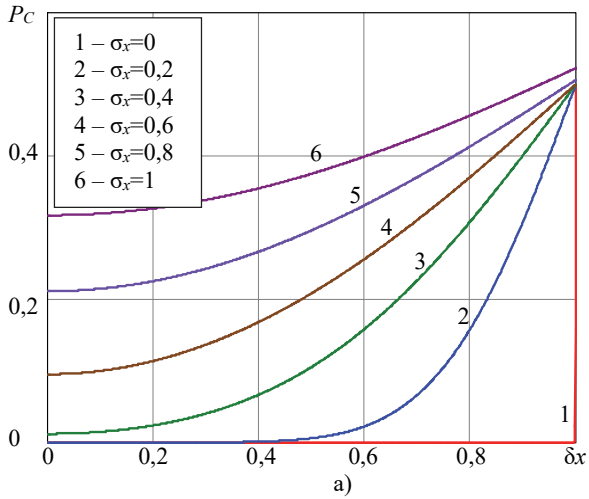


Рис. 5. Вероятность срыва слежения в зависимости от нормированной систематической ошибки слежения за задержкой: а)  $P_c < 0,5$ ; б)  $P_c < 0,1$

На рисунке 6 приведены графики расчетных зависимостей  $P_c$  от среднеквадратической нормированной ошибки слежения за задержкой  $\varepsilon_x$  при различных значениях систематической ошибки слежения  $\delta x$ . Значения случайной ошибки слежения  $\sigma_x$  задавались таким образом, чтобы при заданных значениях  $\varepsilon_x$  и  $\delta x$  выполнялось  $\varepsilon_x = \sqrt{\delta x^2 + \sigma_x^2}$ .

Кривая 1 соответствует  $\delta x=0$ , кривая 2 –  $\delta x=0,2$ , кривая 3 –  $\delta x=0,4$ , кривая 4 –  $\delta x=0,6$ , кривая 5 –  $\delta x=0,8$ . С увеличением  $\varepsilon_x$  и  $\delta x$  вероятность срыва слежения  $P_C$  увеличивается во всем диапазоне изменения  $\varepsilon_x$ . Для всех зависимостей характерно резкое увеличение вероятности срыва слежения, начиная с некоторого значения  $\varepsilon_x$ . Во всех случаях вероятность срыва слежения близка к 0 при  $\varepsilon_x < 0,3$ . Значение величины  $\varepsilon_x$ , начиная с которого начинается резкое увеличение вероятности срыва слежения, уменьшается с уменьшением величины  $\delta x$ . При  $\varepsilon_x = \text{const}$  это соответствует увеличению  $\sigma_x$ , поэтому приведенные зависимости свидетельствуют о доминирующем влиянии в рассмотренных условиях случайной составляющей  $\sigma_x$  среднеквадратической нормированной ошибки слежения за задержкой  $\varepsilon_x$  на вероятность срыва слежения  $P_C$ .

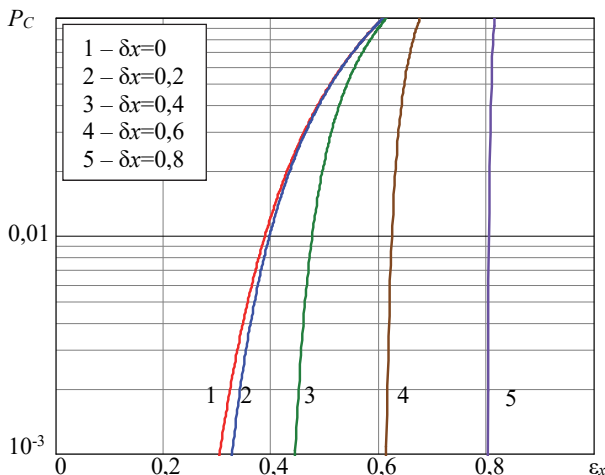


Рис. 6. Вероятность срыва слежения в зависимости от среднеквадратической нормированной ошибки слежения за задержкой

На рисунке 7 приведены графики расчетных зависимостей  $P_C$  от среднеквадратической нормированной ошибки слежения за задержкой  $\varepsilon_x$  при различных значениях случайной ошибки слежения  $\sigma_x$ . Значения систематической ошибки слежения  $\delta x$  задавались таким образом, чтобы при заданных значениях  $\varepsilon_x$  и  $\sigma_x$  выполнялось  $\varepsilon_x = \sqrt{\delta x^2 + \sigma_x^2}$ . Кривая 1 соответствует  $\sigma_x=0$ , кривая 2 –  $\sigma_x=0,2$ , кривая 3 –  $\sigma_x=0,4$ , кривая 4 –  $\sigma_x=0,6$ , кривая 5 –  $\sigma_x=0,8$ . С увеличением  $\varepsilon_x$  и  $\sigma_x$  вероятность срыва слежения  $P_C$  увеличивается на всем диапазоне изменения  $\varepsilon_x$ . Как и в

предыдущем случае, для всех зависимостей характерно резкое увеличение вероятности срыва слежения, начиная с некоторого значения  $\varepsilon_x$ , и вероятность срыва слежения близка к 0 при  $\varepsilon_x < 0,3$ . Значение величины  $\varepsilon_x$ , с которого начинается резкое увеличение вероятности срыва слежения, уменьшается с увеличением величины  $\sigma_x$ . При  $\varepsilon_x = \text{const}$  это соответствует уменьшению величины  $\delta x$ , поэтому приведенные зависимости подтверждают вывод о доминирующем влиянии в рассмотренных условиях случайной составляющей  $\sigma_x$  среднеквадратической нормированной ошибки слежения за задержкой  $\varepsilon_x$  на вероятность срыва слежения  $P_C$ . При этом в области значений  $0,3 \leq \varepsilon_x \leq 0,6$  возможно более сложное влияние составляющих  $\delta x$  и  $\sigma_x$  среднеквадратической нормированной ошибки слежения  $\varepsilon_x$  на величину вероятности срыва слежения  $P_C$ . В предельном случае при  $\sigma_x = 0$  увеличение среднеквадратической нормированной ошибки слежения  $0 \leq \varepsilon_x < 1$  не приводит к срыву слежения ( $P_C = 0$ ), а при  $\varepsilon_x \geq 1$  с вероятностью 1 происходит срыв слежения ( $P_C = 1$ ).

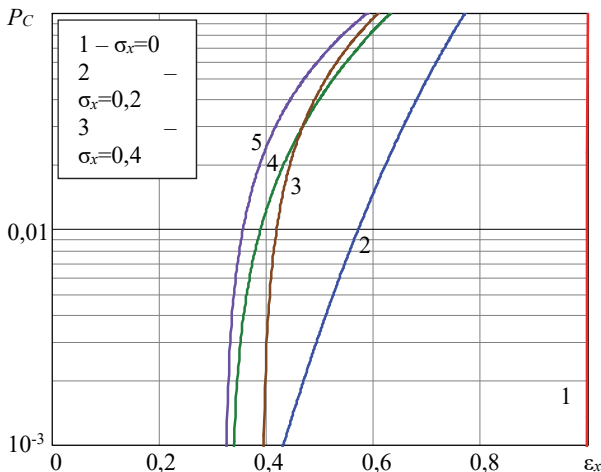


Рис. 7. Вероятность срыва слежения в зависимости от среднеквадратической нормированной ошибки слежения за задержкой

Представленные результаты расчетов иллюстрируют характер зависимости вероятности срыва слежения  $P_C$  от величин среднеквадратической  $\sigma_x$  и систематической  $\delta x$  составляющих ошибки слежения за задержкой и свидетельствуют о неоднозначности среднего квадрата нормированной ошибки слежения  $\varepsilon_x = \sqrt{\delta x^2 + \sigma_x^2}$  как



оптимизируемого показателя при минимизации вероятности срыва слежения в вероятностном фильтре. В отсутствие систематической ошибки слежения при  $\delta x=0$  выполняется  $\epsilon_x=\sigma_x$ , минимизация параметров  $\epsilon_x$  и  $\sigma_x$  оказывается эквивалентна и однозначно приводит к минимизации вероятности срыва слежения  $P_C$ . В то же время при наличии систематической ошибки ( $\delta x \neq 0$ ) вероятность срыва слежения  $P_C$  сложным образом зависит от сочетания параметров  $\delta x$  и  $\sigma_x$  при доминирующем влиянии на ее величину параметра  $\sigma_x$ , характеризующего случайную составляющую нормированной ошибки слежения за задержкой. Такая же неоднозначность будет иметь место и при использовании в качестве интегральной характеристики ошибок слежения за задержкой принимаемого сигнала величины  $\chi_\tau=3\sigma_\tau+\delta\tau$ , характеризующей диапазон изменения ошибки слежения [38], и соответствующей ей нормированной величины  $\chi_x=3\sigma_x+\delta x$ .

Отсюда следует необходимость совместного выбора параметров системы слежения за задержкой, определяющих величину случайной и систематической составляющих ошибки слежения, что согласуется с выводами работы [39], хотя в ней рассматривались соотношения между случайной и систематической составляющими ошибки слежения, при которых доминирующее влияние на вероятность срыва слежения оказывает систематическая (статическая) составляющая.

**5. Совместный выбор параметров схемы слежения за задержкой для обеспечения требуемой вероятности срыва слежения.** На практике требования к параметрам схемы слежения за задержкой  $\delta x$  и  $\sigma_x$  могут быть различными и зависят от назначения РЭС, использующей фазоманипулированные сигналы с расширением спектра на основе ПСП. В РЭС передачи информации слежение за задержкой и другими параметрами принимаемого сигнала необходимо для реализации оптимального приема и различения сигналов в условиях помех. В работах [2, 22, 40] показано, что в РЭС передачи информации с фазоманипулированными сигналами с расширением спектра на основе ПСП при наличии ошибок слежения за задержкой, характеризуемых значениями нормированных параметров  $\sigma_x < 0,1$  и  $\delta x < 0,2$ , ухудшение помехоустойчивости на уровне вероятности ошибочного приема символа  $10^{-5}$ – $10^{-6}$  составляет до 5 дБ. В измерительных РЭС от точности слежения за задержкой принимаемого сигнала зависит ошибка измерения дальности. В работах [6, 12] показано, что при приеме фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП в спутниковых радионавигационных системах при типичных для нормальных

условий функционирования отношениях сигнал/шум на входе приемника среднеквадратическая ошибка слежения за задержкой принимаемого сигнала (без учета последующей фильтрации измерений), выраженная в единицах дальности, составляет до 30 м, что при длительности символа ПСП  $\Delta t=1$  мкс соответствует ошибкам слежения за задержкой, характеризуемым значениями нормированного параметра  $\sigma_x < 0,1$ .

При указанных значениях нормированных параметров  $\sigma_x$  и  $\delta x$ , как следует из проведенных расчетов, обеспечивается малая вероятность срыва слежения –  $P_C < 10^{-4}$ . В то же время приведенные значения параметров  $\sigma_x$  и  $\delta x$  достигаются при благоприятных условиях приема сигналов – при отношениях сигнал/шум на входе приемника 15–20 дБ в РЭС передачи информации и 30–35 дБ в РЭС спутниковой навигации. При уменьшении отношения сигнал/шум на входе приемника составляющие ошибки слежения за задержкой  $\sigma_\tau$  и  $\delta \tau$  и вероятность срыва слежения  $P_C$  увеличиваются [28, 39], и возникает необходимость анализа совместного влияния параметров схемы слежения за задержкой  $\sigma_x$  и  $\delta x$  на величину  $P_C$ . При этом могут задаваться дополнительные ограничения на выбор параметров  $\sigma_x$  и  $\delta x$ , учитывающие их влияние на вероятности ошибочного приема символов и сообщений в РТС передачи информации и на ошибку измерения дальности в измерительных РТС.

На рисунке 7 приведены зависимости, характеризующие соотношения между нормированными среднеквадратическим отклонением  $\sigma_x$  и систематической ошибкой  $\delta x$  слежения за задержкой, при которых достигается фиксированная вероятность срыва слежения  $P_C$ . Кривая 1 соответствует вероятности срыва слежения  $P_C=10^{-1}$ , кривая 2 –  $P_C=10^{-2}$ , кривая 3 –  $P_C=10^{-3}$ , кривая 4 –  $P_C=10^{-4}$ . Приведенные зависимости позволяют сформулировать требования в отношении допустимых значений случайной и систематической составляющих ошибки слежения за задержкой и их сочетаний, обеспечивающих требуемую на практике надежность слежения. С увеличением требуемой величины  $P_C$  допустимые значения  $\sigma_x$  и  $\delta x$  увеличиваются при доминирующем влиянии на величину  $P_C$  величины  $\sigma_x$ . Увеличение величины  $\delta x$  от 0 до 0,2 требует уменьшения величины  $\sigma_x$  на 0,04–0,05 по сравнению со значением  $\sigma_x$ , соответствующим  $\delta x=0$ . Так, вероятность срыва слежения  $P_C=10^{-3}$  обеспечивается при  $\delta x=0$  и  $\sigma_x=0,3$ , при  $\delta x=0,2$  и  $\sigma_x=0,26$ , при  $\delta x=0,4$  и  $\sigma_x=0,2$ . Величина среднеквадратической нормированной ошибки  $\varepsilon_x$  в этих случаях оказывается различной и составляет 0,3, 0,33 и 0,45 соответственно. Вероятность срыва слежения  $P_C=10^{-4}$  обеспечивается при  $\delta x=0$  и

$\sigma_x=0,26$ , при  $\delta x=0,2$  и  $\sigma_x=0,22$ , при  $\delta x=0,4$  и  $\sigma_x=0,16$ . Величина  $\varepsilon_x$  в этих случаях составляет 0,26, 0,3 и 0,43 соответственно. Для достижимых в условиях больших отношений сигнал/шум значений  $\sigma_x \leq 0,2$  и  $\delta x \leq 0,2$  обеспечивается вероятность срыва слежения  $P_C < 10^{-4}$ . В то же время при увеличении случайной составляющей ошибки слежения при  $\sigma_x=0,3$  минимально достижимая (при  $\delta x \leq 0$ ) вероятность срыва слежения составляет  $P_C=10^{-3}$ , а при  $\sigma_x=0,4 - P_C=10^{-2}$ .

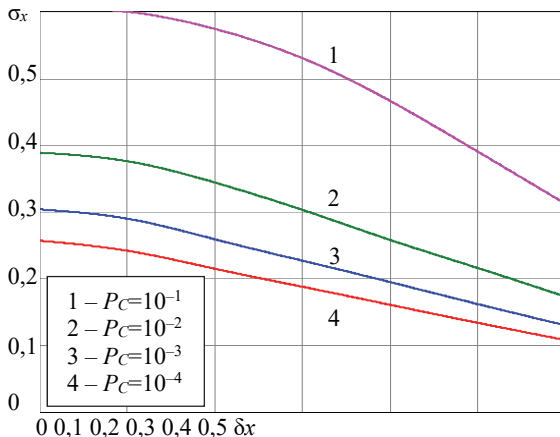


Рис. 7. Соотношения между нормированным среднеквадратическим отклонением и систематической ошибкой слежения за задержкой, при которых достигается фиксированная вероятность срыва слежения

Отметим, что полученные результаты относятся к случаю, когда срыв слежения обусловлен влиянием на работу дискриминатора схемы слежения за задержкой шумов и помех, не являющихся специально организованными уводящими помехами. Определение вероятности срыва слежения в случае воздействия на систему синхронизации уводящих помех имеет особенности, рассмотренные в работе [41].

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании систем синхронизации широкого класса РЭС, использующих рассмотренный тип фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП и предназначенных для работы в условиях, когда параметры принимаемых сигналов, в том числе задержка, изменяются в процессе функционирования РЭС, и система синхронизации необходима для непрерывного слежения за параметрами принимаемых сигналов. К числу подобных прикладных задач может быть отнесена, например, временная синхронизация

функционирования РТС взаимодействующих объектов при реализации дифференциальной и относительной навигации и многостанционного доступа в сетях связи [12, 33, 32-44].

**6. Заключение.** Устойчивая работа системы синхронизации РТС при приеме фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП возможна при условии высокой точности слежения за задержкой принимаемого сигнала. Неучет влияния ошибок синхронизации может привести к существенным погрешностям в оценках показателей качества функционирования РЭС. Результаты расчетов вероятности срыва слежения по задержкой при приеме фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП показывают, что в общем случае для обеспечения заданной минимально допустимой вероятности срыва слежения за задержкой в системе синхронизации необходим совместный выбор параметров системы слежения, определяющих величину случайной и систематической составляющих ошибки слежения с учетом ограничений, накладываемых условиями функционирования и особенностями технической реализации.

При принятом статистическом описании ошибок слежения за задержкой принимаемых фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП для надежной синхронизации, характеризуемой вероятностью срыва слежения  $P_C=10^{-4}$ , необходимо, чтобы нормированное среднеквадратическое отклонение и нормированная систематическая ошибка слежения за задержкой составляли  $\sigma_x \leq 0,2$  и  $\delta x \leq 0,2$ . При этом в общем случае имеет место неоднозначность среднего квадрата нормированной ошибки слежения  $\varepsilon_x = \sqrt{\delta x^2 + \sigma_x^2}$  как критерия оптимизации при минимизации вероятности срыва слежения, поскольку одним и тем же значениям  $\varepsilon_x$  при различных сочетаниях величин  $\sigma_x$  и  $\delta x$  соответствуют различные значения вероятности срыва слежения  $P_C$ .

Выполненные исследования были ориентированы на анализ характеристик систем синхронизации, осуществляющих слежение за параметрами принимаемых сигналов в приемном устройстве РТС, использующих фазоманипулированные сигналы с расширением спектра на основе ПСП. Слежение за задержкой принимаемых сигналов, как правило, рассматривается в качестве основной задачи системы синхронизации таких РТС. Представленные результаты расчетов позволяют проанализировать влияние параметров схемы слежения за задержкой на вероятность срыва слежения при приеме фазоманипулированных сигналов на основе ПСП и сформулировать требования к указанным параметрам, обеспечивающие максимально

допустимую вероятность срыва слежения, которая является показателем устойчивости системы синхронизации. Вместе с тем анализ устойчивости слежения за задержкой фазоманипулированных сигналов с расширением спектра на основе ПСП может рассматриваться как одна из возможных областей применения полученных результатов. Аналогичным образом может быть проанализировано влияние параметров системы синхронизации РТС на вероятность срыва слежения за другими параметрами принимаемых сигналов. При этом в общем случае для обеспечения заданной максимально допустимой вероятности срыва слежения необходим совместный выбор параметров системы слежения с учетом ограничений, накладываемых условиями функционирования и особенностями технической реализации.

### Литература

1. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами // М.: Радио и связь. 1985. 384 с.
2. *Борисов В.И., Зинчук В.М., Лимарев Е.Е., Шестопалов В.И.* Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра прямой модуляцией псевдослучайной последовательностью // М.: РадиоСофт. 2011. 548 с.
3. *Alatabani L.E., Abdalla A.G.E.* FHSS, DSSS and hybrid DS/FH performance evaluation for VSAT // International Journal of Scientific & Technology Research. 2015. vol. 4. no. 9. pp. 58–62.
4. *Prakash D., Amaralingeswara R.* Mobile communication system using VHDL // EPRA International Journal of Multidisciplinary Research. 2018. vol. 4. no. 11. pp. 90–94.
5. *Галантерник Ю.М., Горюхи А.В., Калинин А.Ф.* Командно-измерительные и наземные комплексы управления космическими аппаратами // М.: МГУЛ. 2003. 200 с.
6. *Бакитько Р.В. и др.* ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования // М.: Радиотехника. 2010. 800 с.
7. *Mon K.M., Tun P.T., Shukla A.P.* Study and analysis on binary offset carrier (BOC) modulation in satellite navigation systems // IOSR Journal of Electronics and Communication Engineering. 2016. vol. 11. no. 5. pp. 115–123.
8. *Pashintsev V.P. et al.* Formation Algorithms and Properties of Binary Quasi-Orthogonal Code Sequence of Modern Satellite Systems // International Journal of Engineering & Technology. 2018. vol. 7. no. 4.38. pp. 1205–1209.
9. TC Synchronization and Channel Coding. Recommended Standard CCSDS 230.1-G-2. Green Book. Issue 2. Washington. DC: CCSDS. 2012.
10. Pseudo-Noise Ranging Systems. Informational Report CCSDS 414.0-G-2. Green Book. Issue 2. Washington. DC: CCSDS. 2014.
11. *Мишуров А.В., Панько С.П.* Использование международных стандартов при проектировании новых командно-измерительных систем космических аппаратов // Исследования наукограда. 2017. № 1. С. 11–15.
12. *Михайлов Н.В., Чистяков В.В.* Приемники спутниковой навигации космического базирования: архитектура и первичная обработка сигналов // Научная книга. 2014. 124 с.
13. *Тузев Г.И.* Статистическая теория приема сложных сигналов // Сов. Радио. 1977. 400 с.
14. *Журавлев В.И.* Поиск и синхронизация в широкополосных системах // М.: Радио и связь. 1986. 240 с.

15. *Khaing W.K. et al.* Implementation of code and carrier tracking loops for software GPS receivers // *International Journal of Scientific & Technology Research*. 2015. vol. 4. no. 6. pp. 353–359.
16. *Sudani S., Upadhyay D., Patidar P.* Implementation of acquisition and tracking algorithms of spread spectrum signals in high dynamic scenario // *International Journal of Current Advanced Research*. 2016. vol 5. no. 3. pp. 643–648.
17. *Шахтарин Б.И., Сидоркина Ю.А., Кульков И.А.* Моделирование гибридной системы фазовой и тактовой синхронизации ФМ-сигналов // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение»*. 2014. № 4. С. 123–134.
18. *Salido-Monzu D. et al.* Delay tracking of spread-spectrum signals for indoor optical ranging // *Sensors*. 2014. vol. 14. pp. 23176–23204.
19. *Коровин А.В., Миронов В.А., Новиков А.А., Червань Д.А.* Синтез дискриминатора схемы совместного слежения за задержкой перспективных навигационных сигналов ГЛОНАСС // *Антенны*. 2017. № 7. С. 40–68.
20. *Gang F., Ting Y., Guoxiang G.* Research on tracking of spread spectrum PN code signal // *Proceedings of the 5th International Conference on Machinery, Materials and Computing Technology (ICMMCT 2017)*. Beijing: Atlantis Press. 2017. pp. 506–509.
21. *Abbound I.K., Kunbar L.A. Hassan A.S.* Synchronization in DSSS system // *International Review of Applied Sciences and Engineering*. 2020. vol. 11. no. 2. pp. 88–94.
22. *Мальцев Г.Н., Евтеев А.В.* Исследование помехоустойчивости радиотехнических систем передачи информации с шумоподобными фазоманипулированными сигналами при наличии ошибок синхронизации по задержке // *Информационно-управляющие системы*. 2019. № 3. С. 105–113.
23. *Ботов В.А., Казаков Л.Н., Селянская Е.А., Соловьев Д.М.* Экспериментальные исследования предельно достижимых параметров скрытного радиоканала управления подвижными объектами в условиях многолучевого распространения // *Вестник СибГУТИ*. 2016. № 3. С. 57–65.
24. *Li A. et al* Code synchronization algorithm based on segment correlation in spread spectrum communication // *Algorithms*. 2015. vol. 4. no. 4. pp. 870–894.
25. *Mintas Parveen C.M.* Code selection with application to spread spectrum systems based on correlation properties // *International Journal of Advanced Research in Computer and Communication Engineering*. 2015. vol. 4. no. 6. pp. 348–351.
26. *Zhang Z., Lei J.* A detecting algorithm of DSSS signal based on auto-correlation estimation // *IEEE 2nd Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference*. Chongqing. 2017. pp. 137–141.
27. *Шахтарин Б.И.* Анализ систем синхронизации при наличии помех // М.: Горячая линия–Телеком. 2016. 360 с.
28. *Млечин В.В.* Теория радиоэлектронного преодоления. Анализ воздействия помех на радиотехнические системы и устройства // М.: Радиотехника. 2009. 976 с.
29. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем // М.: Радио и связь. 1991. 608 с.
30. *Шахтарин Б.И., Асланов Т.Г.* Статистическая динамика фазовой автоподстройки второго порядка при воздействии комбинированных помех // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2012. № 5. С. 1–10.
31. *Ganesavadivu S., Veancy B.J., Yogesh P.* Synchronization error suppression and precoder design OFDM channel // *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2015. vol. 10. no. 7. pp. 3251–3255.
32. *Sheen W.-H., Chang M.-J., Wu C.-S.* Performance analysis of noncoherent digital delay locked loops for direct sequence spread spectrum systems with Doppler shift and quantized adaptation // *IEEE Transactions on wireless Communications*. 2004. vol. 3. no. 6. pp. 2108–2118.

33. *Жодзишский М.И., Курьин Р.В.* Исследование свойств систем раздельной и совместной фазовой синхронизации и оценки позиции и скорости движения приемников ГНСС // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2017. № 1. С. 45–50.
34. *Перов А.И.* Алгоритмы контроля режима слежения за задержкой в аппаратуре спутниковой навигации // Радионавигационные технологии // М.: Радиотехника. 2019. Вып. 8. С. 25–30.
35. *Бурков В.Д., Гинкул Д.И.* Процесс синхронизации синхронной радиолинии командно-измерительной системы // Лесной вестник. 2015. № 1. С. 89–96.
36. *Кириллов С.Н., Бузыкканов С.Н.* Методы многокритериального синтеза алгоритмов цифровой обработки сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 1. С. 3–7.
37. *Sun X., Qin H., Niu J.* Comparison and analysis of GNSS signal tracking performance based on Kalman filter and traditional loop // WSEAS Transactions on Signal Processing. 2013. vol. 9. pp. 99–108.
38. *Shaoshuai W., Zebo Z., Gang F.* Tracking technology on phase of PN code in spread spectrum communication // Advances in Engineering Research. Vol. 67. Proceedings of the 3th Conference on Materials Engineering, Manufacturing Technology and Control (ICMEMTC-2016). 2016. pp. 546–549.
39. *Баулин П.З., Кобелев М.А., Курьянов А.И.* К оценке помехозащищенности радиосистем с широкополосными сигналами // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2015. № 1. С. 42–46.
40. *Deshmukha S., Bhosleb U.* Performance evaluation of spread spectrum system using different modulation schemes // Procedia Computer Science Vol. 85. International Conference on Computational Modelling and Security (CMS-2016). 2016. pp. 176–182.
41. *Лукьянчиков В.Д., Ливенцев В.В., Сергеенко А.И.* Помехоустойчивость когерентного приема фазоманипулированных широкополосных сигналов с поляризационным кодированием при неидеальной временной и фазовой синхронизации // Известия вузов России. Радиоэлектроника. 2013. № 3. С. 3–10.
42. *Белов С.П., Жиялков Е.Г., Белов А.С., Рачинский С.А.* Об одном способе цикловой синхронизации широкополосных сигналов / Научные ведомости. Серия «Экономика. Информатика» // БелГУ. 2015. С. 187–190.
43. *Pinto L. R., Almeida L.* A robust approach to TDMA synchronization in aerial networks // Sensors. 2018. vol. 18. no. 12. pp. 1–18.
44. *Abdulhamid M., Omar H.* Code tracking of DSSS signal over AWGN channel // Scientific Bulletin of the Electrical Engineering Faculty. 2019. vol. 18. no. 1. pp. 13–17.

**Мальцев Георгий Николаевич** – д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры, кафедра космических радиотехнических систем, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: космические радиотехнические системы и комплексы, системы сбора и передачи информации, обработка сигналов в радиотехнических и оптико-электронных системах. Число научных публикаций – 300. vka@mil.ru; ул. Ждановская, 13, 197082, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812) 347-95-32; факс: +7(812) 237-12-49.

**Евтеев Андрей Владимирович** – канд. техн. наук, начальник научно-исследовательской лаборатории, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: космические радиотехнические системы и комплексы, системы передачи информации, обработка сигналов в радиотехнических системах. Число научных публикаций – 25. evtееv30@mil.ru; ул. Ждановская, 13, 197082, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812) 347-95-32; факс: +7(812) 237-12-49.

G. MALTSEV, A. EVTEEV

## STABILITY OF TRACKING THE DELAY OF PHASE-SHIFT KEYED SIGNALS WITH SPECTRUM EXPANDING IN SYNCHRONIZATION SYSTEMS OF RADIO ENGINEERING SYSTEMS

---

*Maltsev G., Evteev A. Stability of Tracking the Delay of Phase-shift Keyed Signals with Spectrum Expanding in Synchronization Systems of Radio Engineering Systems.*

**Abstract.** The issues of ensuring the stability of delay tracking in synchronization systems of radio engineering systems when receiving phase-shift keyed signals with spectrum expansion based on pseudorandom sequences are considered. When working with moving objects, the delay of the received signal continuously changes, synchronization errors occur, and the quality of signal reception largely depends on the stability of the tracking scheme for the delay, characterized by the probability of tracking failure. Delay tracking is usually considered as the main task of the synchronization system of the considered radio systems with phase-manipulated signals with spectrum expansion based on pseudo-random sequences.

The effect of synchronization errors when tracking the delay of a received phase-shift keyed signal with a spectrum extension based on pseudorandom sequences on the probability of tracking failure is studied. The calculation method is used to obtain families of dependences of the probability of tracking failure on the values of random and systematic components of the delay tracking error, normalized to the capture band of the time discriminator of the delay tracking scheme for various combinations of these parameters. The areas of weak and strong influence of the value of tracking errors over the delay of the received signal on the probability of tracking failure are determined. The nature of impact of random and systematic components of tracking error on the probability of failure of tracking was analyzed and it was found that in the General case is the ambiguity of normalized mean square of tracking error as the optimization criterion while minimizing the likelihood of tracking loss.

Calculations performed for a wide range of changes in the normalized delay tracking errors show that to ensure a given quality of signal reception in a radio system with phase-shift keyed signals with spectrum expansion based on pseudorandom sequences, a joint choice of parameters of the delay tracking system that determine the value of random and systematic components of the tracking error is necessary. The results obtained can be used to analyze the characteristics of synchronization systems that monitor the parameters of received signals with a spectrum extension, and to justify the technical solutions of the synchronization system that provide the required quality of signal reception in information and measurement of radio-electronic systems.

**Keywords:** Phase-shift Keyed Signals with Spectrum Extension, Synchronization, Delay Tracking Scheme, Probability of Tracking Failure

---

### References

1. Varakin L.E. *Sistemy svyazi s shumopodobnymi signalami* [Communication systems with noise-like signals]. M.: Radio i svyaz'. 1985. 384 p. (In Russ.).
2. Borisov V.I., Zinчук V.M., Limarev A.E., Shestopalov V.I. *Pomehozashhishhennost' sistem radiosvyazi s rasshireniem spektra prjamoj moduljaciej psevdosluhajnoj posledovatel'nost'ju* [Hindrance immunity of radio communication systems with spreading of the spectrum by direct modulation with a pseudo-random sequence]. M.: Radio i svyaz'. 2011. 548 p. (In Russ.).



3. Alatabani L.E., Abdalla A.G.E. FHSS, DSSS and hybrid DS/FH performance evaluation for VSAT. *International Journal of Scientific & Technology Research*. 2015. vol. 4. no. 9. pp. 58–62.
4. Prakash D., Amaralingeswara R. Mobile communication system using VHDL. *EPRA International Journal of Multidisciplinary Research*. 2018. vol. 4 no. 11. pp. 90–94.
5. Galanternik Yu.M., Gorish A.V., Kalinin A.F. *Komandno-izmeritel'nye sistemy i nazemnye komplekсы upravlenija kosmicheskimi apparatami* [Command and measuring systems and ground-based spacecraft control complexes]. M.: MGUL. 2003. 200 p. (In Russ.).
6. Bakitko R.V., Boldenkov E.N., Bulavsky N.T. i dr. *GLONASS. Principy postroenija i funkcionirovanija* [GLONASS. Principles of construction and operation]. M.: Radiotekhnika. 2010. 800 p. (In Russ.).
7. Mon K.M., Tun P.T., Shukla A.P. Study and analysis on binary offset carrier (BOC) modulation in satellite navigation systems. *IOSR Journal of Electronics and Communication Engineering*. 2016. vol. 11. no. 5. pp. 115–123.
8. Pashintsev V.P. et al. Formation Algorithms and Properties of Binary Quasi-Orthogonal Code Sequence of Modern Satellite Systems. *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. vol. 7. no. 4.38. pp. 1205–1209.
9. TC Synchronization and Channel Coding. Recommended Standard CCSDS 230.1-G-2. Green Book. Issue 2. Washington. DC: CCSDS. 2012.
10. Pseudo-Noise Ranging Systems. Informational Report CCSDS 414.0-G-2. Green Book. Issue 2. Washington. DC: CCSDS. 2014.
11. Mishurov A.V. Panko S.P. [Using of international standards in the design of new command-measuring systems of spacecrafts]. *Issledovaniya naukostrani – Science-city research*. 2017. vol. 1. pp. 11–15 (In Russ.).
12. Mikhailov N.V., Chistyakov V.V. *Priemniki sputnikovoj navigacii kosmicheskogo bazirovanija: arhitektura i pervichnaja obrabotka signalov* [Space-based satellite navigation receivers: architecture and primary signal processing]. Nauchnaja kniga. 2014. 124 p. (In Russ.).
13. Tuzov G.I. *Stisticheskaja teorija priema slozhnyh signalov* [Statistical theory of reception of complicated signals]. M.: Sov. Radio. 1977. 400 p. (In Russ.).
14. Zhuravlev V.I. *Poisk i sinhronizacija v širokopolosnyh sistemah* [Search and synchronization in broadband systems]. M.: Radio i svyaz'. 1986. 240 p. (In Russ.).
15. Khaing W.K. et al. Implementation of code and carrier tracking loops for software GPS receivers. *International Journal of Scientific & Technology Research*. 2015. vol. 4. no. 6. pp. 353–359.
16. Sudani S., Upadhyay D., Patidar P. Implementation of acquisition and tracking algorithms of spread spectrum signals in high dynamic scenario. *International Journal of Current Advanced Research*. 2016. vol 5. no. 3. pp. 643–648.
17. Shakhtarin B.I., Sidorkina Yu.A., Kulkov I.A. [Modeling of hybrid system of phase and clock synchronization of FM-signals]. *Vestnik MGTU imeni N.E.Baumana. Seriya «Priborostroenie» – Messenger MGTU named after N.E.Baumana. Series «Instrumentation»*. 2014. vol. 4. pp. 123–134 (In Russ.).
18. Salido-Monzu D. et al. Delay tracking of spread-spectrum signals for indoor optical ranging. *Sensors*. 2014. vol. 14. pp. 23176–23204.
19. Korovin A.V., Mironov V.A., Novikov A.A., Chervan D.A. [Synthesis of discriminator of the joint tracking scheme for the delay of perspective GLONASS navigation signals]. *Antemy – Antennas*. 2017. vol. 7. pp. 40–68 (In Russ.).
20. Gang F., Ting Y., Guoxiang G. Research on tracking of spread spectrum PN code signal. Proceedings of the 5th International Conference on Machinery, Materials and Computing Technology (ICMMCT 2017). 2017. pp. 506–509.

21. Abboud I.K., Kunbar L.A. Hassan A.S. Synchronization in DSSS system. *International Review of Applied Sciences and Engineering*. 2020. vol. 11. no. 2. pp. 88–94.
22. Maltsev G.N., Evteev A.V. [Investigation of the noise immunity of radio engineering information transmission systems with noise-like phase-shifted signals in the presence of delay synchronization errors]. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy – Informacion management systems*. 2019. vol. 3. pp. 105–113 (In Russ.).
23. Botov V.A. Kazakov L.N. Selyanskaya E.A. Solovyev D.M. [Experimental studies of maximum achievable parameters of secretive radio channel of mobile objects control in conditions of multipath propagation]. *Vestnik SibGUTI – Messenger SibGUTI*. 2016. vol. 3. pp. 57–65 (In Russ.).
24. Li A. et al Code synchronization algorithm based on segment correlation in spread spectrum communication. *Algorithms*. 2015. vol. 4. no. 4. pp. 870–894.
25. Mintas Parveen C.M. Code selection with application to spread spectrum systems based on correlation properties. *International Journal of Advanced Research in Computer and Communication Engineering*. 2015. vol. 4. no. 6. pp. 348–351.
26. Zhang Z., Lei J. A detecting algorithm of DSSS signal based on auto-correlation estimation. *IEEE 2nd Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference*. Chongqing. 2017. pp. 137–141.
27. Shakhhtarin B.I. *Analiz sistem sinhronizacii pri nalichii pomeh* [Analysis of synchronization systems in the presence of hindrances]. M.: Gorjachaja liniya–Telekom. 2016. 360 p. (In Russ.).
28. Mlechin V.V. *Teorija radioelektronogo preodolenija. Analiz vozdeystvija pomeh na radiotekhnicheskie sistemy i ustrojstva* [Theory of electronic overcoming. Analysis of the impact of interference on radio systems and devices]. M.: Radiotekhnika. 2009. 976 p. (In Russ.).
29. Tihonov V.I., Harisov V.N. *Statisticheskij analiz i sintez radiotekhnicheskikh ustrojstv i sistem* [Statistical analysis and synthesis of radio engineering devices and systems]. M.: Radio i svyaz'. 1991. 608 p. (In Russ.).
30. Shakhhtarin B.I., Aslanov T.G. [Statistical dynamics of second-order phase-locked loop under the influence of combined hindrances]. *Nauka i obrazovanie: Nauchnoe izdanie MGTU imeni N.E.Baumana – Science and education: scientific publication of the Moscow State Technical University. N.E. Bauman*. 2012. vol. 5. pp. 1–10 (In Russ.).
31. Ganesavadivu S., Veancy B.J., Yogesh P. Synchronization error suppression and precoder design in OFDM channel. *ARPJN Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2015. vol. 10. no. 7. pp. 3251–3255.
32. Sheen W.-H., Chang M.-J., Wu C.-S. Performance analysis of noncoherent digital delay locked loops for direct sequence spread spectrum systems with Doppler shift and quantized adaptation. *IEEE Transactions on wireless Communications*. 2004. vol. 3. no. 6. pp. 2108–2118.
33. Zhodzishsky M.I., Kurylin R.V. [Study of properties of systems of single and joint phase synchronization and assessment of position and speed of movement of GNSS receivers]. *T-Comm: Telecommunicatsii i transport – T-Comm: Telecommunications and transport*. 2017. vol. 1. pp. 45–50 (In Russ.).
34. Perov A.I. [Algorithms for monitoring the delay tracking mode in satellite navigation equipment]. *Radionavigacionnye tehnologii – Radio navigation technology*. M.: Radiotekhnika. 2019. vol. 8. pp. 40–68 (In Russ.).
35. Burkov V.D., Ginkul D.I. [Synchronization process of synchronous radio line of command-measuring system]. *Lesnoy vestnik – Forest Bulletin*. 2015. vol. 1. pp. 89–96 (In Russ.).
36. Kirillov S.N., Buzykanov S.N. [Methods of multicriteria synthesis of algorithms of digital signal processing]. *Cifrovaja obrabotka signalov – Digital signal processing*. 2012. vol. 1. pp. 3–7 (In Russ.).

37. Sun X., Qin H., Niu J. Comparison and analysis of GNSS signal tracking performance based on Kalman filter and traditional loop. *WSEAS Transactions on Signal Processing*. 2013. vol. 9. pp. 99–108.
38. Shaoshuai W., Zebo Z., Gang F. Tracking technology on phase of PN code in spread spectrum communication. Proceedings of the 3th Conference on Materials Engineering, Manufacturing Technology and Control (ICMEMTC-2016). 2016. pp. 546–549.
39. Baulin P.Z., Kobelev M.A., Kupriyanov A.I. [To the assessment of the hindrance immunity of radio systems with broadband signals]. *Raketno-kosmicheskoe priborostroenie i informacionnyye systemy – Rocket and space instrumentation and information systems*. 2015. vol. 1. pp. 42–46 (In Russ.).
40. Deshmukha S., Bhosleb U. Performance evaluation of spread spectrum system using different modulation schemes. International Conference on Computational Modelling and Security (CMS-2016). 2016. pp. 176–182.
41. Lukyanchikov V.D., Liventsev V.V., Sergienko A.I. [Hindrance immunity of coherent reception of phase-shifted broadband signals with polarization coding for non-ideal time and phase synchronization]. *Izvestiya vuzov Rossii. Radioelektronika – Proceedings of Russian universities. Radio electronics*. 2013. vol. 3. pp. 3–10 (In Russ.).
42. Belov S.P., Zhilyakov E.G., Belov A.S., Rachinsky S.A. [About one method of frame synchronization of broadband signals]. *Nauchnye vedomosti. Seriya "Ekonomika. Informatika" – Scientific statements. Series "Economy. Informatics"*. BelGU. 2015. pp. 187–190 (In Russ.).
43. Pinto L. R., Almeida L. A robust approach to TDMA synchronization in aerial networks. *Sensors*. 2018. vol. 18. no. 12. pp. 1–18.
44. Abdulhamid M., Omar H. Code tracking of DSSS signal over AWGN channel // *Scientific Bulletin of the Electrical Engineering Faculty*. 2019. vol. 18. no. 1. pp. 13–17.

**Maltsev Georgy** – Ph.D., Dr.Sci., Professor, Professor of the Department, Department of Space Radio Engineering Systems, Military Space Academy of A.F. Mozhaysky (VKA of A.F. Mozhaisky). Research interests: space radio engineering systems and complexes, data collection and transmission systems, signal processing in radio engineering and optoelectronic systems. The number of publications – 300. vka@mil.ru; 13, Zhdanovskaya st., 197082, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812) 347-95-32; fax: +7(812) 237-12-49.

**Evteev Andrey** – Ph.D., Head of the Research Laboratory, Military Space Academy of A.F. Mozhaysky (VKA of A.F. Mozhaisky). Research interests: space radio engineering systems and complexes, information transmission systems, signal processing in radio engineering systems. The number of publications – 25. evteev30@mil.ru; 13, Zhdanovskaya st., 197082, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812) 347-95-32; fax: +7(812) 237-12-49.

В.И. Горбулин, Е.В. Котяшов, В.А. Чернявский, Н.В. Груздев  
**УДЕРЖАНИЕ ГЕОСТАЦИОНАРНОГО СПУТНИКА В  
ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ СТОЯНИЯ С УЧЕТОМ  
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ**

*Горбулин В.И., Котяшов Е.В., Чернявский В.А., Груздев Н.В. Удержание геостационарного спутника в заданной точке стояния с учетом дополнительных фазовых ограничений.*

**Аннотация.** Время активного существования орбитальных средств на геостационарной орбите, к которым относятся стационарные искусственные спутники Земли различного назначения, может составлять более 15 лет. Вместе с тем в современных условиях наращивания орбитальной группировки возрастает и количество объектов космического мусора, в том числе и на геостационарной орбите: завершившие активное существование спутники, которые по каким-либо причинам не были переведены на орбиту захоронения; осколки спутников, образованные в результате столкновения с метеорами или аварий. Это повышает вероятность столкновения с ними рабочих спутников. Перечисленные факторы обуславливают необходимость рассматривать задачу удержания стационарных искусственных спутников Земли в окрестности точки стояния в условиях недопущения столкновения с объектами космического мусора, при этом затраты рабочего тела не должны существенно возрастать.

При проектировании новых космических аппаратов, особенно с большими сроками эксплуатации, особое внимание уделяется рациональному размещению двигателей. Предполагается, что спутники оснащаются несколькими двигателями коррекции, которые позволяют создавать управляющие ускорения только в нескольких направлениях, не меняя ориентации самого спутника. То есть при решении задачи считается, что коррекция параметров орбиты спутника не влияет на его ориентацию. Это условие является жестким ограничением в синтезе управления спутником.

В рассматриваемом методическом подходе в качестве функционала от управления задаются затраты рабочего тела, необходимые для совершения очередной коррекции, после которой на интервале глубины прогноза не будет опасных удалений от точки стояния и сближений. Это позволяет избежать ситуаций, когда решение об управлении принимается уже после выхода стационарного спутника за пределы окрестности точки стояния, и прежде всего, сближения с объектами космического мусора на расстояние, меньшее порогового.

Представлены результаты моделирования, которые говорят об эффективности предложенных решений. Важным преимуществом является рассмотрение движения стационарного спутника не только относительно точки стояния, но и нескольких других объектов, как управляемых, так и неуправляемых, которые находятся в ее окрестности. При этом количество объектов может быть любым.

**Ключевые слова:** точка стояния, управление удержанием, пороговая дистанция, критическая ситуация, глубина прогноза, опасное удаление, опасное сближение

**1. Введение.** В процессе полета на стационарные искусственные спутники Земли (СИСЗ) помимо центральной составляющей гравитационного поля Земли воздействует целый ряд возмущающих факторов. Основными из них являются [1]:

– составляющие гравитационного притяжения Земли, обусловленные наличием полярного сжатия и аномалий геопотенциала;

- гравитационное притяжение Солнца и Луны;
- прямое световое давление.

Чтобы решить большинство прикладных задач [2, 3], достаточно учитывать эти три возмущающих фактора, однако также может учитываться и влияние отраженного светового давления, приливных деформаций Земли, сил притяжения других планет Солнечной системы, океанских приливов. Действие этих возмущений обуславливает невозможность идеального удержания СИСЗ в точке стояния на геостационарной орбите (ГСО). В связи с этим реализуемой остается только квазистационарная орбита, позволяющая находиться СИСЗ в окрестности точки стояния с учетом решаемых им задач. При этом необходимо постоянно искусственно поддерживать требуемые значения параметров орбиты СИСЗ, находящихся на ГСО. Это связано с практической невозможностью абсолютно точной реализации условий стационарности СИСЗ. Для компенсации смещений СИСЗ и поддержания параметров орбиты наиболее близко к идеальным стационарным значениям в районе заданной точки стояния необходимо осуществлять специальное управление движением центра масс КА, заключающееся в периодическом регулярном проведении корректирующих эти параметры маневров с помощью бортовых двигательных установок [1]. Целью управления в данном случае является регулярная компенсация влияния вековых и усредненных периодических составляющих возмущений параметров орбиты [4, 8, 10-12].

Кроме того, учитывая современные тенденции наращивания орбитальной группировки, на ГСО возникла ситуация, когда в окрестности одной точки стояния размещаются несколько СИСЗ, а также имеются СИСЗ, которые завершили свое активное существование и по каким-либо причинам не были переведены на орбиту захоронения [13, 14]. Все эти факторы обуславливают необходимость рассматривать не только задачу удержания СИСЗ в окрестности точки стояния, но и задачу уклонения от столкновения с объектами космического мусора (ОКМ) и другими СИСЗ.

При рассмотрении широкого спектра вопросов, касающихся оптимизации движения СИСЗ с двигателем малой тяги, большое внимание уделяется методам оптимизации траекторий таких СИСЗ. При этом основные усилия чаще всего направлены на регуляризацию процесса решения краевых задач оптимального управления. Применение принципа максимума Понтрягина позволяет свести оптимизационную задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой и составляет основную трудность при использовании непрямых методов. Трудности

решения таких краевых задач носят принципиальный характер, связанный с вопросами существования, единственности и ветвления решений. Методические сложности связаны с вычислительной неустойчивостью и с ограниченностью области сходимости численных методов решения. Традиционно для решения задач оптимизации траекторий СИЗ с двигательными установками малой тяги используются различные модификации метода Ньютона. Основной трудностью при использовании этого класса методов является определение начального приближения, достаточно близкого к оптимальному решению. Современные численные методы оптимизации не могут гарантировать получение решения, сходимости используемых итерационных процедур.

Таким образом, необходимо разрабатывать методы, позволяющие решать задачу расчета программы маневров, которая обеспечивала бы безопасное функционирование СИЗ. То есть определить такое управление СИЗ по коррекции орбитальных параметров без существенного увеличения расхода запасов характеристической скорости, которое позволит избежать опасных сближений с ОКМ.

## 2. Основные понятия и постановка задачи исследования.

Математическую постановку задачи управления движением геостационарного СИЗ можно сформулировать следующим образом.

Пусть на момент времени  $t_0$  известна оценка  $q_0$  текущих параметров движения геостационарного СИЗ, а также характеризующая ее корреляционная матрица погрешностей  $K_{q_0}$ .

Центр допустимых положений расположен в плоскости экватора с гринвичской долготой  $\lambda_{ст}$ . Движение СИЗ описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u, \xi, t), \quad (1)$$

где  $x$  – вектор фазовых координат;  $u$  – вектор управления,  $u \in U$  ( $U$  – множество допустимых управлений);  $\xi$  – вектор возмущений, действующих на СИЗ.

Радиус окрестности, в которой СИЗ должен находиться, задан величиной  $\rho_{пред\ max}$ . При этом СИЗ не должен сближаться на пороговую дистанцию  $\rho_{пред\ min}$  с ОКМ, находящимися вблизи заданной ячейки.

Так как целью управления является удержание СИСЗ в окрестности точки стояния и избежание опасных сближений с ОКМ, то в качестве оптимизируемого параметра можно взять затраты рабочего тела, необходимые для совершения очередной коррекции, после которой СИСЗ на интервале прогноза  $T_{\text{прог}}$  не будет опасных удалений и сближений. Выбор функционала можно обосновать еще тем, что срок активного существования современных аппаратов помимо надежности бортового оборудования определяется запасами топлива и должен достигать 15 и более лет [1].

Требуется определить такое управление  $u^*(t, \xi, x_{j\text{СИСЗ}})$  на этапе очередной коррекции, которое обеспечит минимальные затраты рабочего тела  $\Delta m$  и удержание СИСЗ в окрестности точки стояния на заданном интервале времени  $T_{\text{прог}}$  :

$$u^*(t, \xi, x_{j\text{СИСЗ}}) = \underset{u(t, \xi) \in U, \rho(t) \leq \rho_{\text{пред max}}, \rho_j(t) > \rho_{\text{пред min}}, t \in [t_0, T_{\text{прог}}]}{\arg \min} \Delta m(u(t, \xi, x_{j\text{СИСЗ}})), \quad (2)$$

где  $\rho(t)$  – функция дальности от СИСЗ до точки стояния;  $x_{j\text{СИСЗ}}$  – вектор фазовых координат  $j$ -го СИСЗ,  $j = \overline{1, J}$ ;  $\rho_j(t)$  – расстояние от управляемого СИСЗ до  $j$ -го ОКМ или другого СИСЗ.

Следует подробнее остановиться на определении множества допустимых управлений  $U$ .

При проектировании новых космических аппаратов, особенно с большими сроками эксплуатации, большое внимание уделяется рациональному размещению двигателей [4, 11]. Рассматривается случай, когда СИСЗ оснащаются несколькими двигателями коррекции, позволяющими создавать управляющие ускорения только в нескольких направлениях, не меняя ориентации самого СИСЗ. То есть при совершении коррекций параметров орбиты ориентация самого СИСЗ остается неизменной в орбитальной системе координат.

Таким образом, вектор управления  $u(t)$  является кусочно-постоянной функцией, то есть управление  $u$  постоянно для всех рассматриваемых  $t$ , за исключением конечного числа моментов времени, где функция  $u(t)$  терпит разрывы первого рода.

Множество  $U$  определяется расположением корректирующих двигателей, количеством комбинаций и временем их одновременной работы. То есть управление  $u(t)$  можно выразить следующим образом:

$$u(t) = u(o_x, o_y, o_z, F, t_n, t_k), \quad (3)$$

где  $o_x, o_y, o_z$  – составляющие орта суммарного вектора тяги в орбитальной системе координат;  $F$  – модуль вектора тяги, создаваемого одним или несколькими двигателями коррекции;  $t_n, t_k$  – моменты времени начала и окончания активного участка.

Следует отметить, что при проведении маневра система парирует как действие внешних возмущающих моментов, так и управляющих моментов от двигателей малой тяги, выполняющих коррекцию. Поэтому для заданных моментов времени начала и окончания активного участка начальные условия по вектору кинетического момента перед каждым включением двигателей должны целенаправленно подготавливаться.

В данной статье функционирование системы углового движения не учитывается, а управление СИСЗ в части его угловой стабилизации является хоть и взаимосвязанной, но отдельной задачей.

**3. Определение условий выполнения корректирующего маневра.** В общем случае задача управления орбитой геостационарного СИСЗ сводится к управлению по гринвичской долготе и географической широте. Вместе с тем, данные параметры являются функциями элементов орбиты и, в первую очередь, сидерического периода, эксцентриситета и наклона. Поэтому управление движением СИСЗ может осуществляться изменением этих параметров [5-7, 21].

Вековое смещение СИСЗ по долготе определяется сидерическим периодом обращения. Эксцентриситет и наклонение орбиты обуславливают только периодические отклонения по широте и долготе. Однако из-за влияния гравитационных сил Солнца и Луны, а также солнечного давления помимо периодических возникают и вековые уходы наклона [9, 19, 20].

Долготные и широтные колебания имеют период примерно равный длительности звездных суток ( $T_{зв} = 86164,1$  с). Направление и характер движения СИСЗ относительно заданной точки стояния определяется начальным значением истинной аномалии. При этом основной вклад в периодическую составляющую колебаний дальности до абстрактной точки стояния вносит эллиптичность орбиты [12].



Важным аспектом при решении задачи удержания СИСЗ в окрестности заданной точки стояния является определение необходимой периодичности совершения корректирующих маневров. Она определяется по результатам прогнозирования параметров орбиты, выполняемого с использованием начальных условий, которые были получены при обработке траекторных измерений.

В качестве условия, определяющего необходимость выполнения коррекции, может служить превышение накопленного усредненного отклонения СИСЗ от точки стояния. Однако в данном случае решение об управлении принимается непосредственно перед выходом СИСЗ за пределы окрестности точки стояния, что может быть недопустимым. Это обусловлено тем, что на СИСЗ зачастую устанавливаются двигатели малой тяги, и длительность активных участков может быть значительной, а их экстренное осуществление невозможным в силу ограничений, накладываемых функционированием других систем СИСЗ. Для парирования таких ситуаций предлагается прогнозировать их возникновение на заданную глубину  $T_{\text{прог}}$  и планировать коррекции заранее [12]. В этом случае условие необходимости совершения коррекции можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \hat{\rho}(\hat{r}_{\text{ОКМ } j}(t), \hat{r}_{\text{УСИСЗ}}(t)) \leq \rho_{\text{порог min}}, \\ \hat{\rho}(\bar{r}_{\text{ТС}}(t), \hat{r}_{\text{УСИСЗ}}(t)) \geq \rho_{\text{порог max}}, \end{cases} \quad t \in [t_0, T_{\text{прог}}], \quad (4)$$

где  $\hat{r}_{\text{УСИСЗ}}(t)$ ,  $\hat{r}_{\text{ОКМ}}(t)$  – оценки радиусов-векторов управляемого СИСЗ и ОКМ соответственно;  $\bar{r}_{\text{ТС}}(t)$  – радиус-вектор точки стояния;  $t_0$  – момент времени, в который осуществляется проверка необходимости выполнения корректирующего маневра.

Такой подход позволяет избежать ситуаций, когда решение об управлении принимается уже после выхода СИСЗ за пределы окрестности точки стояния, и прежде всего, сближения с ОКМ на расстояние, меньшее порогового.

Задача (2) решается в случае, если в какой-либо момент времени на интервале  $t \in [t_0, T_{\text{прог}}]$  условие (4) выполняется, то есть когда возможно возникновение опасной ситуации: сближение с ОКМ или удаление от точки стояния.

На рисунке 1 показана графическая интерпретация выявления опасных сближений между управляемым СИСЗ и ОКМ. Из рисунка 1 видно, что опасным сближение считается, если дальность между управляемым СИСЗ и ОКМ с учетом ошибок определения их

параметров движения оказывается менее пороговой. Аналогичным образом определяются опасные удаления управляемого СИСЗ от точки стояния [8, 24, 25].

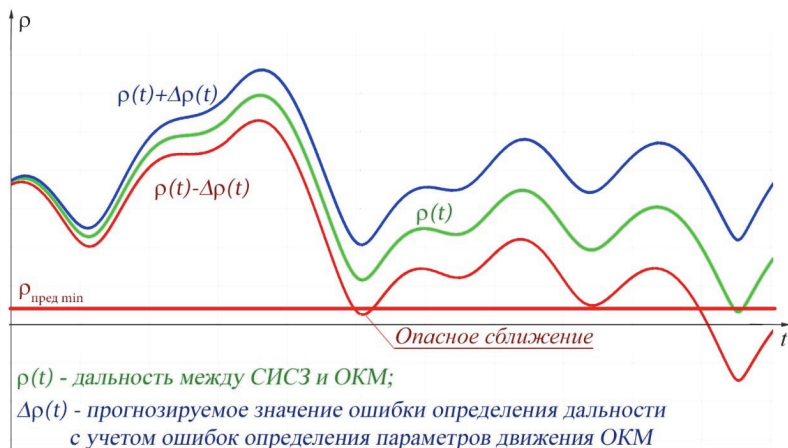


Рис. 1. Графическая интерпретация выявления опасных сближений между управляемым СИСЗ и ОКМ

Для заданной области допустимых управлений  $U$  основную сложность представляет выбор моментов времени начала и окончания активного участка, так как величина и направление тяги для  $k$ -го элемента  $u_k(t)$  являются постоянными. Наиболее предпочтительный путь решения данной задачи – выработка правила, позволяющего делать вывод о пригодности рассматриваемого момента времени для начала активного участка, а затем, в случае его пригодности, поиска оптимального момента времени для его окончания. Таким образом, для  $k$ -го элемента  $u_k(t)$  множества  $U$  необходимо найти такой момент времени  $t_n$  начала активного участка в пределах одного витка, для которого решение будет наилучшим:

$$u_k^*(t) = \arg \min_{t_n} \Delta m(u_k(t)). \quad (5)$$

Рассмотрев таким образом элементы множества  $U$ , выбирается тот, который доставляет минимум функционалу (2). В случае, когда имеется несколько экстремумов на заданном интервале прогноза

$t \in [t_0, T_{\text{пор}}]$ , выбирается тот, который обеспечит безопасное функционирование СИСЗ на большем интервале времени. Для этого необходимо дополнительное прогнозирование движения всех СИСЗ.

**4. Определение моментов времени начала и окончания управления орбитальным средством.** В сложных практических задачах формирование набора критериальных функций является достаточно трудным. При выборе моментов времени начала активного участка в данной работе предлагается ключевым фактором принять значение дальности от СИСЗ после реализации псевдоимпульса [12, 23], то есть после активного участка малой длительности. Для этого условие (4) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \rho_{\min} \leq \rho_{\text{порог min}}; \\ \rho_{\max} \geq \rho_{\text{порог max}}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\min} &= \min_j \min_t \hat{\rho}(\hat{r}_{\text{ОКМ } j}(t), \hat{r}_{\text{УСИСЗ}}(t)), t \in [t_0, T_{\text{пор}}]; \\ \rho_{\max} &= \max \hat{\rho}(\hat{r}_{\text{ТС}}(t), \hat{r}_{\text{УСИСЗ}}(t)), t \in [t_0, T_{\text{пор}}], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\rho_{\max}$  – максимальное удаление УСИСЗ от точки стояния на интервале времени  $[t_0, T_{\text{пор}}]$ ;  $\rho_{\min}$  – минимальное расстояние между УСИСЗ и СИСЗ на интервале времени  $[t_0, T_{\text{пор}}]$ .

Если данные величины записать как функции управления:

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= \rho_{\max}(u(o_x, o_y, o_z, F, t_n, t_k)), \\ \rho_{\min} &= \rho_{\min}(u(o_x, o_y, o_z, F, t_n, t_k)) \end{aligned} \quad (8)$$

и продифференцировать, то малые приращения  $\Delta\rho_{\max}$  и  $\Delta\rho_{\min}$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{\max} &= \frac{\partial\rho_{\max}}{\partial\bar{o}} \cdot \Delta\bar{o} + \frac{\partial\rho_{\max}}{\partial F} \cdot \Delta F + \frac{\partial\rho_{\max}}{\partial t_n} \cdot \Delta t_n + \frac{\partial\rho_{\max}}{\partial t_k} \cdot \Delta t_k, \\ \Delta\rho_{\min} &= \frac{\partial\rho_{\min}}{\partial\bar{o}} \cdot \Delta\bar{o} + \frac{\partial\rho_{\min}}{\partial F} \cdot \Delta F + \frac{\partial\rho_{\min}}{\partial t_n} \cdot \Delta t_n + \frac{\partial\rho_{\min}}{\partial t_k} \cdot \Delta t_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Задача (2) является трудоемкой оптимизационной задачей, решение которой необходимо искать в шестимерном пространстве.

Однако если система двигателей коррекции задана, то при рассмотрении каждого варианта включения двигателей составляющие орта тяги в орбитальной системе координат и сила тяги считаются постоянными. Таким образом, остаются две переменные, по которым происходит оптимизация: момент времени начала коррекции и ее длительность [23]. Если зафиксировать момент времени начала активного участка, то трудоемкость алгоритма существенно снижается, и осуществляется поиск оптимальной длительности включения двигателя:

$$d\rho_{\max} = \frac{\partial\rho_{\max}}{\partial t_k} \cdot \Delta t_k, \quad (10)$$

$$d\rho_{\min} = \frac{\partial\rho_{\min}}{\partial t_k} \cdot \Delta t_k. \quad (11)$$

Анализ полученных выражений показывает: если целью управления является коррекция движения СИСЗ относительно точки стояния, то значение производной (10) до момента выключения двигателя должно быть отрицательным. Это означает, что прогнозируемое максимальное значение удаления СИСЗ от точки стояния уменьшается. В процессе управления наступит такой момент времени  $t_k$ , когда значение производной (10) станет равным нулю. В этот момент времени целесообразно выключить двигательную установку, так как значение производной станет положительным, и прогнозируемое максимальное значение удаления от точки стояния начнет увеличиваться. Аналогично ищется момент окончания активного участка траектории, если целью управления является коррекция движения СИСЗ относительно ОКМ. Отличие в том, что производная (11) в начальный момент времени  $t_n$  положительна. Условия для поиска момента времени для начала активного участка и его длительности приведены в таблице 1.

Такой вариант декомпозиции задачи (2) позволяет сформировать на заданном интервале времени  $t \in [t_0, T_{\text{пор}}]$  конечное множество альтернатив, в котором каждой комбинации включения двигателей коррекции сопоставляются момент времени начала активного участка, его длительность, и достигаемая при этом максимальная дальность до точки стояния (либо минимальная дальность до ОКМ). Из этого множества выбирается вариант, для которого затраты рабочего тела минимальны, а также выполняются все налагаемые ограничения.

Таблица 1. Условия для поиска моментов времени начала и окончания АУТ

Цель управления	Условие пригодности момента времени для начала АУТ	Условие окончания АУТ	Ограничение
Коррекция относительно точки стояния	$\frac{\partial \rho_{\max}}{\partial t_k} < 0$	$\frac{\partial \rho_{\max}}{\partial t_k} = 0$	$\rho_{\min} \geq \rho_{\text{порог min}}$
Коррекция относительно ОКМ	$\frac{\partial \rho_{\min}}{\partial t_k} > 0$	$\frac{\partial \rho_{\min}}{\partial t_k} = 0$	$\rho_{\max} \leq \rho_{\text{порог max}}$

**5. Алгоритм формирования управления движением центра масс СИСЗ.** Исходя из представленной выше постановки задачи исследования и сформулированных условий необходимости совершения корректирующего маневра в основу принципа формирования управления был положен процесс анализа динамики дальности от СИСЗ до точки стояния и ОКМ. Последовательность шагов, составляющих алгоритм формирования управления, представлена ниже. Структурная схема предлагаемого алгоритма приведена на рисунке 2.

*Шаг 1.* Пусть  $t_0$  – момент времени очередной проверки условия (7). Осуществляется прогноз движения СИСЗ и ОКМ с большим шагом (более 100 с) и определяются множества  $M_{\text{КС TC}}$  и  $M_{\text{КС ОКМ}}$  критических ситуаций:

$$M_{\text{КС TC}} = [\hat{d}_j, t_j]^T, j = \overline{1, J};$$

$$M_{\text{КС ОКМ}} = [\hat{d}_i, t_i]^T, i = \overline{1, I},$$

где  $\hat{d}_i$  – дальность до ОКМ в момент  $i$ -й критической ситуации сближения;  $\hat{d}_j$  – дальность до точки стояния в момент  $j$ -й критической удаления от точки стояния.

*Шаг 2.* Определяются максимальное и минимальное значения  $\hat{d}_{\max}$  и  $\hat{d}_{\min}$  :

$$\hat{d}_{\max} = \max_j d_j;$$

$$\hat{d}_{\min} = \min_i d_i,$$

и проверяется условие (7). Если условие (7) выполняется, то переходим к следующему шагу, иначе КА продолжает пассивный полет до следующего момента времени проверки условия (7).

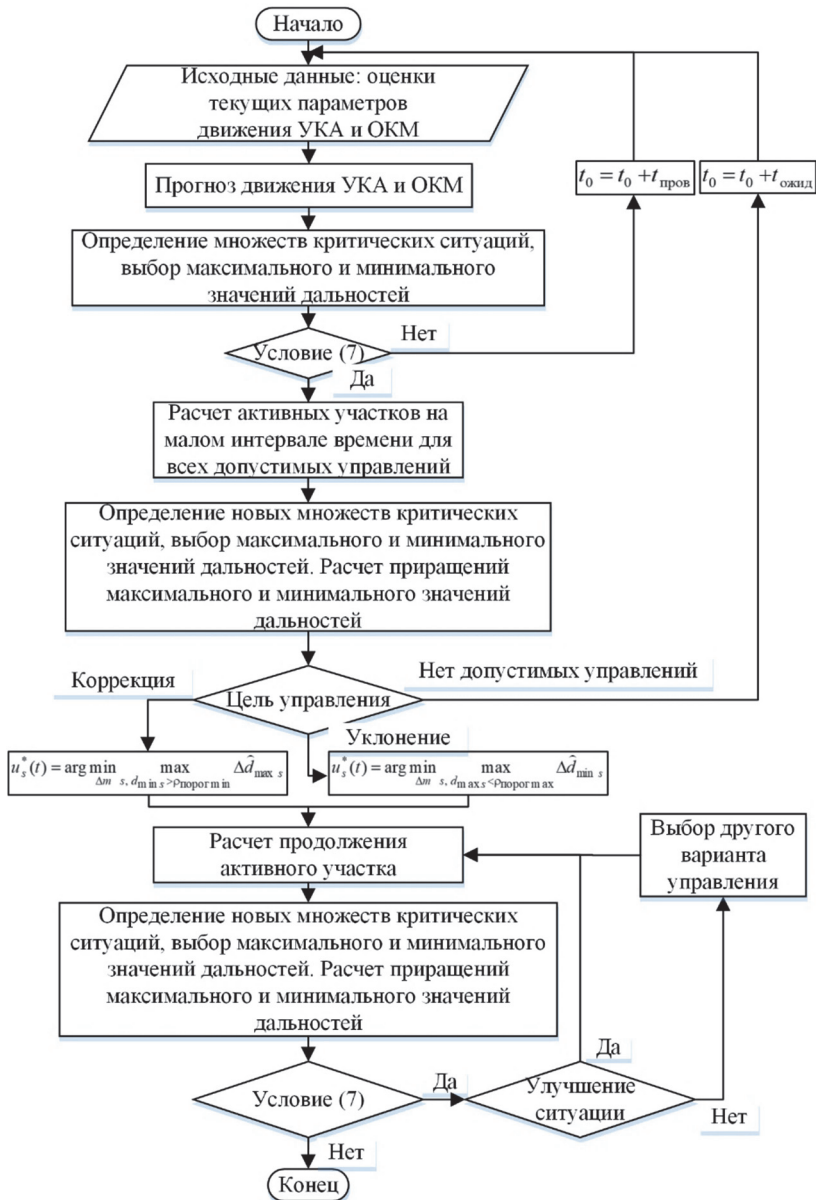


Рис. 2. Структурная схема алгоритма формирования управления движением центра масс СИЗ

*Шаг 3.* С шагом  $\Delta u$  по аргументу широты осуществляется перебор точек траектории СИСЗ и для каждой из них на малом интервале времени  $\Delta t$  для всех допустимых управлений  $u_s(t)$ ,  $u_s(t) \in U$ ,  $s = \overline{1, S}$  рассчитываются активные участки траектории. Величины  $\Delta u$  и  $\Delta t$  выбираются заранее на основе минимально возможного интервала включения двигательной установки СИСЗ.

*Шаг 4.* Для каждой получившейся траектории определяются новые множества  $M_{\text{КС TC}_s}$  и  $M_{\text{КС ОКМ}_s}$  критических ситуаций и значения  $\hat{d}_{\text{max } s}$  и  $\hat{d}_{\text{min } s}$ .

Рассчитываются величины  $\Delta \hat{d}_{\text{max } s}$  и  $\Delta \hat{d}_{\text{min } s}$ :

$$\begin{aligned}\Delta \hat{d}_{\text{max } s} &= \hat{d}_{\text{max}} - \hat{d}_{\text{max } s}, \\ \Delta \hat{d}_{\text{min } s} &= \hat{d}_{\text{min } s} - \hat{d}_{\text{min}}.\end{aligned}$$

*Шаг 5.* Если целью управления является парирование опасного сближения, то выбирается вариант управления  $u^*$  такой, что:

$$u_s^*(t) = \arg \min_{\Delta m_s} \max_{d_{\text{max } s} < \rho_{\text{порog max}}} \Delta \hat{d}_{\text{min } s}.$$

Если целью управления является удержание КА в окрестности точки стояния, то выбирается вариант управления  $u^*$  такой, что:

$$u_s^*(t) = \arg \min_{\Delta m_s} \max_{d_{\text{min } s} > \rho_{\text{порog min}}} \Delta \hat{d}_{\text{max } s}.$$

Следует отметить, что минимизация затрат топлива осуществляется путем выбора варианта управления, в котором задействуется наименьшее количество корректирующих двигателей.

*Шаг 6.* Для выбранного управления рассчитывается продолжение активного участка до тех пор, пока условие (2) не перестанет выполняться, либо до тех пор, пока  $\Delta \hat{d}_{\text{max } s}$  или  $\Delta \hat{d}_{\text{min } s}$  увеличиваются. Если, в зависимости от цели управления, улучшения ситуации не происходит  $\Delta \hat{d}_{\text{max } s}$  или  $\Delta \hat{d}_{\text{min } s}$  и при этом условие (2) по-прежнему выполняется, то выбирается вариант

управления, следующий после  $u_3^*(t)$ , то есть вариант, позволяющий максимально улучшить ситуацию.

**6. Результаты моделирования вариантов управления геостационарными орбитальными средствами.** Двигатели малой тяги имеют ряд особенностей. Для таких двигателей при включении и выключении характерны значительные переходные процессы, когда тяга не регулируется. В связи с этим возникает необходимость делать включения более продолжительными, чтобы минимизировать погрешность действительного суммарного приращения характеристической скорости относительно расчетного значения.

Помимо особенностей двигателей на управление существенно влияет схема их расположения, особенно при наличии ограничений на ориентацию СИСЗ. Эти обстоятельства обязывают для каждой системы двигателей сначала исследовать вопрос управляемости СИСЗ, а затем определиться с видом функции управления.

При проведении численных исследований было рассмотрено два варианта расположения двигателей коррекции на СИСЗ (рис. 3). Направляющие косинусы двигателей в связанной системе координат приведены в таблице 2. Сила тяги для всех двигателей была принята равной 0,083 Н. Масса СИСЗ с запасом топлива – 1704 кг.

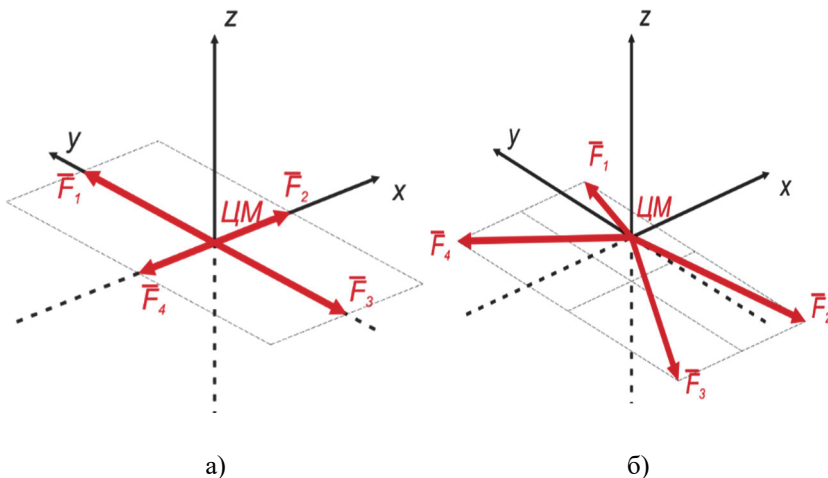


Рис. 3. Схемы расположения двигателей коррекции: а) – схема 1; б) – схема 2

Рассматриваемые схемы расположения двигателей коррекции позволяют создавать управляющие ускорения как в трансверсальном,



так и в нормальном направлении к плоскости орбиты. Поэтому было принято допущение, что в процессе движения СИСЗ по орбите связанная система координат всегда должна совпадать с орбитальной. Подобное ограничение также может быть связано с целевым предназначением СИСЗ. Также при моделировании были учтены следующие характеристики двигательной установки:

- максимальное суммарное время работы двигателей коррекции в сутки 2 часа;
- минимальное время между включениями двух двигателей 10 минут.

Таблица 2. Значения направляющих косинусов двигателей коррекции в связанной системе координат

Номер двигателя	Орт по оси X	Орт по оси Y	Орт по оси Z
Схема 1			
1	0	1	0
2	1	0	0
3	0	-1	0
4	-1	0	0
Схема 2			
1	0,42252	0,887	-0,188
2	0,42252	-0,887	-0,188
3	-0,42252	-0,887	-0,188
4	-0,42252	0,887	-0,188

Для заданных схем расположения двигателей может быть два варианта включения: одиночное и парное, так как при большом количестве работающих двигателей они будут попарно компенсировать друг друга. С точки зрения затрат рабочего тела более предпочтительным является вариант, когда работает только один из двигателей. При этом коррекция может заключаться в одном или нескольких согласованных маневрах.

На рисунке 4 показан график зависимости производной по длительности активного участка траектории от максимальной дальности до точки стояния для варианта коррекции с одним включением. Как видно из графика, длительность активного участка для заданного варианта управления и момента его начала соответствует точке, где производная равна нулю ( $t_k = 2400$  с).

На рисунке 5 показаны графики зависимости дальности до точки стояния от времени прогнозирования для различных длительностей активного участка. Синему графику ( $t_0$ ) соответствует нулевая длительность, то есть когда управление не осуществлялось. Графики голубого цвета ( $t_{600}$ ,  $t_{1000}$ ,  $t_{1500}$  и  $t_{1900}$ ) соответствуют длительностям

активного участка, когда значение производной от максимальной дальности отрицательно, а красного цвета – когда положительно ( $t_{3200}$ ,  $t_{3600}$ ,  $t_{4100}$  и  $t_{4400}$ ). Зеленый график ( $t_{2400}$ ) соответствует оптимальной длительности активного участка. Как видно, зеленый график не имеет выраженного глобального максимума, то есть глобальный максимум выровнялся с ближайшим к нему локальным максимумом. Дальнейшее управление приводит к тому, что прогнозируемое максимальное удаление  $\rho_{\max}$  от точки стояния начинает возрастать.

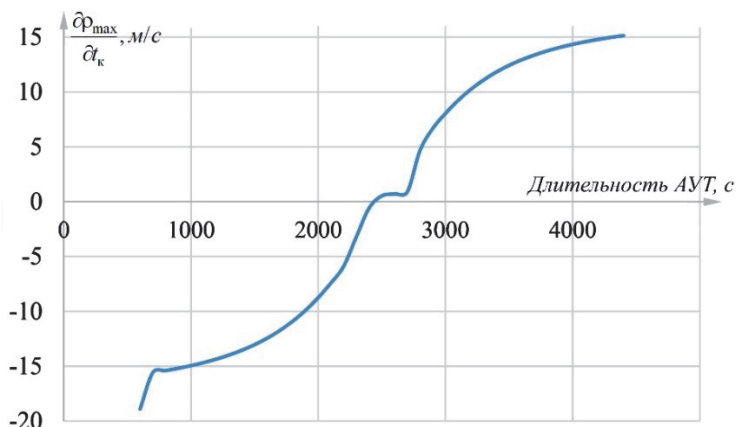


Рис. 4. График зависимости изменения значения производной по длительности активного участка от значения максимальной дальности до точки стояния

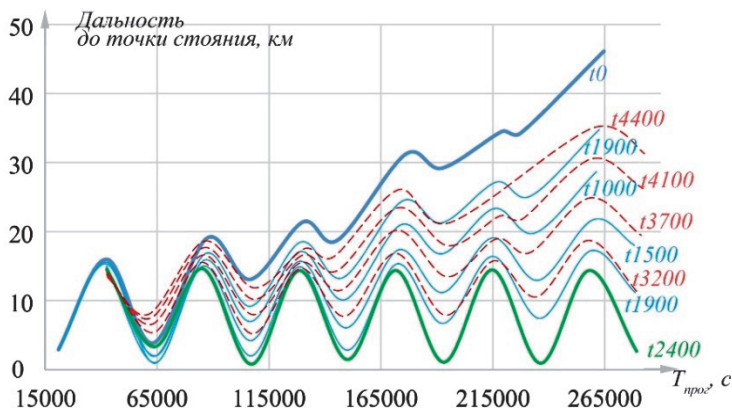


Рис. 5. Графики зависимости дальности до точки стояния от времени прогнозирования для различных длительностей активного участка

Результаты моделирования коррекции движения СИСЗ относительно точки стояния показали, что в случае коррекции с одним включением двигательной установки не всегда обеспечивается достижение цели управления. Особенно это характерно для второй схемы расположения двигателей. Производная функции максимальной дальности до точки стояния  $\partial \rho_{\max} / \partial t_k$  быстро возрастает, и продолжительность активного участка оказывается значительно меньше минимального времени работы двигателя. При этом цель управления не достигается: максимальная прогнозируемая дальность  $\rho_{\max}$  остается больше ее порогового значения  $\rho_{\text{порог max}}$ .

Решить эту проблему можно двумя способами: снятием ограничений на ориентацию СИСЗ либо увеличением количества активных участков. Во втором случае управление будет заключаться не в одном, а нескольких согласованных включениях двигательной установки. В данной работе был рассмотрен вариант с двумя активными участками включения двигательной установки (рис. 6).

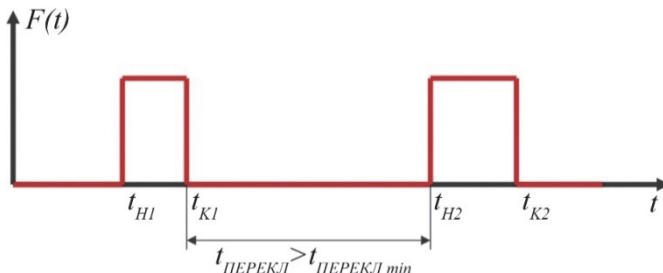


Рис. 6. Вариант управления с двумя активными участками включения двигательной установки

Вектор-функция управления СИСЗ данного вида может быть описана следующим образом:

$$u(t) = (o_{x1}, o_{y1}, o_{z1}, o_{x2}, o_{y2}, o_{z2}, F, t_n, t_{\text{перекл}}, t_{\text{акт}}, k_t); \quad (12)$$

$$t_{\text{акт}} = t_{\text{акт1}} + t_{\text{акт2}}; \quad (13)$$

$$t_{\text{акт1}} = k_t \cdot t_{\text{акт}}; \quad (14)$$

$$t_{\text{акт}2} = (1 - k_t) \cdot t_{\text{акт}}, \quad (15)$$

где  $o_{x1}, o_{y1}, o_{z1}, o_{x2}, o_{y2}, o_{z2}$  – составляющие орта тяги в орбитальной системе координат для первого и второго включений;  $F$  – модуль вектора тяги, создаваемой двигателями коррекции;  $t_n$  – момент времени начала первого активного участка;  $t_{\text{перекл}}$  – длительность пассивного участка между включениями;  $t_{\text{акт}}$  – суммарная длительность активных участков;  $t_{\text{акт}1}, t_{\text{акт}2}$  – длительность первого и второго активных участков соответственно;  $k_t$  – коэффициент деления суммарной длительности активных участков.

При рассмотрении заданного элемента множества для поиска оптимального момента времени начала активного участка могут быть использованы любые численные методы поиска экстремума функции. Затем из всех полученных решений выбирается наилучшее:

$$u^*(t) = \arg \min_k \Delta m(u_k^*(t)). \quad (16)$$

Для функции управления с двумя согласованными включениями было проведено моделирование двух вариантов:

- движение одного управляемого СИСЗ на интервале в один год;
- движение двух СИСЗ с уклоном от столкновений.

Исходные данные для моделирования приведены в таблице 3.

Таблица 3. Исходные данные для моделирования

Наименование параметра	СИСЗ 1	СИСЗ 2
Дата и время начала моделирования	13.01.2016 00:00:00.000	
$x$ , м	-41548506,75	-41552258,0524
$y$ , м	7168307,6	7157942,581
$z$ , м	66838,13	64734,557
$V_x$ , м/с	-522,8	-521,938
$V_y$ , м/с	-3030,1	-3030,027
$V_z$ , м/с	-0,2943	0,8057
Долгота точки стояния, град	58,5	58,5
Масса СИСЗ, кг	1704	1704
Площадь миделя, м <sup>2</sup>	63,3	63,3

Для первого варианта проведено моделирование движения СИСЗ на интервале одного года с управлением, целью которого было

удержание в окрестности точки стояния радиусом 50 км. Для удержания СИСЗ потребовалось 292 включения ДУ средней продолжительностью 3263 с. Суммарное время работы двигателей составило 952891,8 с. Затраты характеристической скорости составили 49,07 м/с, из них примерно 43,5 м/с пошло на коррекцию наклона орбиты, а остальная часть – на коррекцию периода обращения СИСЗ. Таким образом, при запасе характеристической скорости 500 м/с срок активного существования СИСЗ составит более 10 лет.

Для второго варианта на рисунках 7, 8 и 9 представлены результаты моделирования совместного движения двух СИСЗ, размещенных в окрестности одной точки стояния. При этом СИСЗ 2 помимо удержания в окрестности точки стояния решал задачу уклонения от столкновения с СИСЗ 1. В качестве пороговых значений минимального расстояния между СИСЗ принимались 0 метров, то есть без маневров уклонения (на рисунках обозначен красным цветом), 1000 метров (зеленым цветом) и 5000 метров (синим цветом).

На рисунке 7 представлены графики расходования характеристической скорости СИСЗ 2. На рисунке 8 представлены графики изменения относительной дальности от СИСЗ 2 до СИСЗ 1, а на рисунке 9 – графики изменения относительной дальности от СИСЗ 2 до геометрического центра точки стояния.

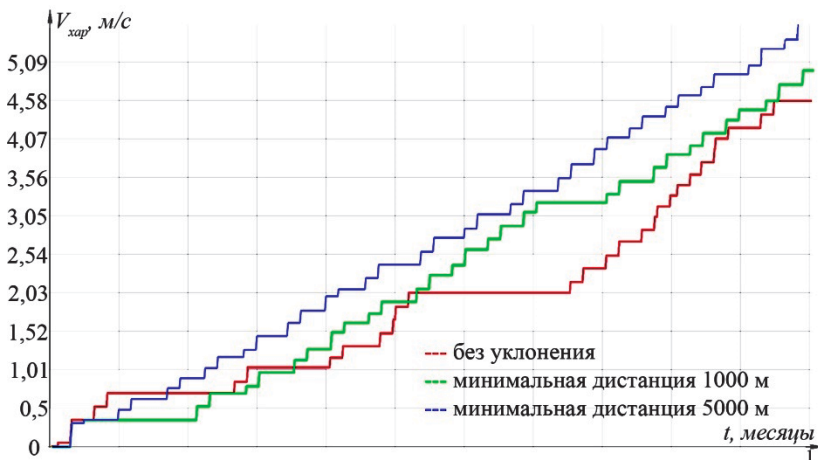


Рис. 7. Затраты характеристической скорости для различных пороговых значений дальности между СИСЗ

Анализ рисунка 7 показывает, что общие затраты характеристической скорости при использовании алгоритма

уклонения выросли на 8 % для пороговой дистанции 1000 м и на 12% для пороговой дистанции 5000 м, что является допустимыми величинами и существенно не скажется на времени активного существования СИСЗ на ГСО.

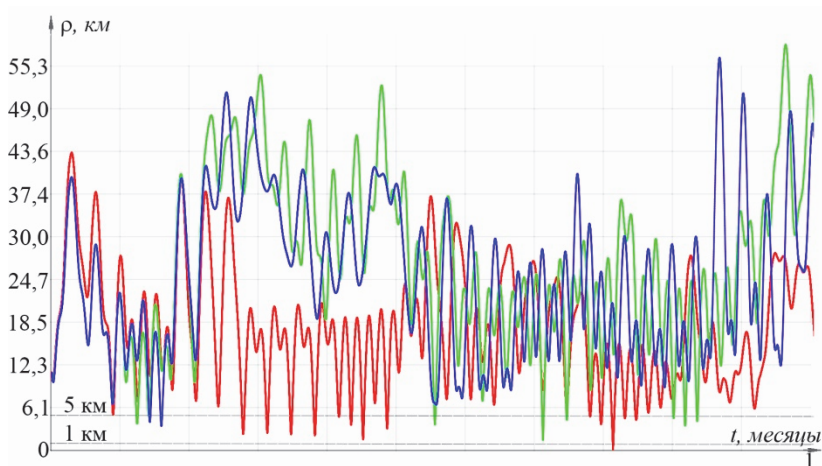


Рис. 8. Изменение дальности между СИСЗ для её различных пороговых значений

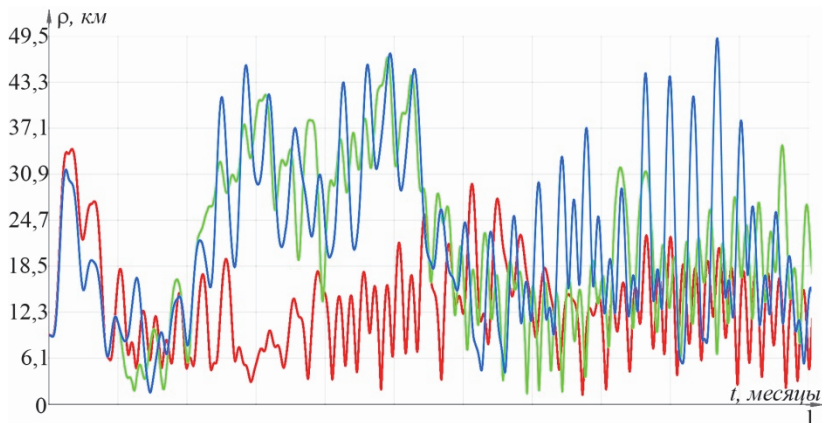


Рис. 9. Изменение дальности до точки стояния для различных пороговых значений дальности между СИСЗ

Графики на рисунке 8 показывают, что при использовании рассмотренного подхода опасные сближения СИСЗ исключены, при

этом СИСЗ 1 и СИСЗ 2 за интервал моделирования сблизились на дистанцию порядка 1000 м только один раз, тогда как при отсутствии маневрирования по уклонению произошло столкновение СИСЗ. Графики на рисунке 9 показывают, что за все время моделирования СИСЗ от геометрического центра точки стояния не отклонились более 49,5 км.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что при использовании алгоритма уклонения целесообразно использовать пороговую дистанцию 1000 м, так как СИСЗ требует меньшего расхода рабочего тела, чем для 5000 м при этом опасные сближения исключаются.

**7. Заключение.** Предложенный подход позволяет реализовать стратегию управления КА, при которой он в процессе движения, с одной стороны, не должен выходить за пределы окрестности точки стояния, с другой – дальность до ОКМ или других КА, находящихся в окрестности этой же точки стояния, не должна быть менее пороговой.

Сформулированные необходимые условия выполнения корректирующего маневра позволяют перейти от анализа текущей обстановки к заблаговременному парированию опасных сближений. Кроме того, такой подход позволяет значительно упростить поиск моментов времени начала и окончания маневрирования. Однако погрешности определения векторов текущего состояния СИСЗ на ГСО, а также ряд возмущающих факторов обуславливают сложность такой задачи. Поэтому для случая, когда в одной точке стояния требуется удерживать одновременно несколько СИСЗ, необходимо в комплексе с предложенным подходом к управлению применять дополнительные методы, позволяющие рассчитывать оценки пороговой дистанции между СИСЗ в соответствии с получаемыми результатами межспутниковых измерений и оценок их векторов состояния.

К достоинствам предлагаемого подхода следует отнести простоту учета ошибок определения параметров движения СИСЗ и любых возмущающих факторов. Для этого достаточно учесть их в модели прогнозирования движения.

### Литература

1. *Урличич Ю.М. и др.* Современные технологии навигации геостационарных спутников // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006. 280 с.
2. *Красильщиков М.Н., Малышев В.В., Федоров А.В.* Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. I. Формализация задачи управления // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2015. № 6. С. 82–96.
3. *Красильщиков М.Н., Малышев В.В., Федоров А.В.* Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. II. Синтез алгоритмов

- управления // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2016. № 6. С. 107–128.
4. *Архитов Ю.С. и др.* Разработка двигательной подсистемы коррекции орбиты на базе двигателя КМ-60 для геостационарного космического аппарата // Космонавтика и ракетостроение. 2016. № 5(90). С. 24–34.
  5. *Авксентьев А.А. и др.* Оптимизация схемы выведения космического аппарата с ограничениями по выбору интервалов включения двигательной установки // Вопросы электромеханики. 2012. № 5. С. 7–13.
  6. *Салмин В.В., Четвериков А.С.* Приближённое решение плоской задачи терминального управления геостационарным спутником с помощью двигателя малой тяги // Материалы XVII конференции молодых ученых. ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2015. С. 115–121.
  7. *Авксентьев А.А. и др.* Оптимизация схемы выведения космического аппарата с ограничениями по выбору интервалов включения двигательной установки // Вопросы электромеханики. 2012. № 5. С. 7–13.
  8. *Брагинец В.Ф. и др.* Приоритетные стратегии коллокации геостационарных спутников, находящихся в общих орбитальных позициях, для предотвращения опасных сближений. // Космонавтика и ракетостроение. 2016. № 8(93). С. 98–109.
  9. *Сухой Ю.Г.* Оценка влияния потенциалов Солнца и Луны на наклонение орбиты геостационарного спутника. // Космонавтика и ракетостроение. 2016. № 6(91). С. 67–77.
  10. *Сухой Ю.Г., Брагинец В.Ф.* Стратегия коррекции наклона орбиты геостационарного спутника с учетом эволюции наклона на длительных интервалах времени под действием гравитационных потенциалов Солнца и Луны // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. Вып. 7. 24 с.
  11. *Сухой Ю.Г., Брагинец В.Ф., Мещеряков В.М.* Особенности управления орбитальным движением геостационарных спутников в условиях их коллокации // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 3(87). 9 с.
  12. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию // Труды ИСА РАН. 2015. № 2. С. 18–26.
  13. *Soop M.* Handbook of Geostationary Orbits. Space Technology Library // Kluwer Academic Publishers. 1994.
  14. *Mattias Soop E.* Introduction to Geostationary Orbits // European Space Agency (ESA). 1983.75 p.
  15. *Jasour A.M., Aybat N.S., Lagoa C.M.* Semidefinite Programming For Chance Constrained Optimization Over Semialgebraic Sets // SIAM J. Optim. 2015. vol. 25. no. 3. pp. 1411–1440.
  16. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex Chance Constrained Model Predictive Control // arXiv preprint arXiv:1603.07413. 2016.
  17. *Kluever C.* Simple Guidance Scheme for Low-Thrust Orbit Transfers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1998. vol. 21. no. 6. pp. 1015–1017.
  18. *Eastwood J.P. et al.* Sunjammer // Weather. 2015. vol. 70. no.1. pp. 27–30.
  19. *Kelly P. et al.* Solar radiation pressure applications on geostationary satellites // Proceedings of the 2016 AAS GP & C Conference. American Astronautical Society. 2016.
  20. *Angel Borja J., Dioisio T.* Deorbit Process using Solar Radiation Force // Journal of Spacecraft and Rockets. 2006. vol. 43. no. 3. pp. 685–687.
  21. *Guo R. et al.* Precise orbit determination and rapid orbit recovery supported by time synchronization // Adv. Space Res. 2015. vol. 55. pp. 2889–2898.



22. Guo R., Chen J., Zhu L. Kinematic Orbit Determination Method Optimization and Test Analysis for BDS Satellites with Short-arc Tracking Data // *Acta Geod. Cartogr. Sin.* 2017. vol. 46. pp. 411–420.
23. Ju B. et al. Precise orbit and baseline determination for maneuvering low earth orbiters // *GPS Solut.* 2017. vol. 21. pp. 53–64.
24. Du L. et al. An 18-element GEO broadcast ephemeris based on non-singular elements // *GPS Solut.* 2015. vol. 19. pp. 49–59.
25. Zhao C.Y. et al. Analysis on the long-term dynamical evolution of the inclined geosynchronous orbits in the Chinese BeiDou navigation system // *Adv. Space Res.* 2015. vol. 56. pp. 377–387.

**Горбулин Владимир Иванович** – д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: системы управления летательными аппаратами, синтез баллистических структур, математическое моделирование. Число научных публикаций – 128. v.gorbulin@mail.ru; Ждановская ул., 13, 197198, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)347-97-21; факс: +7(812)237-12-49.

**Котьяшов Евгений Валериевич** – канд. техн. наук, начальник отдела, отдел военного института (научно-исследовательский), Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: системы управления летательными аппаратами, синтез баллистических структур, математическое моделирование. Число научных публикаций – 32. kev246@mail.ru; Ждановская ул., 13, 197198, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)347-97-21; факс: +7(812)237-12-49.

**Чернявский Владимир Александрович** – канд. техн. наук, начальник лаборатории, лаборатория военного института (научно-исследовательская), Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: системы и алгоритмы управления летательными аппаратами, математическое моделирование. Число научных публикаций – 20. vladimirchernyavsky@yandex.ru; Ждановская ул., 13, 197198, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)347-97-21; факс: +7(812)237-12-49.

**Груздев Николай Валентинович** – канд. воен. наук, доцент, старший научный сотрудник, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского. Область научных интересов: моделирование и оптимизация управления движением ракет-носителей и космических аппаратов. Число научных публикаций – 30. nikgruzdew@rambler.ru; Ждановская ул., 13, 197198, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)347-92-34.

V. GORBULIN, E. KOTYASHOV, V. CHERNYAVSKIY, N. GRUZDEV  
**HOLDING GEOSTATIONARY SATELLITE AT GIVEN STANDING  
POINT, TAKING INTO ACCOUNT ADDITIONAL PHASE  
RESTRICTIONS**

---

*Gorbulin V., Kotyashov E., Chernyavskiy V., Gruzdev N.* **Holding Geostationary Satellite at Given Standing Point, Taking into Account Additional Phase Restrictions.**

**Abstract.** The active lifetime of orbital facilities in the geostationary orbit (GSO), which include stationary artificial earth satellites (SAES) for various purposes, can be more than 15 years. At the same time, in modern conditions of orbital grouping increment, the number of space debris, including those on the GSO, also increases: SAES, which have finished its active lifetime and were not transferred to disposal orbit for some reasons, shards of SAES appeared from collision with meteors or accidents. This leads to the increase of probability of collisions with active SAESs. The listed factors determine the need of considering not only the problem of keeping SAESs in vicinities of position, but also the task of avoiding collisions with space debris objects (SDO), while the costs of the working fluid should not increase.

A great attention is being paid to rational power units placing during the projection of new space shuttles, especially those with long useful lifetime. In this article, it is assumed that SESs are equipped with several correction motors, which make it possible to create control accelerations in only several directions, without changing the orientation of the SES itself. In other words, in this task it is assumed that the corrections of the parameters of the AES orbit do not affect the orientation of the SAES itself. This condition is a severe limitation in the synthesis of the SES's control system.

In the considered methodological approach, the costs of the working fluid are set as a functionality from control, which are necessary to perform the next correction, after which the SAES will not have dangerous distances and approaching in projection horizon's interval. This makes it possible to avoid situations when the decision on control is being made after the SES leaves the vicinity of the station point, and first of all, the approach to the SDO at a distance less than a liminal one. This article provides the results of modeling, which indicate the effectiveness of the proposed solutions.

An important advantage compared with the existing methods is the consideration of the movement of the SAES relatively not only to the stationary point, but also to several other objects located in its vicinity, both controlled and uncontrolled. Moreover, there can be any given number of objects.

**Keywords:** Position, Control of Retaining, Management Holding, Minimal Distance, Critical Situation, Projection Horizon, Dangerous Distance, Dangerous Approaching

---

## References

1. Urlichich Yu.M. et al. *Sovremennye tekhnologii navigacii geostacionarnykh sputnikov* [Modern navigation technologies for geostationary satellites]. M.: FIZMATLIT. 2006. 280 p. (In Russ.).
2. Krasil'shchikov M.N., Malyshev V.V., Fedorov A.V. [Autonomous implementation of dynamic operations in geostationary orbit. I. Formalization of the control problem]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Izvestiya of the Russian Academy of Sciences. Theory and control system.* 2015. vol. 6. pp. 82–96. (In Russ.).
3. Krasil'shchikov M.N., Malyshev V.V., Fedorov A.V. [Autonomous implementation of dynamic operations in geostationary orbit. II. Synthesis of

- control algorithms]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Izvestiya of the Russian Academy of Sciences. Theory and control system*. 2016. vol. 6. pp. 107–128. (In Russ.).
4. Arhipov Yu.S. et al. [Development of a propulsion subsystem for orbit correction based on the KM-60 engine for a geostationary spacecraft]. *Kosmonavtika i raketostroenie – Space and rocket science*. 2016. vol. 5(90). pp. 24–34. (In Russ.).
  5. Avksen'tev A.A. et al. [Optimization of the spacecraft launch scheme with restrictions on the choice of launch intervals for the propulsion system]. *Voprosy elektromekhaniki – Electrical engineering issues*. 2012. vol. 5. pp. 7–13. (In Russ.).
  6. Salmin V.V., Chetverikov A.S. [Approximate solution of the planar problem of terminal control of a geostationary satellite using a low-thrust engine]. *Materialy HVII konferencii molodyh uchenyh. GNC RF AO «Koncern «CNIИ «Elektropribor»*, [Proceedings of the VII conference of young scientists. SSC RF JSC «Concern» Central research Institute «Electropribor»] *Mezhdunarodnaya obshchestvennaya organizaciya «Akademiya navigacii i upravleniya dvizheniem» – International public organization «Academy of navigation and motion control»*. 2015. pp. 115–121. (In Russ.).
  7. Avksen'tev A.A. et al. [Optimization of the spacecraft launch scheme with restrictions on the choice of launch intervals for the propulsion system] *Voprosy elektromekhaniki – Electrical engineering issues*. 2012. vol. 5. pp. 7–13. (In Russ.).
  8. Braginec V.F. et al. [Priority strategies for collocation of geostationary satellites in common orbital positions to prevent dangerous approaches]. *Kosmonavtika i raketostroenie – Space and rocket science*. 2016. vol. 8(93). pp. 98–109. (In Russ.).
  9. Suhoj Yu.G. [Estimation of the influence of The sun and moon potentials on the orbital inclination of a geostationary satellite] *Kosmonavtika i raketostroenie – Space and rocket science*. 2016. vol. 6(91). pp. 67–77.
  10. Suhoj Yu.G., Braginec V.F. [Strategy for correcting the inclination of the geostationary satellite's orbit, taking into account the evolution of the inclination over long time intervals under the influence of the gravitational potentials of the Sun and moon] *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii – Engineering journal: science and innovation*. 2018. vol. 7. 24 p. (In Russ.).
  11. Suhoj Yu.G., Braginec V.F., Meshcheryakov V.M. [Features of controlling the orbital motion of geostationary satellites in the conditions of their collocation] *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii – Engineering journal: science and innovation*. 2019. vol. 3(87). 9 p. (In Russ.).
  12. Azanov V.M., Kan Yu.S. [Optimization of near-circular orbit correction of an artificial earth satellite by probabilistic criterion] *Trudy` ISA RAN – Publications ISA RAN*. 2015. vol. 2. pp. 18–26. (In Russ.).
  13. Soop M. Handbook of Geostationary Orbits. Space Technology Library. Kluwer Academic Publishers. 1994.
  14. Mattias Soop E. Introduction to Geostationary Orbits. European Space Agency (ESA). 1983. 75 p.
  15. Jasour A.M., Aybat N.S., Lagoa C.M. Semidefinite Programming For Chance Constrained Optimization Over Semialgebraic Sets. *SIAM J. Optim.* 2015. vol. 25. no. 3. pp. 1411–1440.
  16. Jasour A.M., Lagoa C.M. Convex Chance Constrained Model Predictive Control. arXiv preprint arXiv:1603.07413. 2016.
  17. Kluever C. Simple Guidance Scheme for Low-Thrust Orbit Transfers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1998. vol. 21. no. 6. pp. 1015–1017.
  18. Eastwood J.P. et al. Sunjammer. *Weather*. 2015. vol. 70. no. 1. pp. 27–30.
  19. Kelly P. et al. Solar radiation pressure applications on geostationary satellites. Proceedings of the 2016 AAS GP & C Conference. American Astronautical Society. 2016.

20. Angel Borja J., Dioisio T. Deorbit Process using Solar Radiation Force. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2006. vol. 43. no. 3. pp. 685–687.
21. Guo R. et al. Precise orbit determination and rapid orbit recovery supported by time synchronization. *Adv. Space Res.* 2015. vol. 55. pp. 2889–2898.
22. Guo R., Chen J., Zhu L. Kinematic Orbit Determination Method Optimization and Test Analysis for BDS Satellites with Short-arc Tracking Data. *Acta Geod. Cartogr. Sin.* 2017. vol. 46. pp. 411–420.
23. Ju B. et al. Precise orbit and baseline determination for maneuvering low earth orbiters. *GPS Solut.* 2017. vol. 21. pp. 53–64.
24. Du L. et al. An 18-element GEO broadcast ephemeris based on non-singular elements. *GPS Solut.* 2015. vol. 19. pp. 49–59.
25. Zhao C.Y. et al. Analysis on the long-term dynamical evolution of the inclined geosynchronous orbits in the Chinese BeiDou navigation system. *Adv. Space Res.* 2015. vol. 56. pp. 377–387.

**Gorbulin Vladimir** – Ph.D., Dr.Sci., Professor, Professor of the Department, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: aircraft control systems, synthesis of ballistic structures, mathematical modeling. The number of publications – 128. v\_gorbulin@mail.ru; 13, Zdanovskaya str., 197198, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)347-97-21; fax: +7(812)237-12-49.

**Kotyashov Evgeniy** – Ph.D., Head of a Department, Department of the Military Institute (Research), Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: aircraft control systems, synthesis of ballistic structures, mathematical modeling. The number of publications – 32. keV246@mail.ru; 13, Zdanovskaya str., 197198, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)347-97-21; fax: +7(812)237-12-49.

**Chernyavskiy Vladimir** – Ph.D., Head of the Laboratory, Laboratory of the Military Institute (Research), Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: aircraft control systems and algorithms, mathematical modeling. The number of publications – 20. vladimirchernyavsky@yandex.ru; 13, Zdanovskaya str., 197198, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)347-97-21; fax: +7(812)237-12-49.

**Gruzdev Nikolay** – Ph.D., Associate Professor, Senior Researcher, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: modeling, optimization movement control systems space aircraft. The number of publications – 30. nikgruzdew@rambler.ru; 13, Zdanovskaya str., 197198, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)347-92-34.

А.П. Алёшкин, С.Н. Балакирев, В.И. Невзоров, П.В. Савочкин  
**ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ  
ЗАГОРИЗОНТНЫМИ РЛС ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ  
НАДВОДНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ СИНТЕЗА АПЕРТУРЫ  
АНТЕННОЙ СИСТЕМЫ**

*Алёшкин А.П., Балакирев С.Н., Невзоров В.И., Савочкин П.В.* **Повышение эффективности обнаружения загоризонтными РЛС поверхностной волны надводных объектов на основе синтеза апертуры антенной системы.**

**Аннотация.** Для решения задач наблюдения за обстановкой на водной поверхности, примыкающей к приграничным районам суши, используют загоризонтные радиолокационные средства поверхностной волны. Основным достоинством указанных средств является возможность обнаружения надводных объектов за пределами оптического горизонта за счет распространения электромагнитной волны вдоль морской поверхности в дифракционной зоне. Однако точностные характеристики подобных наблюдений оказываются крайне низкими в силу малых отношений сигнал/шум отраженного сигнала, которые обусловлены, в свою очередь, широкой диаграммой направленности существующих антенных систем. Это приводит к превалированию в облученной области отражения от фона над радиоэхом лоцируемого объекта. По этой же причине оказываются необнаруживаемыми неподвижные цели, по которым отсутствует доплеровский сдвиг частот в спектре отраженного сигнала. Единственным способом увеличения отношения сигнал/шум является сужение диаграммы направленности (увеличение коэффициента направленного действия антенной системы). Предлагается решение поставленной задачи по пути последовательного накопления отраженных сигналов и их суммирования по принципу оптимизационного подбора фазовых соотношений для соседних импульсов (синтезируемых апертур), которые соответствуют эвентуальному фронту электромагнитных волн, сфокусированному в направлении гипотетической цели. Решение данной задачи позволит существенно сузить диаграмму направленности антенны, что открывает возможность устранения влияния фона за счет радикального уменьшения площади облучаемой поверхности в процессе фокусировки луча при синтезировании виртуальной апертуры. При этом нет необходимости в изменении конструкции антенных решеток. Выполнено компьютерное моделирование синтезированной антенной решетки и построена ее диаграмма направленности. Проведена количественная оценка степени повышения углового разрешения по сравнению с потенциально возможным, определенным по критерию Релея. Данное обстоятельство позволяет рассмотреть возможность использования береговых загоризонтных радиолокационных станций поверхностной волны для обнаружения «невидимых» существующими локаторами неподвижных объектов.

**Ключевые слова:** РЛС поверхностной волны, антенная решетка, диаграмма направленности, амплитудно-фазовое распределение, синтезирование апертуры

**1. Введение.** Радиолокационные станции (РЛС) наблюдения за морской поверхностью используются в основном для контроля водных рубежей нашей страны. При этом применяется коротковолновый (КВ) диапазон для излучения и приема отраженной лоцируемым объектом поверхностной электромагнитной волны [1].

Выбор диапазона обусловлен параметрами среды и дальностью распространения электромагнитных колебаний до объектов радиолокационного обнаружения. Также он определяет технические возможности РЛС и структуру ее построения. Кроме обнаружения объектов в пределах прямой видимости также стоит задача постоянного слежения за отдельными районами водной поверхности, вблизи которых невозможно построить РЛС из-за их большой удаленности [2].

Применение РЛС КВ диапазона в таких случаях наряду с другими системами получения целевой информации приобретает все больший интерес, так как КВ сигнал способен распространяться на значительные расстояния и в том числе за оптический горизонт, ограниченный кривизной земной поверхности.

Использование поверхностной электромагнитной волны позволяет достаточно эффективно обнаруживать в дифракционной области надводные суда и низколетящие летательные аппараты. Загоризонтные РЛС поверхностной волны (ЗГ РЛС ПВ) обеспечивают подсветку лоцируемых объектов на дальностях более 400 километров.

Однако широкое использование ЗГ РЛС ПВ ограничивается рядом факторов, к которым относятся требования большой мощности передатчика, необходимой для прохождения зондирующего сигнала на расстояния до сотен километров вдоль морской поверхности, и плохая разрешающая способность, обусловленная широкой диаграммой направленности, большим уровнем шума, вызванным множественным переотражением сигнала от моря, от гидрометеоров, а также искусственными помехами и пространственными шумами [3].

В результате уровень сигнала от объекта оказывается на 40-60 дБ ниже уровня фона и шумов. Малые значения отношения сигнал-шум приводят к необходимости привлечения дополнительной информации для обнаружения лоцируемого объекта. Такой информацией является доплеровский сдвиг частоты при слежении за движущимися целями. Поэтому ЗГ РЛС ПВ не используются для обнаружения неподвижных (стационарных) объектов.

С развитием цифровых методов обработки как на аппаратном, так и на алгоритмическом уровне в РЛС все чаще стали применяться цифровые антенные решетки (ЦАР). Применение ЦАР позволяет наделять РЛС новыми возможностями при использовании цифровых методов формирования амплитудно-фазового распределения на апертуре и адаптивной пространственно-временной обработки принимаемых сигналов [4-6].

Основным преимуществом применения ЦАР является возможность последовательного синтеза апертуры (на основе экстра-

поляции функции раскрыва – спектра пространственных частот) и формирования диаграммы направленности (ДН), ширина которой может быть в разы меньше, чем при ее классическом формировании с использованием реальной апертуры антенны. Тем самым удастся существенно повысить разрешающую способность РЛС по угловым координатам (коэффициент направленного действия антенной системы), прежде всего, в смысле получения возможности достоверного обнаружения неподвижных объектов [7].

В большинстве случаев антенные системы ЗГ РЛС ПВ построены на основе линейных антенных решеток (АР), элементами которых являются вибраторные антенны. В связи со спецификой КВ диапазона антенные решетки имеют достаточно большие пространственные размеры. Для повышения угловой разрешающей способности – сужения диаграммы направленности, как известно, необходимо увеличивать линейные размеры решетки в соответствующей области. С одной стороны, это затруднительно с точки зрения большой ее физической протяженности, с другой – это приводит к дополнительным экономическим затратам [8].

Предлагаемые в работе алгоритмы цифровой обработки сигналов позволяют увеличить разрешающую способность по углу без увеличения физических размеров решетки, то есть обеспечивают так называемое сверхразрешение.

Разработано достаточно большое количество алгоритмов, обеспечивающих сверхразрешение. Наиболее известным и популярным алгоритмом является алгоритм многослойной классификации MUSIC (Multiple Signal Classification), основанный на разделении пространства на подпространства сигнала и шума [9-12]. Однако данный алгоритм требует больших вычислительных ресурсов, связанных с необходимостью выполнения процедуры двухмерного поиска, и как следствие, он не может быть применен для систем, работающих в реальном времени.

Существуют алгоритмы, требующие меньшей вычислительной сложности, так называемые алгоритмы свободного поиска. Наиболее известными из таких алгоритмов являются Root-MUSIC и ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques). Однако они могут быть применены только для антенных систем специфической конфигурации.

Известные алгоритмы сверхразрешения имеют достаточно высокие потенциальные характеристики, однако при формировании узких ДН АР они требуют больших вычислительных мощностей, а оценки пространственных координат направлений на источники сигналов

по заданным критериям (например, минимума среднеквадратического отклонения или максимума отношения сигнал/шум) очень критичны к амплитудно-фазовому распределению (АФР). Ошибки в АФР приводят к заметному ухудшению разрешающей способности [13].

Кроме того, для указанных алгоритмов отсутствуют методики их адаптивной настройки с учетом отражательных характеристик конкретного типа наблюдаемых объектов. В этом смысле их применимость отвечает релейной логике – могут оказаться результативными, но также результат может быть и отрицательным. И нет однозначных рекомендаций, позволяющих повысить отмеченную результативность их целевого применения.

Рассмотрим способ требуемого повышения точности оценивания угловых координат лоцируемого объекта за счет последовательного синтеза апертуры АР во временной области.

Известны принципы увеличения разрешающей способности РЛС с синтезированной апертурой антенны (РСА). Они сводятся к следующим операциям:

- записи на интервале синтеза АФР сигнала, принимаемого антенной, которая движется в системе координат источника излучения;
- преобразованию временной координаты в пространственную по линии движения антенны;
- вычислению ДН по сформированному таким образом АФР вдоль отмеченной траектории.

Следует заметить, что в случае с РСА осуществляется перемещение антенны относительно источника отраженного сигнала. Иными словами, фаза принимаемого сигнала изменяется пропорционально изменению расстояния. Однако ввиду относительности перемещения антенны и отражающего объекта, можно утверждать, что подобный синтез апертуры может быть осуществлен и при неподвижной антенне, если правильно экстраполировать распространение принимаемой электромагнитной волны (ЭМВ) относительно реальной антенны на основе последовательной во времени регистрации выборки отраженных сигналов [14-20], принимаемых на антенну с воображаемой апертурой.

Предположим, что источник отраженного сигнала характеризуется равномерной диаграммой обратного рассеяния. Тогда эхо-сигнал, перехватываемый апертурой АР, соответствует лишь части волнового фронта, равномерно рассеиваемой облучаемым объектом падающей волны и заполняющего окружающее реальную антенну пространство.

При этом в ближайших окрестностях реальной апертуры АР



этот фронт будет плоским, а по мере удаления от нее – более корректной будет его аппроксимация квадратичной зависимостью.

В рассматриваемом диапазоне волн вряд ли возможно обеспечить доминирование когерентно накапливаемого сигнала от лоцируемого объекта над эхо-сигналом фона при ширине ДН, соответствующей реальной апертуре АР. Для парирования отклика фонового отражения следует сфокусировать луч АР в направлении цели.

Если предположить, что реальная апертура имеет увеличенные размеры, то очевидно, что неперехватываемое до этого излучение будет приниматься увеличенной апертурой, что приведет к сужению ДН за счет использования дополнительной информации, содержащейся в принятом волновом фронте и позволяющей фокусироваться на источнике этого излучения.

Зададимся вопросом, можно ли принять неперехватываемый сигнал, не увеличивая размеры апертуры? Предположим, что последовательно во времени излучается два запросных импульсных сигнала. Тогда реальная апертура может быть использована для когерентного приема обоих отраженных сигналов в соответствии с известными алгоритмами. Но в выбранном диапазоне волн отклик фона будет накапливаться «не менее когерентно». Для устранения влияния фонового излучения неизбежно следует сужать ДН АР.

Для этого предложим следующую процедуру.

Выполним поворот фазы (задержку во времени) принятого элементами АР первого импульса таким образом, чтобы к моменту приема второго импульса сложилась картина как будто первый импульс принят на добавленную (путем задержки во времени) апертуру, а второй на реальную. Иными словами, выдвигается гипотеза о неподвижности места локации цели, выполняется синтез функции раскрыва виртуальной апертуры, соответствующей прогнозируемому фазовому фронту отраженной неперехватываемой волны в соответствии с выбранной гипотезой.

Таким образом, задержанный во времени первый импульс отождествляется как продолжение распространения до виртуальной апертуры принимаемого на реальную антенну второго импульса.

В зависимости от типа цели ее ЭПР делается расчет необходимого числа импульсов – синтезируемых апертур, чтобы обеспечить доминирование отклика цели над эхом фона в соответствии с теоремой перемножения для системы излучателей, определяющей изменение множителя решетки в зависимости от топологии элементов АР.

Таким образом, при наличии априорных сведений о местоположении лоцируемого объекта выполняется экстраполяция фазового

фронта реальной апертуры путем последовательной задержки принимаемого эхо-сигнала для обеспечения его когерентного сложения, но уже с учетом фокусировки ДН на конкретную точку на подлежащей обзору поверхности для парирования фонового излучения.

Если же априорных сведений о позиции цели нет, то следует организовать процедуру направленного перебора просматриваемых локальных секторов, другими словами – различных вариантов фазовых фронтов, например по принципу телевизионной развертки.

Дополнительные временные и вычислительные затраты являются своеобразной диалектически обоснованной платой за достижение достигнутого положительного эффекта фокусировки луча ДН в направлении не обнаруживаемого реальной апертурой неподвижного объекта.

Иначе говоря, для РСА необходимо под существующий набор отраженных сигналов синтезировать квазиоптимальную траекторию движения антенны, а в данном случае следует под предлагаемую (аналитически известную) структуру антенны синтезировать ее функцию раскрыва – фазовое распределение, адекватное фронту волны, отраженной реальной целью с фиксированным положением. При успешном выборе параметров наклона синтезируемого фазового фронта обеспечивается фокусировка ДН ЦАР в направлении источника отраженного сигнала. Погрешность в синтезе фазового фронта не позволит обеспечить суперпозицию последовательно накапливаемых импульсов и преодоление порога радиолокационного обнаружения. Таким образом, стоит задача проверки гипотез наличия цели в том или ином секторе фокусировки луча ДН антенной системы ЗГ РЛС.

При этом может быть использован усовершенствованный алгоритм синтеза апертуры антенной системы, а именно:

1. Записывается серия пространственно-временных реализаций принимаемой ЭМВ в пределах области, занимаемой неподвижной антенной на временном интервале синтеза.

2. Временная координата преобразуется в пространственную так, чтобы в пространственной области была сформирована (синтезирована) линейная АР требуемых размеров.

3. Вычисляется ДН по сформированному таким образом фазовому распределению фронта ЭМВ вдоль всего синтезированного антенного раскрыва.

4. Производится направленный перебор множества вариантов накопления принятых отраженных сигналов для различных типов фазовых распределений, соответствующих пошаговому сканированию максимумом ДН вдоль всего сектора выбранной угловой координаты.

Реализация предлагаемого алгоритма позволяет, как показало

моделирование, добиться существенного сужения диаграммы направленности антенны, увеличения отклика от цели (до уровня превышения порога обнаружения) относительно фона в уменьшенном секторе обзора в зоне ответственности РЛС, а следовательно, повышения достоверности обнаружения и точности локации наблюдаемых объектов.

В связи с этим появляется возможность обнаружения целей, наблюдение которых ранее не представлялось возможным, поскольку по результатам обработки отдельного импульса энергии сигнала недостаточно для преодоления порога обнаружения. Тогда как корректная обработка последовательно накопленной серии импульсов с синтезированием необходимых фазовых сдвигов позволяет суммарно получить уровень сигнала, достаточный для преодоления порога [21-26].

Таким образом, становится возможным обнаружить удаленные объекты за счет уменьшения ширины ДН для антенны с синтезированной апертурой, и, как следствие, повысить коэффициент направленного действия. Также существенно улучшаются точностные характеристики локирования обнаруживаемых целей.

При этом достижимые значения погрешностей делают возможным расширение области применения традиционных РЛС поверхностной волны до решения, например, задач навигации морских объектов, мониторинга процесса судовождения в условиях осложненных метеословий, а также наблюдения за текущей обстановкой и управления судовождением в контролируемых районах или водах [27].

**2. Сужение диаграммы направленности антенны на основе последовательного синтеза апертуры путем накапливания отраженных сигналов.** Рассмотрим реализацию предложенного алгоритма применительно к линейной эквидистантной АР, состоящей из  $n$  однотипных элементов с расстоянием  $d$  между ними;  $x_i$  – координата расположения  $i$ -того элемента.

Пусть координата первого элемента совпадает с началом системы координат ( $x_1 = 0$ ).

Длина решетки будет равна  $L = (n - 1)d$ .

Отметим, что характеристика направленности отдельного элемента определяет только сектор сканирования АР в целом и не задает разрешающую способность РЛС.

Пусть с некоторого направления  $\theta_{x_0}$  приходит отраженный от цели сигнал в виде плоской ЭМВ (рис. 1).

На интервале наблюдения  $t_1, \dots, t_p$  в каждый момент времени  $t_j$  с дискретностью  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$  в память вычислительной машины запи-

ссылаются мгновенные значения принимаемого сигнала с выхода каждого  $i$ -того элемента решетки (рис. 2).

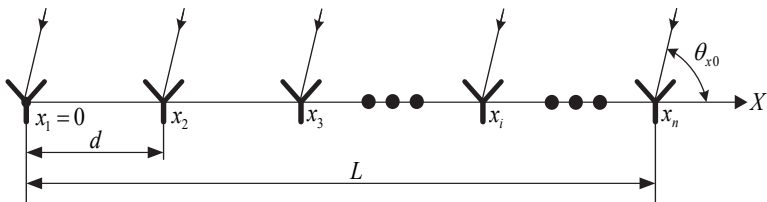


Рис. 1. Линейная антенная решетка

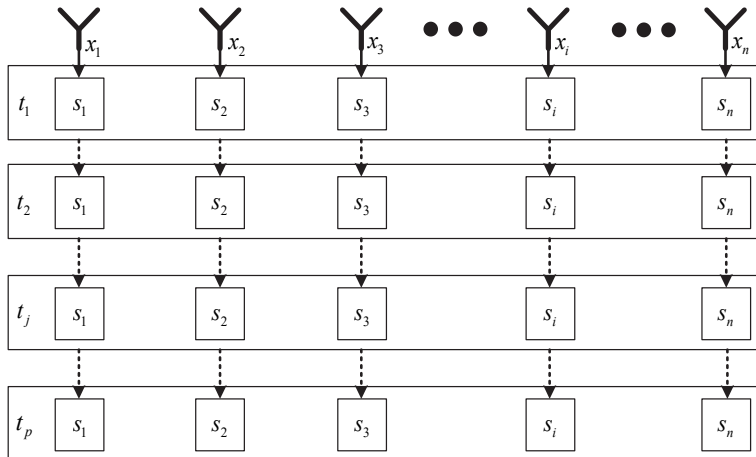


Рис. 2. Массив данных с элементов антенной решетки за интервал наблюдения

В итоге формируется массив данных о мгновенных значениях сигналов, принятых элементами АР в моменты времени  $t_j$  на пространственном интервале в виде матрицы  $A$ , состоящей из  $p$  строк и  $n$  столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} s_1|_{t_1} & s_2|_{t_1} & \dots & s_i|_{t_1} & \dots & s_n|_{t_1} \\ s_1|_{t_2} & s_2|_{t_2} & \dots & s_i|_{t_2} & \dots & s_n|_{t_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1|_{t_j} & s_2|_{t_j} & \dots & s_i|_{t_j} & \dots & s_n|_{t_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1|_{t_p} & s_2|_{t_p} & \dots & s_i|_{t_p} & \dots & s_n|_{t_p} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где

$$s_i|_{t_j} = S \cos(\omega t_j + \frac{2\pi}{\lambda} x_i \cos \theta_{x_0} + \psi_0) = S \cos(\frac{2\pi \cos \theta_{x_0}}{\lambda} x_i + \psi_0 + \omega t_j)$$

мгновенные значения принятого  $i$ -м элементом сигнала в  $j$ -й момент времени;  $\psi_0$  – начальная фаза принимаемого сигнала.

Мгновенные значения принимаемого сигнала в элементах строк данной матрицы будут представлять собой дискретную запись мгновенных значений пространственной гармонике с пространственной частотой  $f_{x_{np}} = \frac{\cos \theta_{x_0}}{\lambda}$  и начальной фазой  $\Psi_0 = \psi_0 + \omega t_j$  на пространственном интервале  $L$  в моменты времени  $t_j$ .

Рассмотрим воображаемую линейную АР, образованную из исходной путем ее повторения по оси  $X$  через интервал  $L + d$ .

Пусть число этих повторений равно  $p$ . Текущий номер повторения обозначим через  $j$ . Тогда выражение для мгновенных значений сигнала в элементах этой воображаемой решетки в момент времени  $t_1$  можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} s_{ij}|_{t_1} &= S \cos \left\{ \frac{2\pi c}{\lambda} t_1 + \frac{2\pi}{\lambda} [x_i + (j-1)(L+d)] \cos \theta_{x_0} + \psi_0 + q2\pi \right\} = \\ &= S \cos \left\{ \frac{2\pi c}{\lambda} \left[ t_1 + \frac{(j-1)nd \cos \theta_{x_0} + q\lambda}{c} \right] + \frac{2\pi}{\lambda} x_i \cos \theta_{x_0} + \psi_0 \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме;  $q$  – число целых длин волн (периодов колебаний), проецируемых на апертуру АР помимо первого периода колебаний.

Из полученного выражения видно, что синтезирование воображаемой АР возможно, если производить запоминание мгновенных значений принимаемой элементами реальной АР ЭМВ в дискретные моменты времени через интервал:

$$\Delta t = \frac{(L+d) \cos \theta_{x_0} + q\lambda}{c} = \frac{nd \cos \theta_{x_0} + q\lambda}{c}. \quad (3)$$

После накопления информации за требуемый интервал наблюдения прямоугольная матрица  $A$  (1) преобразуется в вектор-строку  $A'$ :

$$A' = \left[ s_1|_{t_1} \quad s_2|_{t_1} \quad \dots \quad s_i|_{t_1} \quad \dots \quad s_n|_{t_1} \quad \dots \quad s_1|_{t_p} \quad \dots \quad s_i|_{t_p} \quad \dots \quad s_n|_{t_p} \right], \quad (4)$$

элементы которой соответствуют синтезированной линейной эквидистантной решетке длиной  $L_c = (n-1)(L+d)$ .

Выражения (2), (3) и (4) определяют алгоритм синтезирования апертуры АР по времени.

Интервал  $\Delta t$  при  $q=0$  соответствует времени прохождения волнового фронта через все элементы решетки и непосредственно связан с направлением падения  $\theta_{x_0}$  на АР электромагнитной волны (направлением фазирования синтезированной АР). Причем при изменении значения  $\Delta t$  изменяется и направление  $\theta_{x_0}$ .

Рассмотренные преобразования мгновенных значений сигналов можно пояснить рисунком 3. Для простоты пояснения начальная фаза пространственной гармоники принята равной нулю, а ее период – удвоенной длине решетки.

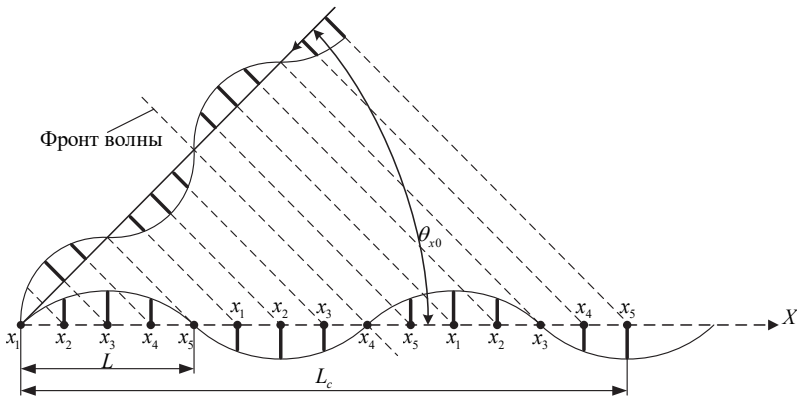


Рис. 3. Распределение мгновенных значений принятого сигнала на элементах решетки при интервалах дискретизации для  $q = 0$

Изменяя интервал наблюдения  $t_p$  (иначе – увеличивая размер синтезированной апертуры АР), можно обеспечить соответствующую АР ширину ДН. В предельном случае при условии неограниченного времени наблюдения (замороженные параметры среды распространения и статический объект) можно добиться сколь угодно узкой ДН – предельно высокой разрешающей способности. Важно отметить, что в рассмотренном случае синтезирования обработка производилась по высокой частоте.

Для формирования ДН синтезированной таким путем АР производится преобразование Фурье вектора-строки  $A'$  и определяется син-

тезирванная ДН с максимумом в направлении прихода сигнала.

В случае, если пространственная частота намного больше частоты дискретизации аналогово-цифровых преобразователей (АЦП), расположенных на выходе элементов решетки, то есть если АЦП не успевает преобразовывать поступающий с данного направления сигнал, то синтез АР можно осуществлять через интервалы дискретизации, равные числу целых длин волн.

На рисунке 4 представлен результат формирования синтезированной АР при  $q = 1$ .

Рассмотрим ситуацию, когда алгоритм синтезирования АР реализуется при обработке сигнала на промежуточной частоте. В этом случае выражение (2) принимает вид:

$$s_{ij} \Big|_{t_1} = S \cos \left\{ \frac{2\pi c}{\Lambda} t_1 + \frac{2\pi}{\lambda} [x_i + (j-1)(L+d)] \cos \theta_{x_0} + \psi_0 + q2\pi \right\} =$$

$$= S \cos \left\{ \frac{2\pi c}{\Lambda} \left[ t_1 + \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{(j-1)nd \cos \theta_{x_0} + q\lambda}{c} \right] + \frac{2\pi}{\lambda} x_i \cos \theta_{x_0} + \psi_0 \right\}, \quad (7)$$

где  $\Lambda = \frac{c}{f_n}$  длина волны, соответствующая промежуточной частоте.

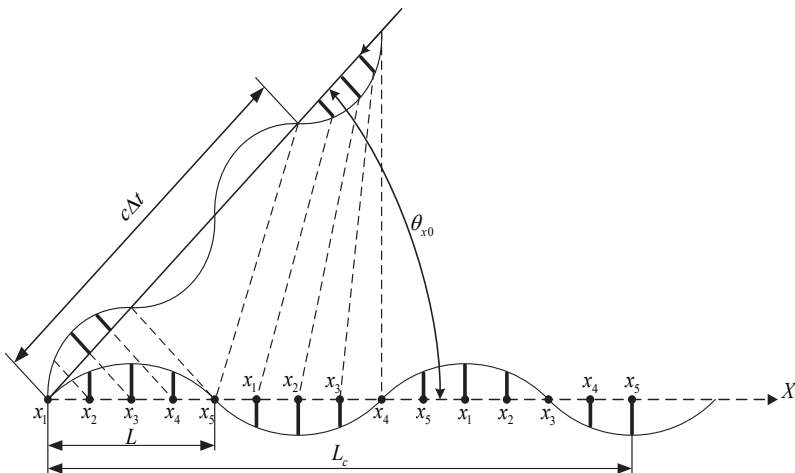


Рис. 4. Распределение мгновенных значений принятого сигнала на элементах решетки при интервалах дискретизации для  $q = 1$

Из (7) видно, что синтезирование АР с требуемыми характери-

стиками реализуется, если отсчеты мгновенных значений на промежуточной частоте производить через интервал:

$$\Delta t = \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{(L+d) \cos \theta_{x_0} + q\lambda}{c} = \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{nd \cos \theta_{x_0} + q\lambda}{c}. \quad (8)$$

В изложенном материале рассмотрен синтез АР во временной области при условии, что ось реальной АР направлена вдоль оси  $X$ .

Аналогично можно синтезировать АР во временной области и при ориентации оси реальной решетки в заданном направлении, в частности в направлении оси  $Y$  декартовой системы координат.

В этом случае наиболее общие формулы (7) и (8) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} s_{ij} \Big|_{t_1} &= S \cos \left\{ \frac{2\pi c}{\Lambda} t_1 + \frac{2\pi}{\lambda} [y_i + (j-1)(L'+d')] \cos \theta_{y_0} + \psi_0 + q2\pi \right\} = \\ &= S \cos \left\{ \frac{2\pi c}{\Lambda} [t_1 + \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{(j-1)nd' \cos \theta_{y_0} + q\lambda}{c}] + \frac{2\pi}{\lambda} y_i \cos \theta_{y_0} + \psi_0 \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta t = \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{(L'+d') \cos \theta_{y_0} + q\lambda}{c} = \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{nd' \cos \theta_{y_0} + q\lambda}{c}, \quad (10)$$

где  $L'$  и  $d'$  – длина АР и расстояние между элементами вдоль координаты  $Y$  соответственно.

Таким образом, используя две реальные ортогонально ориентированные решетки – решетку-строку и решетку-столбец, можно получить ортогонально ориентированные синтезированные линейные АР требуемых размеров. При этом полученная решетка фазируется в заданном направлении в пространстве, определенном направляющими косинусами  $\cos \theta_{x_0}$  и  $\cos \theta_{y_0}$ , путем выбора соответствующих значений периодов временной дискретизации по осям  $X$  и  $Y$ .

Следует отметить, что формулы, определяющие алгоритм синтеза апертуры АР во времени, получены в предположении, что весовые коэффициенты в каналах всех элементов исходной решетки одинаковы, то есть решетка – равноамплитудная и синфазная.

При этом из-за чётности функции  $\cos$  в полученных формулах, результат синтеза оказывается одним и тем же при изменении знака аргумента функции  $\cos$  с плюса на минус. Это приводит к неоднозначности определения направления падения ЭМВ на решетку, которые



отличаются знаком значения  $\cos \theta_0$ .

Рассмотрим особенности синтеза апертуры во времени при использовании АР, в которой фазовое распределение соответствует ее исходному фазированию в заданном направлении  $\theta_{0\phi}$ .

В этом случае наиболее общее выражение (7), описывающее алгоритм синтеза апертуры, принимает вид:

$$s_{ij} \Big|_{t_1} = S \cos \left\{ \frac{2\pi c}{\Lambda} \left[ t_1 + \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{(j-1)nd(\cos \theta_{x_0} - \cos \theta_{x_\phi}) + q\lambda}{c} \right] + \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_{x_0} - \cos \theta_{x_\phi}) + \psi_0 \right\}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что синтезирование апертуры АР с требуемыми характеристиками реализуется, если отсчеты мгновенных значений производить через интервал времени:

$$\Delta t = \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{nd(\cos \theta_{x_0} - \cos \theta_{x_\phi}) + q\lambda}{c}. \quad (12)$$

Сравнив выражения (11) и (12) с формулами (7) и (8), можно сделать вывод, что введение фазовых сдвигов для исходного фазирования АР в заданном направлении не изменяет алгоритм синтеза апертуры, а приводит лишь к изменению начала отсчета направляющего косинуса угла падения на АР электромагнитной волны. При этом, соответственно, изменяется и интервал отсчетов. Исходное фазирование АР в направлении  $\theta_{0\phi}$  обеспечивает синтезирование во времени для всех направлений  $\theta_0$  в пределах от  $-90^\circ$  до  $90^\circ$ . Тем самым устраняется неоднозначность определения углов падения ЭМВ на апертуру АР, которая имеет место при исходном фазировании в направлении нормали к оси решетки, когда  $\theta_{0\phi} = 0^\circ$ .

**3. Результаты моделирования.** В соответствии с изложенным подходом было произведено компьютерное моделирование процессов формирования функции раскрытия и диаграмм направленности АР со следующими исходными данными:

- расположение элементов решетки вдоль оси  $X$ ;
- количество элементов решетки  $n = 10$ ;
- расстояние между элементами решетки  $d = \frac{\lambda}{2}$ ;

– число отсчетов, учитываемых при синтезировании  $p = 20$ .

При этих данных исходная (до синтезирования) ширина ДН при фазировании решетки в направлении нормали к ее оси составляет:

$$(2\theta)_{0,5}^{\circ} \cong 57,3 \frac{\lambda}{nd} = \frac{57,3}{10 \cdot 0,5} \approx 11,2^{\circ}. \quad (13)$$

На рисунке 5 представлена исходная ДН АР при направлении фазирования  $\theta_{0\phi} = 0^{\circ}$ .

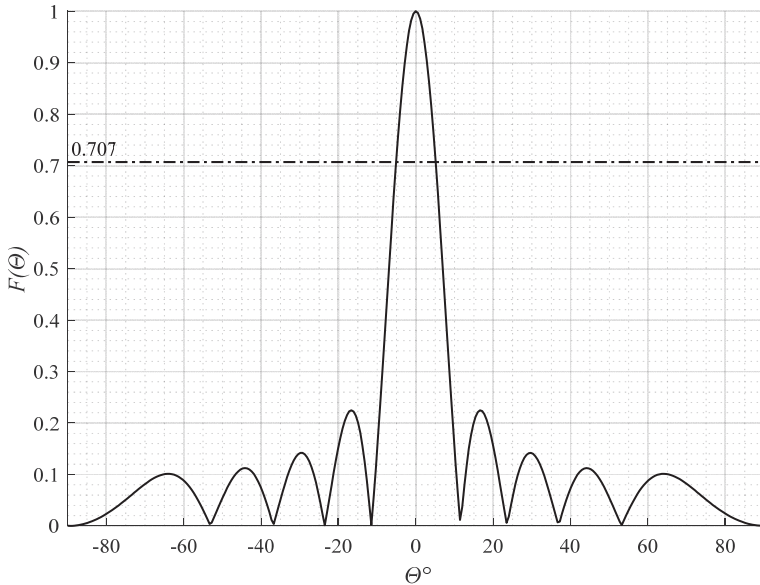


Рис. 5. Диаграммы направленности антенной решетки при  $\theta_{0\phi} = 0^{\circ}$

Рассмотрим синтез АР при ее фазировании в направлении  $\theta_{0\phi} = 50^{\circ}$ . Из графика, представленного на рисунке 6, видно, что ширина ее ДН составит примерно  $16^{\circ}$ .

Для упрощения моделирования предполагалось, что распределение амплитуды на элементах решетки равномерное, а сами элементы ненаправленные, то есть  $F_1(\theta) = 1$ .

На рисунке 7 представлено амплитудное распределение на элементах АР.

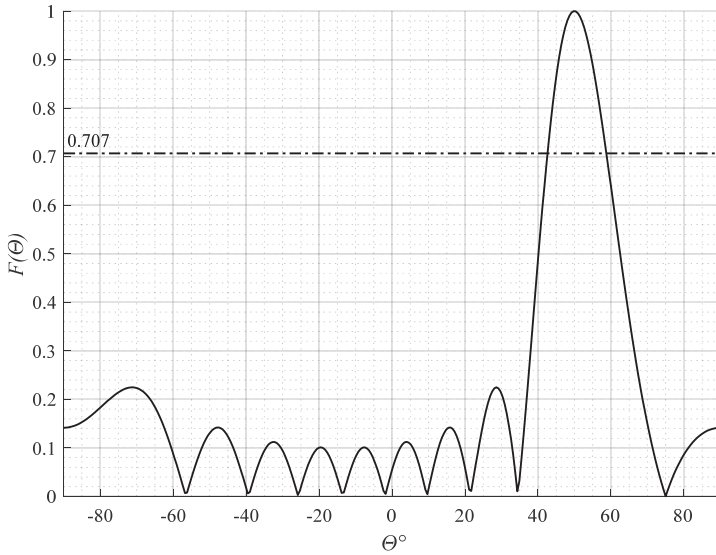


Рис. 6. Диаграммы направленности антенной решетке при  $\theta_{0\phi} = 50^\circ$

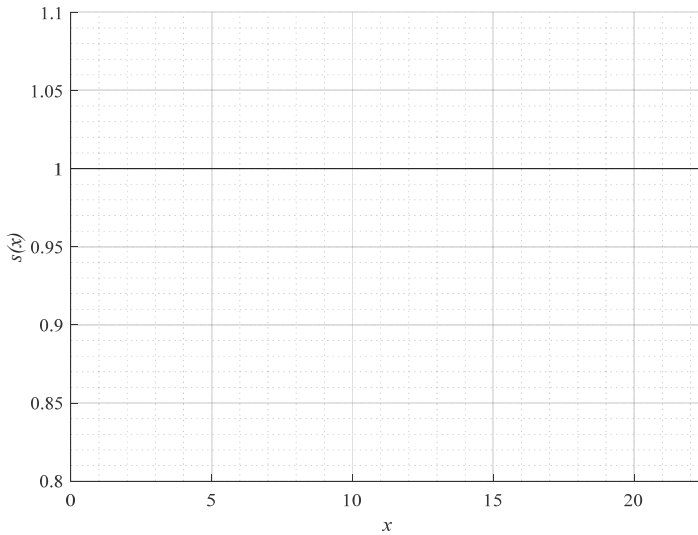


Рис. 7. Амплитудное распределение на элементах антенной решетке

На рисунках 8 и 9 представлено фазовое распределение на элементах антенной решетки при  $\theta_{0\phi} = 0^\circ$  и  $\theta_{0\phi} = 50^\circ$  соответственно.

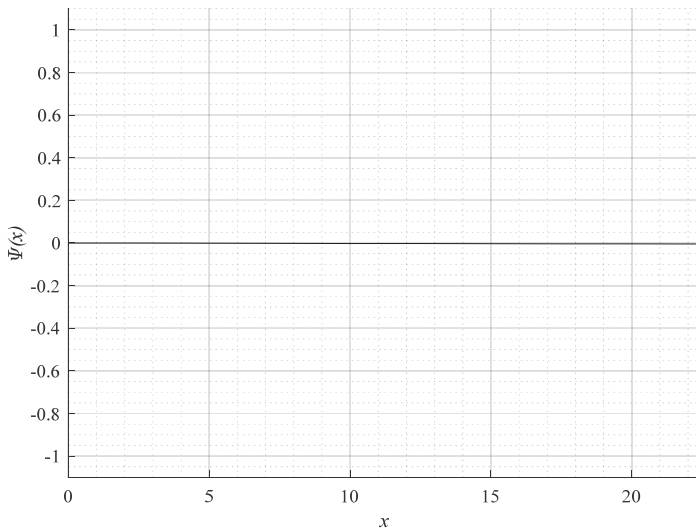


Рис. 8. Фазовое распределение на элементах антенной решетки для  $\theta_{0\phi} = 0^\circ$

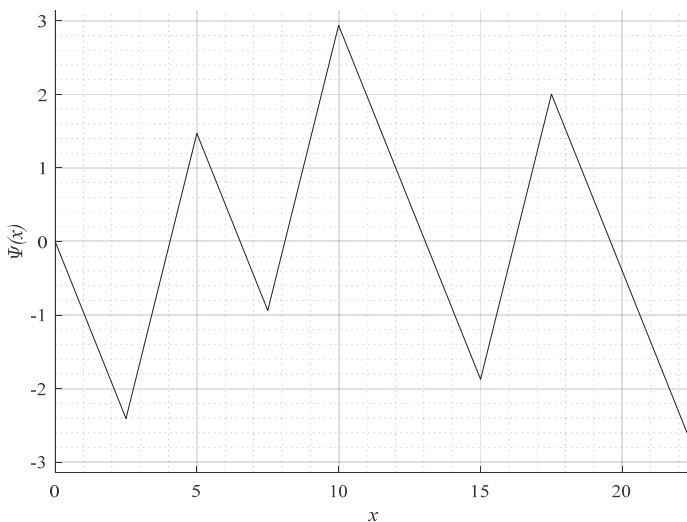


Рис. 9. Фазовое распределение на элементах антенной решетки для  $\theta_{0\phi} = 50^\circ$

На рисунке 10 представлены ДН исходной (пунктирной линией) и синтезированной (сплошной линией) АР.

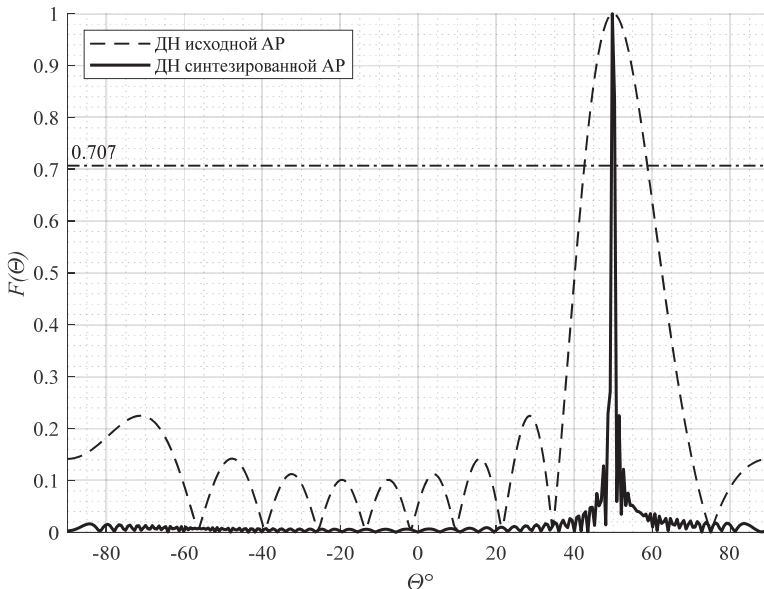


Рис. 10. Диаграммы направленности реальной и синтезированной синтезированной антенной решетки для  $\theta_{0\phi} = 50^\circ$

На рисунке 11 представлено фазовое распределение на апертуре синтезированной антенной решетки.

Из рисунка 10 видно, что при увеличении апертуры в 20 раз ( $p = 20$ ) ширина ДН сужается более чем в 10 раз, что, соответственно, увеличивает угловую разрешающую способность.

Так же можно отметить, что при синтезировании апертуры значительно уменьшается уровень боковых лепестков ДН.

Уменьшение уровня боковых лепестков ДН обеспечивает более высокую устойчивость от помех, поступающих на АР с направлений, не совпадающих с главным максимумом. При этом за счет синтеза будут подавляться помехи по боковым лепесткам.

Так как КВ диапазон, в котором работает РЛС данного типа, является интенсивно загруженным в смысле электромагнитной совместимости, то дополнительное подавление помех от других источников, приходящих с различных направлений, является важной задачей.

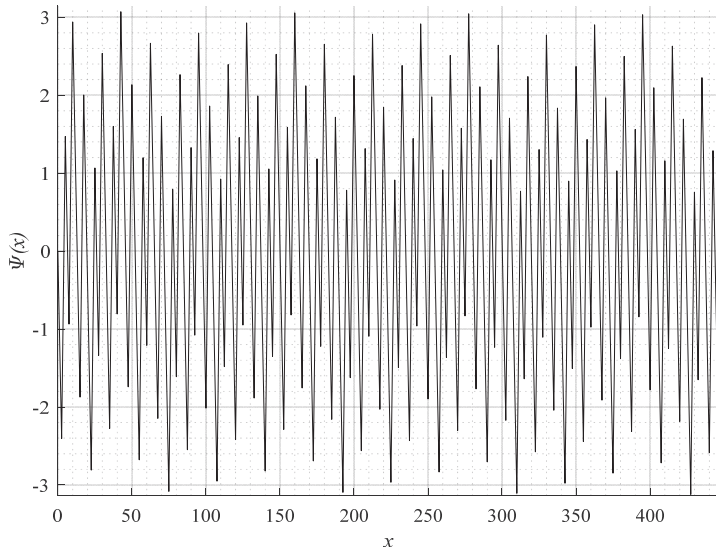


Рис. 11. Фазовое распределение на апертуре синтезированной антенной решетки для  $\theta_{0\phi} = 50^\circ$

В таблице 1 приведены результаты моделирования для различных направлений фазирования и отсчетов синтезирования.

Как видно из таблицы, при накоплении отсчетов синтезирования  $p = 20$  (т.е. при увеличении длины АР в 20 раз) ширина ДН уменьшается минимум в 5 раз и по всему диапазону сканирования остается практически неизменной ( $\approx 1^\circ$ ). Дальнейшее увеличение времени синтезирования к существенному сужению ДН не приводит.

Для анализа работы предложенного алгоритма в условиях шумов, приводящих к ошибкам в АФР, было проведено моделирование при исходных начальных условиях. Шумы задавались путем введения отклонений в направление фазирования, распределенных по нормальному закону.

На рисунке 12 представлено фазовое распределение на апертуре синтезированной АР при отсутствии шумов (сплошная линия) и при наличии шумов (пунктир). СКО флуктуаций волнового фронта от направления фазирования задавалось равным  $5^\circ$ .

ДН для данного случая представлена на рисунке 13, из которого видно, что искажение в АФР приводит к увеличению уровня боковых лепестков при незначительном отклонении основного лепестка.

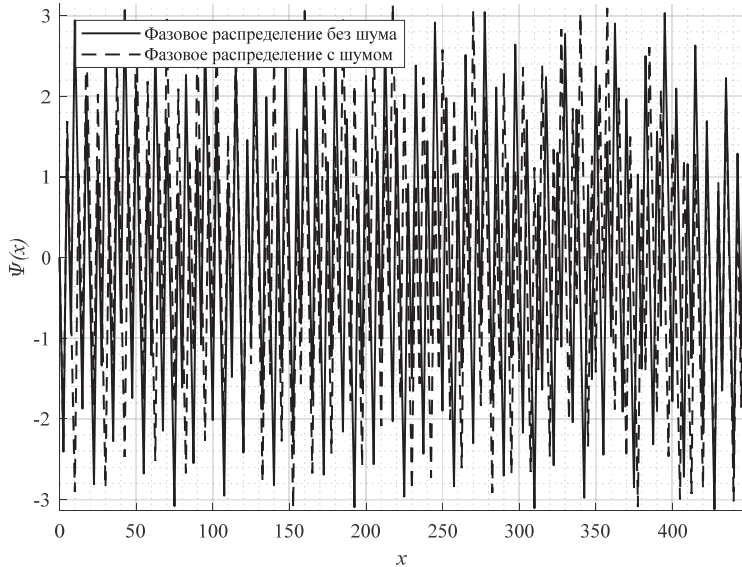


Рис. 12. Фазовое распределение на апертуре синтезированной антенной решетки

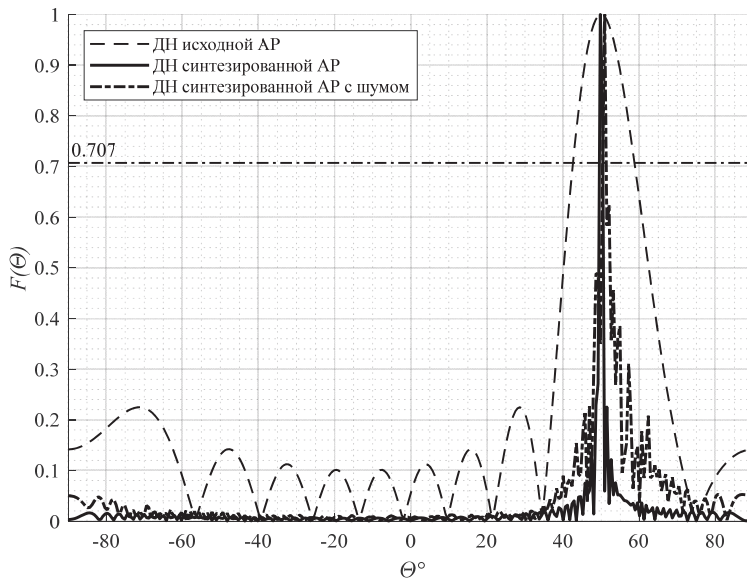


Рис. 13. Диаграммы направленности синтезированной АР

Таблица 1. Результаты моделирования

Направление фазирования, $\theta_{0\phi}^\circ$	Число отсчетов синтезирования, $p$	Ширина ДН АР, $2\theta_{0,5}^\circ$	Ширина ДН синтезированной АР, $2\theta_{0,5}^\circ$
1	2	3	4
0	2	10,3	5,5
	5		2,2
	10		1,0
	20		0,8
	50		0,4
5	2	10,5	5,1
	5		2,2
	10		1,1
	20		1,0
	50		0,9
20	2	10,9	5,7
	5		2,3
1	2	3	4
	10		1,6
	20		1,1
	50		0,6
40	2	13,3	6,8
	5		2,7
	10		1,7
	20		0,9
	50		0,7
60	2	21,7	9,7
	5		4,0
	10		2,1
	20		1,1
	50		0,9

**4. Заключение.** Таким образом, применяя алгоритм последовательного синтеза апертуры в приемных антенных решетках загоризонтных РЛС можно обеспечить разрешение по угловым координатам, значительно превышающее релейский предел. При этом нет необходимости в изменении конструкции антенных решеток. Такой подход при накоплении необходимой выборки измерений во времени позволит повысить энергетическую эффективность радиолокационных наблюдений, что дает возможность обнаружения



объектов, не видимых существующими загоризонтными РЛС, и повышения точности оценивания угловых координат. Основное достоинство представленного подхода состоит в возможности изменения параметров синтезируемой виртуальной апертуры с учетом радиолокационных характеристик обнаруживаемых объектов. При этом не требуется внесения конструктивных изменений в радиолокационный комплекс, предлагаемые решения позволяют расширить функциональные возможности системы и могут быть реализованы программными средствами.

Полученные в процессе моделирования результаты свидетельствуют о возможности лоцирования объектов с погрешностью линейного разрешения, характеризуемого СКО в пределах сотен метров, что позволяет использовать рассмотренный подход для некоторых навигационных применений и решения задач фоно-целевого обеспечения.

### Литература

1. *Фабрицио Д.А.* Высокочастотный загоризонтный радар: основополагающие принципы, обработка сигналов и практическое применение // М.: Техносфера. 2018. 936 с.
2. *Акимов В.Ф., Калинин Ю.К.* Введение в проектирование ионосферных загоризонтных радиолокаторов // М.: Техносфера. 2017. 492 с.
3. *Y. J. Guo, P. Qin, S. Chen, W. Lin and R. W. Ziolkowski.* Advances in Reconfigurable Antenna Systems Facilitated by Innovative Technologies // IEEE Access. 2018. vol. 6. pp. 5780–5794.
4. *Jianguo L.* Design Technology of Synthetic Aperture Radar // Wiley — IEEE Press. 2019. 329 p.
5. *Djurovic I.* QML-RANSAC: PPS and FM signals estimation in heavy noise environments // Signal Processing. 2017. vol. 130. pp. 142–151.
6. *Zhaoyi W., Shengnan S., Ziyang C., Zishu H.* A Modified Sequential Multiplexed Method for Detecting Airborne and Sea Targets With Over-the-Horizon Radar // Access IEEE. 2020. vol. 8. pp. 84082–84092.
7. *Алёшкин А.П., Владимиров В.В., Невзоров В.И., Савочкин П.В.* Метод повышения разрешающей способности и точности радиолокационных угловых измерений на основе последовательной пространственно-временной обработки принимаемых сигналов // Информационно-управляющие системы. 2020. № 2. С. 37-45.
8. *Орлов И.Я., Евсеев А.П., Вьюгин П.Н., Пучков А.В.* Анализ проблем создания «сверхразрешающей» цифровой антенной решетки с помощью алгоритма полигармонической экстраполяции // Труды 24-й Междунар. научн.-техн. конф. «Радиолокация, навигация, связь». 2018. С. 1–12.
9. *Djurovic I., Zhang Y.* Accurate parameter estimation of over-the-horizon radar signals using RANSAC and MUSIC algorithms // Progress in Electromagnetics Research M. 2018. vol. 67. pp. 85–93.
10. *Aliyazicioglu Z., Hwang H., Grice M., Yakovlev A.* Sensitivity analysis for direction of arrival estimation using a root-MUSIC algorithm // Engineering Letters. 2008. vol. 16.

- no. 3. pp. 353–360.
11. *Guohua Wang, Yilong Lu.* High resolution MIMO-HFSWR using sparse frequency waveform // 9th International Conference on Signal Processing 2008. 2008. pp. 2238–2241.
  12. *Xiaolong C., Xiaohan Y., Yong H., Jian G.* Adaptive Clutter Suppression and Detection Algorithm for Radar Maneuvering Target With High-Order Motions Via Sparse Fractional Ambiguity Function // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing. 2020. vol. 13. pp. 1515–1526.
  13. *Манохин Г.О., Гельцер А.А., Рогожников Е.В.* Увеличение разрешающей способности радиолокационной системы за счет параметрических методов обработки сигналов // Вестник СибГУТИ. 2015. № 1(29). С. 15–23.
  14. *Нечаев Ю.Б.* Сверхразрешающие алгоритмы в задачах азимутальной радиопеленгации с использованием кольцевых антенных решеток // Антенны. 2007. № 7. С. 29–34.
  15. *Santi F. et al.* Spatial Resolution Improvement in GNSS-Based SAR Using Multistatic Acquisitions and Feature Extraction // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 2016. vol. 54. no. 10. pp. 6217–6231.
  16. *Ma H. et al.,* "Maritime Moving Target Indication Using Passive GNSS-Based Bistatic Radar // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2018. vol. 54. no. 1. pp. 115–130.
  17. *Дмитриев Д.Д., Карцан И.Н.* Адаптивные антенные решетки с цифровым формированием луча // Решетневские чтения. 2016. Т. 1. С. 263–265.
  18. *Ратынский М.В.* Адаптация и сверхразрешение антенных решеток // М.: Радио и связь. 2003. 197 с.
  19. *Детков А.Н.* Оптимизация обработки траекторного сигнала радиолокационной системы с цифровым синтезированием апертуры антенны при использовании скрытых марковских моделей // Радиотехника и электроника. 2017. Т. 62. № 6. С. 554–560.
  20. *Чистяков В.А., Куприц В.Ю.* Сверхразрешение в антенных решетках // Решетневские чтения. 2016. Т. 1. С. 310–312.
  21. *Петров В.П.* Алгоритмы оценки пространственного спектра в адаптивных цифровых антенных решетках // Вестник СибГУТИ. 2014. № 4(28). С. 60–70.
  22. *Филонов А.А. и др.* Устройства СВЧ и антенны // Сиб.федер. ун-т. 2014. 492 с.
  23. *Лаговский Б.А.* Сверхразрешение на основе синтеза апертуры цифровыми антенными решетками // Антенны. 2013. № 6(193). С. 9–16.
  24. *Порцев В.И. и др.* Выделение парциальных траекторий с применением синтезируемой виртуальной апертуры антенны РЛС // Вестник воздушно-космической обороны. 2016. Вып. 3(11). С. 87–92.
  25. *Порцев В.И., Гелесев А.И., Красько А.Г.* Угловое сверхразрешение сигналов с использованием «виртуальных» антенных решеток // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». 2019. № 4. С. 24–34.
  26. *Baiqiang Z., Junhao X., Zhongwen H.* Super-resolution processing for shipborne HFSWR based on an improved IMP // 2016 CIE International Conference on Radar (RADAR). 2016. pp. 1–4.
  27. *Thay T., Kelsall A., Marchioni J., Riddolls R.* Frequency Monitoring System for Over-The-Horizon Radar (OTHR) using The Empirical Canadian High Arctic Ionospheric Model (E-CHAIM) // 2019 20th International Radar Symposium (IRS). 2019. pp. 1–8.

**Алешкин Андрей Петрович** – д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры, кафедра передающих, антенно-фидерных устройств и средств СЕВ, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: теория адаптивного смещенного оценивания в условиях плохой наблюдаемости параметров, антенно-фидерные устройства, радиолокация, радионавигация, пространственно-временная обработка сигналов. Число научных публикаций – 110. a\_aleshkin@mail.ru; ул. Ждановская, 13, 197198, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: 7(812)230-2815.

**Балакирев Станислав Николаевич** – адъюнкт кафедры, кафедра передающих, антенно-фидерных устройств и средств СЕВ, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: антенно-фидерные устройства, распространение радиоволн, радиолокация. Число научных публикаций – 4. bell\_356@mail.ru; Ждановская ул., 13, 197198, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)230-2815.

**Невзоров Валерий Иванович** – канд. техн. наук, доцент, преподаватель кафедры, кафедра передающих, антенно-фидерных устройств и средств СЕВ, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: антенно-фидерные устройства, радиолокация, пространственно-временная обработка сигналов. Число научных публикаций – 150. nevzorov1938@mail.ru; Ждановская ул., 13, 197198, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)230-2815.

**Савочкин Павел Владимирович** – канд. техн. наук, доцент, заместитель начальника кафедры, кафедра передающих, антенно-фидерных устройств и средств СЕВ, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: антенно-фидерные устройства, распространение радиоволн, радиолокация. Число научных публикаций – 30. p\_gehon@mail.ru; Ждановская ул., 13, 197198, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)230-2815.

A. ALESHKIN, S. BALAKIREV V. NEVZOROV P. SAVOCHKIN  
**INCREASING EFFICIENCY OF OVER-THE-HORIZONT  
SURFACE WAVE RADARS FOR DETECTING SURFACE  
OBJECTS BASED ON THE ANTENNA SYSTEM APERTURE**

*Aleshkin A., Balakirev S., Nevzorov V., Savochkin P. Increasing Efficiency of Over-the-Horizont Surface Wave Radars for Detecting Surface Objects based on the Antenna System Aperture.*

**Abstract.** Nowadays, over-the-horizon surface wave radars are used to solve the problems of monitoring the situation on the water surface adjacent to the border areas of the land. The main advantage of these means is the ability to detect surface objects beyond the optical horizon due to the propagation of an electromagnetic wave along the sea surface in the diffraction zone. However, the accuracy characteristics of such observations turn out to be extremely low due to the small signal-to-noise ratios of the reflected signal, which in turn are caused by the wide directivity pattern of the existing antenna systems.

It leads to the prevalence of background reflection in the irradiated region over the radio echo of the target object. For the same reason, stationary targets are undetectable, for which there is no Doppler frequency shift in the reflected signal spectrum. The only way to increase the signal-to-noise ratio is to narrow the radiation pattern in the direction of the detected target (an increase in the antenna system directivity). The article proposes a solution for the described problem by the method of sequential accumulation of reflected signals and their summation according to the principle of optimization of the selection of phase relationships for adjacent pulses (synthesized apertures) corresponding to the eventual front of electromagnetic waves focused in the direction of the hypothetical target.

The solution of this problem will significantly narrow the antenna directional pattern, which leads to the achievement of direction finding accuracy that meets the requirements for some navigation systems. In this case, there is no need to change the design of the antenna arrays. Computer simulation of the synthesized antenna array was performed and its directional pattern was constructed. A quantitative assessment of the increasing the angular resolution was performed in comparison with the potentially possible one determined by the Rayleigh criterion. This circumstance allows us to consider the possibility of using coastal over-the-horizon surface wave radars to detect stationary objects «invisible» by existing radars.

**Keywords:** Surface Wave Radar, Antenna Array, Directional Pattern, Amplitude-phase Distribution, Aperture Synthesis

## References

1. Fabrizio G.A. High Frequency Over-the-Horizon Radar (Russ. ed.: Dzhuzeppe A. Fabricio. *Vy'sokochastotny'y zagorizontny'y radar: osnovopolagayush'ie principy', obrabotka signalov i prakticheskoe primeneniye*. M.: Tekhnosfera Publ. 2018. 936 p.).
2. Akimov V.F., Kalinin Ju.K. *Vvedenie v proektirovaniye ionosfernykh zagorizontnykh radiolokatorov* [Introduction to the design of ionospheric over-the horizon radars]. M.: Tehnosfera. 2017. 492 p. (In Russ.).
3. Guo Y.J. et al. Advances in Reconfigurable Antenna Systems Facilitated by Innovative Technologies. *IEEE Access*. 2018. vol. 6. pp. 5780–5794.
4. *Jianguo L. Design Technology of Synthetic Aperture Radar* // Wiley — IEEE Press. 2019. 329 p.
5. Djurovic I. QML-RANSAC: PPS and FM signals estimation in heavy noise environments. *Signal Processing*. 2017. vol. 130. pp. 142–151.
6. Zhaoyi W., Shengnan S., Ziyang C., Zishu H. A Modified Sequential Multiplexed

- Method for Detecting Airborne and Sea Targets With Over-the-Horizon Radar. *Access IEEE*. 2020. vol. 8. pp. 84082–84092.
7. Ale'shkin A.P., Vladimirov V.V., Nevzorov V.I., Savochkin P.V. [Method for increasing the temporal and accuracy of radar angular measurements based on sequential spatio-temporal processing of received signals]. *Informacionno-upravljajushhie sistemy – Information and Control Systems*. 2020. vol. 2. pp. 37–45. (In Russ.).
  8. Orlov I.Ja., Evseev A.P., V'jugin P.N., Puchkov A.V. [Analysis of problems of creating a “super-resolving” digital antenna lattice using a polyharmonic extrapolation algorithm]. *Trudy 24-j Mezhdunar. nauchn.-tehn. konf. «Radiolokacija, navigacija, svjaz'» – Radar, Navigation, Communications: collected papers*. 2018. pp. 1–12. (In Russ.).
  9. Djurovic I., Zhang Y. Accurate parameter estimation of over-the-horizon radar signals using RANSAC and MUSIC algorithms. *Progress in Electromagnetics Research M*. 2018. vol. 67. pp. 85–93.
  10. Aliyazicioglu Z., Hwang H., Grice M., Yakovlev A. Sensitivity analysis for direction of arrival estimation using a root-MUSIC algorithm. *Engineering Letters*. 2008. vol. 16. no. 3. pp. 353–360.
  11. Guohua Wang, Yilong Lu. High resolution MIMO-HFSWR using sparse frequency waveform. 9th International Conference on Signal Processing 2008. 2008. pp. 2238–2241.
  12. Xiaolong C., Xiaohan Y., Yong H., Jian G. Adaptive Clutter Suppression and Detection Algorithm for Radar Maneuvering Target With High-Order Motions Via Sparse Fractional Ambiguity Function. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*. 2020. vol. 13. pp. 1515–1526.
  13. Manohin G.O., Gel'cer A.A., Rogozhnikov E.V. [Increased resolution of the radar system through parametric signal processing methods]. *Vestnik SibGUTI – SibGUTI Bulletin*. 2015. vol. 1(29). pp. 15–23. (In Russ.).
  14. Nechaev Ju.B. [Super-resolution algorithms in azimuthal radio direction finding problems using ring antenna arrays]. *Antenny – Antennas*. 2007. vol. 7. pp. 29–34. (In Russ.).
  15. Santi F. et al. Spatial Resolution Improvement in GNSS-Based SAR Using Multistatic Acquisitions and Feature Extraction. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2016. vol. 54. no. 10. pp. 6217–6231.
  16. Ma H. et al., "Maritime Moving Target Indication Using Passive GNSS-Based Bistatic Radar. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2018. vol. 54. no. 1. pp. 115–130.
  17. Dmitriev D.D., Karcan I.N. [Adaptive antenna arrays with digital beam forming]. *Reshetnevskie chtenija – Reshetnev readings*. Issue 1. pp. 263–265. (In Russ.).
  18. Ratynskij M.V. *Adaptacija i sverhrazreshenie antennyh reshetok* [Antenna Array Adaptation and Super Resolution]. M.: Radio i svjaz'. 2003. 197 p. (In Russ.).
  19. Detkov A.N. [Optimization of trajectory signal processing of a radar system with digital synthesis of antenna aperture using hidden markov models]. *Radiotekhnika i jektronika – Radio and Electronics*. 2016 vol. 62. no. 6 pp. 554–560. (In Russ.).
  20. Chistjakov V.A., Kupric V. Ju. [Superresolution in antenna arrays]. *Reshetnevskie chtenija – Reshetnev readings*. 2016. vol. 1. pp. 310–312. (In Russ.).
  21. Petrov V.P. [Spatial spectrum assessment algorithm in adaptive digital antenna arrays]. *Vestnik SibGUTI – SibGUTI Bulletin*. 2014. vol. 4(28). pp. 60–70. (In Russ.).
  22. Filonov A.A. et al. *Ustrojstva SVCh i antenny* [Microwave and antenna devices]. Sib.feder. un-t. 2014. 492 p. (In Russ.).
  23. Lagovskij B.A. [Superresolution based on aperture synthesis by digital antenna arrays]. *Antenny – Antennas*. 2013. vol. 6 (193). pp. 9–16. (In Russ.).
  24. Porsev V.I. et al. [Selection of partial trajectories using synthesized virtual aperture of the radar antenna]. *Vestnik vozdušno-kosmicheskoj oborony – Bulletin of aerospace defense*. 2016. vol. 3(11). pp. 87–92. (In Russ.).
  25. Porsev V.I., Gelesev A.I., Kras'ko A.G. [Angular over-resolution of signals using

- "virtual" antenna arrays]. *Vestnik Koncerna VKO «Almaz – Antej» – Bulletin of Concern of East Kazakhstan region "Almaz – Antey"*. 2019. vol. 4. pp. 24–34. (In Russ.).
26. Baiqiang Z., Junhao X., Zhongwen H. Super-resolution processing for shipborne HFSWR based on an improved IMP. 2016 CIE International Conference on Radar (RADAR). 2016. pp. 1–4.
27. Thay T., Kelsall A., Marchioni J., Riddolls R. Frequency Monitoring System for Over-The-Horizon Radar (OTHR) using The Empirical Canadian High Arctic Ionospheric Model (E-CHAIM). 2019 20th International Radar Symposium (IRS). 2019. pp. 1–8.

**Aleshkin Andrey** – Ph.D., Dr.Sci., Professor, Professor of the Department, Department of Transmitting, Antenna-Feeder Devices and Means of the Common Timing System, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: theory of adaptive biased estimation in conditions of poor observability of parameters, antenna feeder devices, radar, radio navigation, space-time signal processing. The number of publications – 110. a\_aleshkin@mail.ru; 13, Zdanovskaya str., 197198, St. Petersburg, Russia; office phone: 7(812)230-2815.

**Balakirev Stanislav** – Graduate Student of the Department, Department of Transmitting, Antenna-Feeder Devices and Means of the Common Timing System, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: antenna feeder devices, radio wave propagation, radar. The number of publications – 4. bell\_356@mail.ru; 13, Zdanovskaya str., 197198, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)230-2815.

**Nevezorov Valery** – Ph.D., Associate Professor, Lecturer of the Department, Department of Transmitting, Antenna-Feeder Devices and Means of the Common Timing System, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: antenna-feeder devices, radar, space-time signal processing. The number of publications – 150. nevezorov1938@mail.ru; 13, Zdanovskaya str., 197198, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)230-2815.

**Savochkin Pavel** – Ph.D., Associate Professor, Deputy Head of the Department, Department of Transmitting, Antenna-Feeder Devices and Means of the Common Timing System, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: antenna feeder devices, radio wave propagation, radar. The number of publications – 30. p\_ghon@mail.ru; 13, Zdanovskaya str., 197198, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)230-2815.

Н.В. КАПРАЛОВ, Ж.В. НАГОРНОВА, Н.В. ШЕМЯКИНА  
**МЕТОДЫ КЛАССИФИКАЦИИ ЭЭГ-ПАТТЕРНОВ  
ВООБРАЖАЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ**

*Капралов Н.В., Нагорнова Ж.В., Шемякина Н.В. Методы классификации ЭЭГ-паттернов воображаемых движений.*

**Аннотация.** Рассматриваются наиболее перспективные методы классификации электроэнцефалографических сигналов при разработке неинвазивных интерфейсов мозг–компьютер и теоретических подходов для успешной классификации электроэнцефалографических паттернов. Приводится обзор работ, использующих для классификации риманову геометрию, методы глубокого обучения и различные варианты предобработки и кластеризации электроэнцефалографических сигналов, например общего пространственного фильтра. Среди прочих подходов предобработка электроэнцефалографических сигналов с применением общего пространственного фильтра часто используется как в офлайн, так и в онлайн режимах. Согласно исследованиям последних лет сочетание общего пространственного фильтра, линейного дискриминантного анализа, метода опорных векторов и нейронной сети с обратным распространением ошибки позволило достигнуть 91% точности при двухклассовой классификации с обратной связью в виде управления экзоскелетом. Исследований по использованию римановой геометрии в условиях онлайн очень мало, и на данный момент наилучшая точность при двухклассовой классификации составляет 69,3%. При этом в офлайн тестировании средний процент классификации в рассмотренных статьях для подходов с применением общего пространственного фильтра – 77,5±5,8%, сетей глубокого обучения – 81,7±4,7%, римановой геометрии – 90,2±6,6%. За счет нелинейных преобразований методы, основанные на римановой геометрии, а также на применении глубоких нейронных сетей сложной архитектуры, обеспечивают большую точность и способность к извлечению полезной информации из сигнала по сравнению с линейным преобразованием общего пространственного фильтра. Однако в условиях реального времени важна не только точность, но и минимальная временная задержка. Здесь преимущество может быть за подходами с использованием преобразования общего пространственного фильтра и римановой геометрии с временной задержкой менее 500 мс.

**Ключевые слова:** электроэнцефалографические паттерны, воображаемые движения, риманова геометрия, методы глубокого обучения, искусственные нейронные сети

**1. Введение.** В последнее десятилетие попытки классификации электроэнцефалографических сигналов (ЭЭГ) для разработки неинвазивных интерфейсов мозг–компьютер (ИМК) исчисляются сотнями. По данным Национального центра биотехнологической информации США [1], более 1700 результатов появляются в ответ на поисковый запрос с ключевыми словами «BCI», «EEG», «Classification».

Основной проблемой является классификация ЭЭГ-сигналов с высокой точностью в режиме реального времени [2-4]. В прикладном аспекте это необходимо, чтобы разработать реабилитационные комплексы для восстановления, например, двигательных функций пациентов после инсульта [5, 6] и черепно-

мозговых травм [7] с вовлечением пациентов в управление внешними устройствами или приложениями с биологической обратной связью, в том числе в игровой форме [8, 9].

Основные сложности при работе с ЭЭГ-сигналом заключаются в низком соотношении сигнал/шум [10], в его существенной вариативности от человека к человеку [11-13] и от сессии к сессии у конкретного пациента [14, 15]. Это обуславливает необходимость делать классификатор либо робастным (устойчивым к изменениям сигнала), либо адаптивным (подстраивающимся под изменения сигнала, в том числе конкретного испытуемого) в условиях небольшого количества данных (длительные процедуры утомительны для пациентов).

Среди подходов к классификации сигналов ЭЭГ можно выделить две группы. Первая группа включает подходы, которые фокусируются на извлечении полезной информации из ЭЭГ-сигнала, построении и проспективном выборе наиболее информативных признаков.

Наиболее частым представителем этого класса является связка преобразования общего пространственного фильтра (Common Spatial Pattern, CSP), вычисления логарифма дисперсии сигнала и применения классификатора на основе линейного дискриминантного анализа (Linear Discriminant Analysis, LDA).

Основным преимуществом подходов этой группы является интерпретация результатов – возможность оценить важность отдельного признака, а затем установить, какой части сигнала соответствует этот признак. Классификаторы на основе римановой геометрии тоже могут быть отнесены к этой группе, однако интерпретация преобразований в многомерном пространстве весьма затруднительна.

Вторая группа включает в себя подходы, в которых используется автоматическое выделение признаков, например свёрточные нейронные сети. Главными достоинствами таких подходов является возможность работы с исходным сигналом и большая способность к обобщению, которая может способствовать устойчивости классификатора к выбросам. Способность к обобщению в целом увеличивается при усложнении архитектуры классификатора, однако также возрастают временные и вычислительные затраты ресурсов на его обучение. В ситуации автоматического извлечения признаков интерпретация результатов сложна, если не удастся восстановить, какую информацию несут в себе извлеченные признаки.

Далее в обзоре будут рассмотрены наиболее часто используемые методы и ряд подходов, способных улучшить точность классификации (decoding accuracy) ЭЭГ-паттернов. Так,



например, в работе [16] было показано, что использование признаков, содержащих информацию об аналитической частоте ЭЭГ-сигнала и показателях функциональной коннективности (brain connectivity) увеличивает точность классификации или распознавания ЭЭГ-паттернов с 72,9 % до 79,7 %.

В обзоре рассматриваются данные с учетом нескольких различных классов, например:

- воображаемые движения левой и правой рукой;
- состояние покоя и состояние воображения движения любой рукой;
- воображаемые движения левой и правой рукой, двумя ногами или языком.

Данные приводятся в условиях как офлайн, так и онлайн классификации.

**2. Задача классификации паттернов ЭЭГ.** Формальная постановка задачи классификации паттернов ЭЭГ заключается в следующем: дан набор из  $N$  проб  $\{X_1, \dots, X_N\}$ , для каждой из которых известен класс  $y_i \in \{1, \dots, K\}$ , где  $K$  – количество рассматриваемых классов. Каждая проба является матрицей амплитуд сигнала размера  $E \times T$ , где  $E$  – количество используемых электродов,  $T = \Delta t \cdot f_s$  – количество временных отсчетов при длине пробы  $\Delta t$  и частоте дискретизации  $f_s$ . Необходимо построить и обучить на имеющихся данных классификатор, способный определять класс для проб в последующих тренировочных сессиях.

Непосредственно перед классификацией проб применяются некоторые методы предобработки сигнала, направленные на улучшение итоговой точности классификации. Можно выделить следующие типичные методы предобработки: аугментация, декомпозиция, пространственная фильтрация, извлечение и выбор признаков.

Поскольку для некоторых классификаторов точность сильно зависит от количества имеющихся данных, в некоторых случаях прибегают к *аугментации* – искусственному увеличению объема имеющихся данных. Например, с помощью метода скользящего окна можно вместо одной пробы извлечь несколько проб с перекрытием [17], при этом новые пробы будут относиться к тому же классу, что и исходная. Также в настоящее время исследуются возможности использования генеративно-сопоставительных сетей (Generative Adversarial Network, GAN) [18, 19], которые позволяют генерировать сигналы, похожие на ЭЭГ как во временной, так и в частотной областях.

*Декомпозиция* заключается в разбиении исходного сигнала на отдельные компоненты, среди которых возможно выбрать наиболее специфичные для конкретного испытуемого. Таким образом, осуществляется индивидуальная подстройка классификатора. К методам декомпозиции можно отнести полосовую фильтрацию, использованную в [20], а также различные методы выделения мод, в частности Empirical Mode Decomposition (EMD) [21] и Local Characteristic-Scale Decomposition (LCD) [16].

*Пространственная фильтрация* используется для повышения соотношения сигнал/шум. Так, в [22] показано, что использование специальных референтов («нулевых» электродов/отведений сравнения) может существенно влиять на точность классификации и чувствительность к артефактам. Наиболее используемым методом пространственной фильтрации является преобразование Common Spatial Pattern (CSP) [23-25], формирующее линейные комбинации значений сигнала отдельных каналов, позволяющие наилучшим образом различить два класса.

В качестве входных данных любому методу классификации необходимо предоставить набор чисел, называемых *признаками*, при этом для успешной классификации необходимо, чтобы признаки в совокупности позволяли отличить пробы, относящиеся к разным классам. В качестве признаков могут быть использованы исходные матрицы  $X_i$ , однако значение амплитуды сигнала в конкретный момент времени не является стабильным признаком.

В связи с этим часто применяется процедура *выделения признаков*, в ходе которой на основе исходного сигнала рассчитываются более стабильные признаки. При выделении признаков могут быть рассмотрены временная область, частотная область или обе области сразу. Во временной области используются коэффициенты авторегрессионной модели [22, 26], ковариационные матрицы [27], а также логарифм дисперсии сигнала [20, 24]. Для учета информации о частотной области используются мощность в полосе [28], а также вейвлет-коэффициенты [28].

После выделения признаков производится *выбор признаков*, наилучшим образом позволяющих предсказать класс проб. Для этого используются отбор на основе взаимной информации значений признака и целевой переменной (класса) [29], метод роя частиц [30] и кластеризация признаков [31]. Для решения задачи классификации с использованием выбранных признаков используются методы машинного обучения.

**3. Методы классификации ЭЭГ паттернов.** Методы машинного обучения, применимые для классификации ЭЭГ-

паттернов, можно разбить на несколько категорий в соответствии с обзорами [10, 32]. Ниже приводится список методов, разбитых на категории со ссылками на работы, в которых был использован соответствующий метод:

- методы построения гиперплоскости, разделяющей классы: линейный дискриминантный анализ (Linear Discriminant Analysis, LDA) [4], метод опорных векторов (Support Vector Machine, SVM) [2];
- методы, основанные на вычислении близости между объектами: метод ближайших соседей [33], Minimum Riemannian Distance to Mean (MRDM) [27];
- вероятностные методы: байесовский классификатор [34], марковские модели [35];
- деревья решений [33];
- глубинные нейронные сети [17, 36, 37].

В следующих разделах подробно обсуждаются наиболее популярные подходы, использующие CSP, концепцию римановой геометрии и глубинные нейронные сети.

В таблице 1 представлено краткое сравнение часто используемых подходов, составленное на основе описаний методов классификации, которые используются в рассматриваемых в обзоре работах.

Таблица 1. Сравнение рассматриваемых в обзоре методов

Критерии	Подходы		
	CSP	Риманова геометрия	Глубинные нейронные сети
Ключевые особенности	Простота интерпретации результата	Сочетание робастности и адаптивности	Автоматическое извлечение признаков
Входные данные	Ковариационные матрицы проб	Ковариационные матрицы проб	Исходный сигнал и/или извлеченные признаки
Вычислительная сложность	Невелика, зависит от числа используемых каналов	Невелика, зависит от числа используемых каналов	Может быть велика при использовании сложной архитектуры
Графическое представление признаков и/или результата	Топографические карты	Визуализация многомерного пространства проб с использованием методов снижения размерности	Топографические карты

**4. Преобразование CSP.** Это преобразование, целью которого является получение пространственных фильтров, позволяющих наилучшим образом разделить классы. Метод основан на одновременной диагонализации ковариационных матриц, соответствующих разным классам [23]. Впервые этот метод был использован для классификации сигналов ЭЭГ, связанных с движениями, в [24, 25]. Алгоритм CSP включает в себя следующие шаги:

1. Для каждой пробы необходимо вычислить ковариационную матрицу:

$$C_i = \frac{1}{T-1} \cdot (X_i - E[X_i]) \cdot (X_i - E[X_i])^T. \quad (1)$$

2. Для каждого класса рассчитываются средние ковариационные матрицы  $\overline{C}_l$  и  $\overline{C}_r$ . Из усредненных матриц составляется объединенная матрица, которая может быть спектрально разложена:

$$C_c = \overline{C}_l + \overline{C}_r = U_c \lambda_c U_c^T.$$

3. Вычисляется матрица для отбеливания (whitening) объединенной матрицы:

$$P = \sqrt{\lambda_c^{-1}} U_c.$$

В результате отбеливания все собственные числа матрицы  $PC_c P^T$  становятся равными 1.

4. Отбеливание с использованием матрицы  $P$  применяется к средним ковариационным матрицам классов:

$$S_l = P \overline{C}_l P^T; S_r = P \overline{C}_r P^T.$$

5. Матрицы  $S_l$  и  $S_r$  по построению имеют одни и те же собственные векторы, то есть их компоненты одним и тем же образом выражаются через изначальные сигналы, при этом для собственных чисел верно следующее соотношение:

$$S_l = B \overline{\lambda}_l B^T; S_r = B \overline{\lambda}_r B^T; \overline{\lambda}_l + \overline{\lambda}_r = I.$$

Поскольку сумма двух соответствующих собственных чисел будет равна 1, собственный вектор, соответствующий наибольшему

собственному числу матрицы  $S_l$ , будет соответствовать наименьшему собственному числу матрицы  $S_r$ , и наоборот. Проекция отбеленной ЭЭГ на несколько первых и последних собственных векторов  $B$ , соответствующих наибольшим значениям  $\bar{\lambda}_l$  и  $\bar{\lambda}_r$ , будут оптимальны для классификации.

6. Итоговая матрица преобразования  $W$  формируется следующим образом:

$$Z_i = WX_i = (B^T P)^T X_i.$$

После применения преобразования CSP в качестве признака для классификации используется логарифм нормализованной дисперсии  $n$  наилучших компонент:

$$f_p = \log \left( \frac{\text{var}(Z_p)}{\sum_{i=1}^{2m} \text{var}(Z_i)} \right).$$

Взятие логарифма используется для приближения распределения значений признака к нормальному.

Для интерпретации результатов преобразования используются столбцы матрицы  $W^{-1}$ .

На рисунке 1 представлены топографические карты паттернов активации с использованием CSP, позволяющие наилучшим образом различить воображаемые движения левой и правой рук. Для вычисления были использованы данные испытуемого S001 набора данных EEGBCI [38], а также реализация алгоритма и визуализации из библиотеки MNE-Python [39].

Преобразование CSP предназначено для разделения двух классов, однако оно также может быть обобщено на большее количество классов. В работе [40] наилучшую точность предсказания четырех классов принесла стратегия обобщения «один против остальных» (One vs Rest). Согласно этой стратегии для каждого класса применялось преобразование CSP, наилучшим образом отличающее пробы этого класса от проб всех остальных классов.

Точность классификации сильно зависит от индивидуальных особенностей человека. В связи с этим можно рассмотреть набор полосовых фильтров (Filter Bank) и для сигнала ЭЭГ, отфильтрованного в каждой из полос, извлечь признаки после

преобразования CSP. Далее можно выбрать наиболее информативные для каждого испытуемого признаки, таким образом обеспечивая индивидуальную подстройку классификатора под человека. Комбинация CSP и полосовых фильтров получила название FBCSP, и этот алгоритм показал наилучший результат в рамках BCI Competition IV для классификации воображаемых движений [40].



Рис. 1. Топографические карты, соответствующие паттернам активации, полученным в результате применения алгоритма CSP для классификации воображаемых движений левой и правой рук (сжатие кисти)

**5. Методы классификации, основанные на концепции римановой геометрии.** Концепция римановой геометрии предполагает рассмотрение метрического пространства (риманова многообразия), которому принадлежат ковариационные матрицы проб. Эта концепция была впервые использована для классификации ЭЭГ в работах [27]. Для определения близости проб вводится метрика расстояния между ковариационными матрицами этих проб, определяемая выражением (2):

$$\delta_R(C_1, C_2) = \left\| \log(C_1^{-1}C_2) \right\|_F = \left[ \sum_{i=1}^N \log^2 \lambda_i \right]^{1/2}, \quad (2)$$

где  $\lambda_i, i = 1 \dots N$  – собственные числа матрицы  $C_1^{-1}C_2$ .

Одним из базовых методов классификации является метод ближайших соседей, в основе которого лежит предположение о том, что близкие объекты должны относиться к одному и тому же классу. Алгоритм Minimum Riemannian Distance to Mean (MRDM) [27] является обобщением метода ближайших соседей для риманова многообразия, используя (2) для оценки близости объектов, то есть проб. Алгоритм включает следующие шаги:

1. Вычислить ковариационные матрицы проб из обучающей выборки согласно выражению (1).

2. Вычислить ковариационную матрицу  $C_i$  для пробы, класс которой необходимо определить.

3. Для всех классов  $k = 1 \dots K$  вычислить геометрическое среднее ковариационных матриц проб  $C_1^k, \dots, C_{N_k}^k$ , соответствующих этому классу:

$$C^k(C_1^k, \dots, C_{N_k}^k) = \arg \min_C \sum_{i=1}^N \delta_R^2(C, C_i^k). \quad (3)$$

Геометрическое среднее набора ковариационных матриц может быть подсчитано в соответствии с подходом Фреше с помощью итерационного алгоритма [41].

4. Вычислить риманово расстояние от матрицы пробы, класс которой неизвестен, до средних матриц каждого из классов. Присвоить новой пробе класс, расстояние до матрицы которого оказалось наименьшим:

$$k = \arg \min_k \delta_R(C_i, C^k).$$

Альтернативным способом применения концепции риманова пространства является использование касательного пространства (Tangent Space, TS) [42]. Многие эффективные методы машинного обучения (LDA, SVM, нейронные сети) не могут быть использованы во введенном метрическом пространстве. Поскольку ковариационные матрицы являются симметричными и положительно определенными, введенное пространство локально похоже, то есть может быть отображено на касательное евклидово пространство.

Касательное пространство может быть построено в любой точке риманова многообразия, при этом векторы на гиперплоскости, соответствующие ковариационным матрицам, будут определяться выражением (4):

$$S_i = \text{Log}_C(C_i) = C^{1/2} \log\left(C^{-1/2} C_i C^{-1/2}\right) C^{1/2}, \quad (4)$$

где  $C$  – точка (ковариационная матрица), в которой строится касательное пространство;  $\log$  – матричный логарифм.

Таким образом, алгоритм TS включает следующие шаги:

1. Вычислить ковариационные матрицы проб из обучающей выборки согласно (1).
2. Вычислить риманово среднее ковариационных матриц всех проб, используя (3).
3. Спроецировать ковариационные матрицы всех проб на касательное пространство в точке риманова среднего согласно (4).
4. Для полученных проекций можно применять все популярные методы машинного обучения, в частности LDA и SVM.

Для визуализации можно использовать отображение tSNE, позволяющее спроецировать точки, находящиеся в многомерном пространстве, на 2D плоскость. Также в работе [43] более наглядно описываются манипуляции над ковариационными матрицами в римановом многообразии.

**6. Глубинные нейронные сети.** Глубинные нейронные сети в зависимости от используемой архитектуры могут решать как задачу классификации, так и задачу выделения признаков. Полносвязные сети прямого распространения [44] подходят для классификации, а *автоэнкодеры* [45] – для автоматического выделения признаков за счет поиска скрытого представления. В то же время *сверточные сети* [46] благодаря комбинации сверточных и полносвязных слоев, отвечающих за выделение признаков и классификацию, решают обе задачи, благодаря чему на вход сверточной сети подается исходный сигнал, что лишает необходимости процедуру ручного выделения признаков. *Рекуррентные* сети с использованием LSTM-ячеек [47] позволяют работать с последовательностями, поддерживая контекст, благодаря чему активно используются для машинного перевода и могут быть применены в обработке сигналов.

Среди рассматриваемых в обзоре работ наиболее часто были использованы свёрточные нейронные сети (Convolutional Neural Networks, CNN). Сверточная нейронная сеть – один из видов архитектуры искусственной нейронной сети, предложенный Яном ЛеКуном [46] для эффективного распознавания образов в изображениях. В отличие от обычной ИНС, в сверточной нейронной сети еще есть сверточные слои, а также слои пулинга. Комбинации подобных слоев позволяют эффективно извлекать признаки из входных данных, существенно уменьшая количество обрабатываемой информации, при этом сохраняя специфичную для задачи классификации информацию.

При работе с сигналами ЭЭГ на вход сверточной сети могут быть поданы спектрограммы, в таком случае задача сводится к классификации изображений. Альтернативным вариантом входных



данных является исходной сигнал. В таком случае часто используется архитектура, являющаяся адаптацией метода FBCSP. В работе [17] описывается подобная архитектура ShallowNet, представленная на рисунке 2. Ниже описаны все используемые слои и их предназначение:

1. Выполняется свертка во времени с использованием ядра  $1 \times 25$  с целью выделения характерных пиков в сигнале.
2. Производится свертка по всем электродам, этот этап аналогичен пространственной фильтрации в алгоритме FBCSP.
3. Все значения матрицы поэлементно возводятся в квадрат.
4. Для каждого окна  $1 \times 75$  производится пулинг по времени: берется среднее значение элементов в окне.
5. От каждого элемента берется его натуральный логарифм. Комбинация шагов 3-5 эквивалентна вычислению логарифма дисперсии сигнала в алгоритме FBCSP.
6. Задачу классификации для полученных после пулинга признаков решает комбинация из полносвязного и softmax слоев.

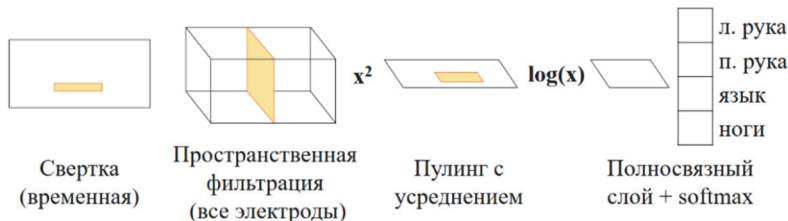


Рис. 2. Архитектура сверточной сети ShallowNet из работы [17]

Главным недостатком методов глубокого обучения является зависимость от количества имеющихся данных – чем больше данных, тем лучше обобщение. В настоящее время для решения этой проблемы используются методы аугментации, уже упомянутые ранее.

**7. Сравнение методов классификации.** Сравнение производилось на наборе данных BCI Competition IV/2a [48]. В исследовании участвовало 9 здоровых испытуемых, выполнявших 4 типа воображаемых движений: левой и правой рукой, обеими ногами сразу, языком. При регистрации ЭЭГ были использованы 22 отведения (Fz, Fc3, Fc1, Fcz, Fc2, Fc4, C5, C3, C1, Cz, C2, C4, C6, Cp3, Cp1, Cpz, Cp2, Cp4, P1, Pz, P2, Poz), длительность пробы составила 4 с [48]. В таблице 2 представлены работы, в которых описаны методы, дающие наибольшую точность классификации для набора данных BCI Competition IV/2a, а также работы, стоящие в основе рассматриваемых в обзоре подходов.

В рассматриваемых работах были использованы два метода оценки точности классификации – контроль на отложенных данных (hold-out) и кросс-валидация. При «hold-out» часть данных (обычно 20-30%) выбирается в качестве тестовой выборки и никак не используется при обучении и настройке параметров классификатора. При кросс-валидации данные делятся на заранее выбранное (часто используемые значения – 5, 10) число частей (folds), и каждая часть по очереди выступает в качестве тестовой выборки, в то время как все остальные в сумме образуют тренировочную выборку. Финальная оценка точности является средним значением точностей, полученных на каждой части по отдельности. Для компенсации случайных эффектов (разбиение данных, инициализация моделей машинного обучения) и получения более стабильных оценок также используется усреднение нескольких результатов.

Использование того или иного метода может влиять на итоговый результат. Например, если регистрация данных проходила посессионно в течение нескольких дней, то часто наблюдается существенная разница между записями первых и последних сессий. В таком случае возникает необходимость адаптации модели к состоянию испытуемого в первый и последний дни. Эффект адаптации можно оценить, если обучать модель на нескольких первых сессиях, а тестировать – на последних. Однако при использовании кросс-валидации возможно смешивание проб из разных сессий, что может нарушить объективность оценки способности модели к адаптации.

Таблица 2. Сравнение точности классификации с использованием разных подходов для набора данных VCI Competition IV/2a (4 класса, воображение движений левой и правой рукой, обеими ногами, языком)

	Сигнал	Классификация	Результат
Статья	а) анализируемый диапазон частот; б) длительность окна анализа	а) предобработка; б) используемые признаки; в) метод классификации; г) метод выбора признаков	а) точность; б) каппа; в) метод оценки
[49]	а) 4-38 Гц; б) 0-4 с, эпоха анализа 0,8 с	а) 16 фильтров, ширина полосы 4 Гц, перекрытие 2 Гц; б) логарифм дисперсии сигнала; в) CNN, LSTM; г) –	а) 83; б) 0,8; в) hold-out, усреднение 10 реализаций

## Продолжение таблицы 2

[16]	а) 8-30 Гц; б) не указана	а) LCD + преобразование Гильберта, CSP; б) аналитическая частота, логарифм дисперсии сигнала, Brain Network Features; в) SRDA; г) Multi-Cluster Feature Selection	а) 79,7; б) 0,73; в) 10-fold CV
[50]	а) не указан; б) (-0,5)-4 с	а) аугментация путем добавления шума; б) вектор амплитуд сигнала; в) CNN; г) –	а) 74,6; б) 0,659; в) не указан
[51]	а) 4-40 Гц; б) 0,5-2,5 с	а) FBCSP; б) огибающая сигнала; в) CNN (Channel-wise Convolution with Channel Mixing); г) –	а) 74,46; б) – в) hold-out, усреднение 50 реализаций
		а) FBCSP; б) огибающая сигнала; в) CNN (Channel-wise CNN); г) –	а) 73,07; б) – в) hold-out, усреднение 50 реализаций
[36]	а) не указан; б) 0,5-2,5 с	а) Exponential Weighted Moving Average; б) вектор амплитуд сигнала; в) CNN (EEGNet); г) –	а) 73,7; б) – в) 4-fold CV
[17]	а) 4-38 Гц; б) 0,5-4 с, эпоха анализа 2 с	а) Exponential Weighted Moving Average; б) вектор амплитуд сигнала; в) CNN (Shallow ConvNet); г) –	а) 73,7; б) – в) не указан
[52]	а) 8-30 Гц; б) 1-3 с	а) FBCSP; б) вектор амплитуд сигнала; в) RNN (GRU-RNN); г) –	а) 73,56; б) – в) не указан
		а) FBCSP; б) вектор амплитуд сигнала; в) RNN (LSTM-RNN); г) –	а) 72,58; б) – в) не указан

## Продолжение таблицы 2

[17]	а) 4-38 Гц; б) 0,5-4 с, эпоха анализа 2 с	а) Exponential Weighted Moving Average; б) вектор амплитуд сигнала; в) CNN (Deep ConvNet); г) –	а) 70,9; б) – в) не указан
[33]	а) 8-30 Гц; б) 0,5-2,5 с	а) переход к TS, GDA для уменьшения размерности; б) проекции ковариационных матриц в TS; в) ансамбль kNN-классификаторов; г) Mutual Information	а) 70,525; б) 0,607; в) 10-fold CV
[53]	а) 8-30 Гц; б) 1,75-3,75 с	а) переход к TSSM (Tangent Space of Sub-Manifold); б) проекции ковариационных матриц в TSSM; в) LDA; г) –	а) 69,475; б) 0,593; в) 30-fold CV
[20]	а) 4-40 Гц; б) 0,5-2,5 с	а) FBCSP; б) логарифм дисперсии сигнала; в) Naïve Bayesian Parzen Window; г) Mutual Information	а) 67,75; б) 0,57; в) hold-out
[27]	а) 8-30 Гц; б) 0,5-2,5 с	а) – б) ковариационные матрицы, переход к TS; в) LDA; г) ANOVA, FDR	а) 67,525; б) 0,567; в) hold-out

Примечание 1: (FB)CSP – (Filter Bank) Common Spatial Pattern, ConvNet, CNN – Convolutional Neural Network, LSTM – Long Short-Term Memory, LCD – Local Characteristic-Scale Decomposition, SRDA – Spectral Regression Discriminant Analysis, LDA – Linear Discriminant Analysis, TS – Tangent Space, CV – кросс-валидация,

Примечание 2: в методе hold-out используется тестовая выборка, в методе N-fold CV данные разбиваются на N частей, и поочередно каждая часть служит в качестве тестовой выборки, а все остальные части – в качестве тренировочной выборки.

Примечание 3: для сравнения классификаторов используется каппа – величина, которая показывает, насколько полученная точность  $p$

превышает  $p_e$  – вероятность случайно предсказать класс (при сбалансированных классах  $p_e = 1/K$ ):

$$\kappa = \frac{p - p_e}{1 - p_e}.$$

Проведенный сравнительный анализ результатов офлайн тестирования на наборе данных «BCI соревнования» (4 класса) показал, что наилучшая точность (83,7 %) достигалась с использованием нейронной сети глубокого обучения со свёрточными слоями и LSTM-ячейками, обученной на значениях логарифма дисперсии сигнала, которые были получены после преобразования FBCSP [49]. Сопоставимый уровень точности (79,7%) был получен с использованием признаков разной природы и дискриминатного анализа на основе спектральной регрессии (Spectral Regression Discriminant Analysis) [16]. Для классификации были использованы: 1) значения аналитической частоты мод, выделенных с помощью преобразования LCD; 2) значения логарифма дисперсии сигнала, полученного после преобразования CSP; 3) значения нескольких характеристик графа функциональной коннективности (brain connectivity) – степени вершин, средней длины кратчайшего пути и др. В графе функциональной коннективности вершинами являются отведения ЭЭГ, и два отведения соединены ребром, если значение коэффициента корреляции сигналов с этих отведений превышает пороговое значение (в [16] в качестве порогового значения было использовано значение 0.84).

В ряде других работ [17, 36, 50, 51, 52] точность свыше 70 % удалось получить при использовании сверточных и рекуррентных сетей различной архитектуры – EEGNet, Deep/Shallow ConvNet и других.

**8. Применение Common Spatial Pattern для классификации ЭЭГ сигналов.** Согласно данным, приведенным в таблице 3, исследования с применением CSP в офлайн режиме достаточно многочисленны. С использованием данного подхода к преобразованию сигнала точность классификации колеблется между 75-84 % при двухклассовой офлайн классификации. При этом лучший результат (точность классификации – 84,2 %) достигнут при

варьировании данных BCI соревнования, индивидуальном выборе частотной полосы классификации, использовании линейного дискриминантного анализа и данных с большого количества электродов (118) [4]. По сравнению с другими методами CSP преобразование часто используется в онлайн классификации при управлении экзоскелетом в качестве обратной связи (табл. 4), точность двухклассовой классификации может достигать 87-91 % при выборе индивидуальных частот анализа, комбинации LDA, SVM и нейросети (BPNN) [2].

Таблица 3. Применение CSP в режиме офлайн

	Данные	Классификация	Результат
Статья	а) число классов, воображаемые движения б) количество анализируемых ЭЭГ отведений; в) анализируемый диапазон частот г) длительность пробы	а) предобработка; б) используемые признаки; в) метод классификации; г) метод выбора признаков	а) точность; б) каппа; в) метод оценки
[2]	а) 2, Л./П. руки; б) 28; в) 8-30 Гц; г) 5 с, анализируемый сигнал 1-4 с	а) индивидуальный подбор полосы шириной 4 Гц: 8-12, 12-16, 14-18 или 18-22 Гц на основе ERD/ERS, затем FBCSP; б) логарифм дисперсии сигнала; в) LDA, SVM, BPNN; г) –	а) 76,38; б) – в) hold-out
	а) 2, реальные движения Л./П. руками; б) 28; в) 8-30 Гц; г) 5 с, анализируемый сигнал 1-4 с		а) 79,19; б) – в) hold-out
[4]	а) 2, Л./П. руки; б) 22 (BCI Comp. IV/2a) ; в) 0,5-100; г) 4 с	а) индивидуальный подбор частотной полосы, WOLA, CSP; б) логарифм дисперсии сигнала; в) LDA; г)	а) 78,85; б) – в) hold-out
	а) 2, Л./П. руки; б) 118 (BCI Comp. III/4a); в) 1-50; г) 3,5 с		а) 84,28; б) – в) hold-out
	а) 2, Л./П. руки; б) 60 (BCI Comp. III/3a) ; в) 0,05-200; г) 4 с		а) 67,28; б) – в) hold-out

## Продолжение таблицы 3

[28]	а) 2, покой, хождение б) 32 в) 8-13, 13-30 Гц г) 5 с	а) CSP, вейвлет-преобразование, Multi-Level Multi-View Deep Polynomial Network (MMDPN); б) логарифм дисперсии сигнала, PSD, коэффициенты вейвлетов; в) LDA; г)	а) 81,81; б) – в) hold-out, усреднение 10 реализаций
------	---	---	--

Примечание 1: (FB)CSP – (Filter Bank) Common Spatial Pattern, LDA – Linear Discriminant Analysis, SVM – Support Vector Machine, BPNN – Back Propagation Neural Network, MMDPN – Multi-Level Multi-View Deep Polynomial Network, PSD – Power Spectral Density, ERD/ERS – Event-Related Desynchronization/Synchronization, WOLA – Weight Overlap-Add.

Примечание 2: в методе hold-out используется тестовая выборка, в метода N-fold CV данные разбиваются на N частей, и поочередно каждая часть служит в качестве тестовой выборки, а все остальные части – в качестве тренировочной выборки.

Таблица 4. Применение CSP в режиме онлайн

	Данные	Классификация	Эксперимент
Статья	а) число классов, воображаемые движения; б) количество ЭЭГ отведений при анализе; в) анализируемый диапазон частот; г) длительность пробы	а) предобработка; б) используемые признаки; в) метод классификации; г) метод выбора признаков	а) обратная связь; б) точность (%); в) метод оценки
[16]	а) 4, Л./П. руки, язык, Л.+П. ноги; б) 16 (Fp1, Fp2, F3, F4, C3, C4, P3, P4, O1, O2, F7, F8, T3, T4, T5 и T6); в) 8-30 Гц; г) 4 с, анализируемый интервал 2,5-3,5 с	а) LCD + преобразование Гильберта, CSP; б) аналитическая частота, логарифм дисперсии сигнала, Brain Network Features; в) SRDA; г) Multi-Cluster Feature Selection	а) управление роботом NAO: перемещение 2D; б) – в) –

Продолжение таблицы 4

[54]	а) 2, Л./П. руки; б) в разных сессиях 9 (F3, Fz, F4, C3, Cz, C4, P3, Pz, P4) или 40; в) 8-26 Гц г) 6 с	а) CSP; б) логарифм дисперсии сигнала; в) LDA; г) –	а) управление курсором в парадигме BC12000; б) 75; в) hold-out
[29]	а) 2, покой, движение Л. или П. рукой; б) 24; в) 4-40 Гц; г) не указана	а) FBCSP; б) логарифм дисперсии сигнала; в) LDA; г) Mutual Information	а) – б) 74,53; в) hold-out
[4]	а) 2, Л./П. руки; б) 22; в) не указан; г) не указана;	а) индивидуальный подбор частотной полосы, WOLA, CSP; б) логарифм дисперсии сигнала; в) LDA; г) –	а) – б) 80,25; в) hold-out;
[2]	а) 2, Л./П. руки; б) 28; в) 8-30 Гц; г) 5 с, анализируемый сигнал 1-4 с	а) индивидуальный подбор полосы шириной 4 Гц: 8-12, 12-16, 14-18 или 18-22 Гц на основе ERD/ERS, затем FBCSP; б) логарифм дисперсии сигнала; в) LDA, SVM, BPNN; г) –	а) управление экзоскелетом: сгибание и разгибание локтя; б) 87,93; в) hold-out
	а) 2, реальные движения Л. рукой или Л.+П. ногами; б) 28; в) 8-30 Гц; г) 5 с, анализируемый сигнал 1-4 с		а) управление экзоскелетом: сгибание и разгибание; б) 91,32; в) hold-out

Примечание 1: LCD – Local Characteristic-Scale Decomposition, CSP – Common Spatial Pattern, LDA – Linear Discriminant Analysis, SRDA – Spectral Regression Discriminant Analysis, SVM – Support Vector Machine, BPNN – Back Propagation Neural Network.

Примечание 2: в методе hold-out используется тестовая выборка, в методе N-fold CV данные разбиваются на N частей, и поочередно каждая часть служит в качестве тестовой выборки, а все остальные части – в качестве тренировочной выборки.



Согласно приведенным данным исследования с применением CSP в офлайн режиме достаточно многочисленны. С использованием данного подхода к преобразованию сигнала точность классификации колеблется между 75-84% при двухклассовой офлайн классификации. При этом лучший результат (точность классификации – 84,2%) достигнут при варьировании данных ВCI соревнования, индивидуальном выборе частотной полосы классификации, использовании линейного дискриминантного анализа и данных с большого количества электродов (118) [4]. По сравнению с другими методами CSP преобразование часто используется в онлайн классификации при управлении экзоскелетом в качестве обратной связи, точность двухклассовой классификации может достигать 87-91% при выборе индивидуальных частот анализа, комбинации LDA, SVM и нейросети (BPNN) [2].

**9. Применение классификаторов на основе концепции римановой геометрии для классификации ЭЭГ сигналов.** При использовании офлайн тестирования, классификаторы на основе римановой геометрии дают лучшую точность распознавания, по сравнению с использованием CSP. По данным из таблиц 3 и 5 при классификации на 2 класса наблюдается значимое различие точности,  $p < 0.05$  по критерию Манна – Уитни, в пользу классификаторов на основе римановой геометрии:  $90,2 \pm 6,6\%$  по сравнению с  $77,5 \pm 5,8\%$  при использовании CSP. Однако при переходе к классификации онлайн (табл. 6) точность классификатора на основе римановой геометрии снижалась до 69,3% (по сравнению с режимом офлайн). Работы, адаптирующие классификаторы на основе концепции римановой геометрии к применению в режиме реального времени, еще только начинают появляться и можно ожидать их дальнейшего развития. Любопытно, что точность классификации на основе римановой геометрии (в режиме офлайн, табл. 5) не зависела от количества использованных электродов (минимальное используемое количество электродов – 14). Наибольшая точность – более 96% при классификации на 2 класса – наблюдалась при выборе специфичной для испытуемого частотной полосы на основе спектрограмм, переходе в касательное пространство и использовании классификатора LDA [31, 56]. В данных исследованиях классифицируемые состояния были либо покой, либо движение ногами. При классификации движений рук (Л./П. рука) точность классификации варьировала между 80-90%.

Таблица 5. Применение римановой геометрии в режиме офлайн

	Данные	Классификация	Результат
Статья	а) число классов, воображаемые движения; б) количество ЭЭГ отведений при анализе; в) анализируемый диапазон частот; г) длительность пробы	а) предобработка; б) используемые признаки; в) метод классификации; г) метод выбора признаков	а) точность; б) каппа; в) метод оценки
[33]	а) 4, Л./П. руки, язык, Л.+П. ноги; б) 64 (BCI Comp. III/3a) ; в) 0,05-200 Гц; г) 4 с	а) переход к TS, GDA для уменьшения размерности; б) проекции ковариационных матриц в TS; в) ансамбль kNN-классификаторов; г) Mutual Information	а) 82,78 б) – в) 10-fold CV
	а) 3 – сгибание, разгибание и отведение плеча в) 14 (AF3, F7, F3, FC5, T7, P7, O1, O2, P8, T8, FC6, F4, F8 и AF4) в) не указан г) 3 с		а) 85 б) – в) 10-fold CV
[55]	а) 2, П. рука, Л. нога; б) 118 (BCI Comp. III/4a); в) 7-30 Гц; г) анализируемый сигнал 0,5-2,5 с	а) CSP; б) ковариационные матрицы; в) FGMRDM; г) -	а) 86,13; б) 0,72; в) hold-out
	а) 2, Л./П. руки; б) 60; в) 7-30 Гц; г) анализируемый сигнал 0,5-2,5 с		а) 92,2; б) – в) hold-out
	а) 2, Л./П. руки; б) 22; в) 7-30 Гц; г) анализируемый сигнал 0,5-2,5 с		а) 81,2; б) – в) hold-out

## Продолжение таблицы 5

[31]	а) 2, покой, педалирование б) 19 (Fz, FC3, FC1, FCz, FC2, FC4, C5, C3, C1, Cz, C2, C4, C6, CP3, CP1, CPz, CP2, CP4 и Pz) в) 8-30 Гц; г) 5 с, анализируемый сигнал 0,5-5 с, эпоха анализа 0,5 с	а) выбор специфичной для испытуемого частотной полосы на основе спектрограмм; б) ковариационные матрицы, переход к TS Римана; в) LDA; г) Fast Neighborhood Component Analysis	а) 96,43; б) 0,9285; в) hold-out
[56]	а) 2, покой, педалирование; б) 19 (Fz, FC3, FC1, FCz, FC2, FC4, C5, C3, C1, Cz, C2, C4, C6, CP3, CP1, CPz, CP2, CP4 и Pz) в) 8-30 Гц; г) 5 с, анализируемый сигнал 0,5-4,5 с	а) выбор специфичной для испытуемого частотной полосы на основе спектрограмм; б) ковариационные матрицы, переход к TS Римана; в) LDA; г) Neighborhood Component Feature Selection	а) 96,66 б) 0,933 в) hold-out
[57]	а) 2, П. рука, Л. нога; б) 118 (BCI Comp. III/4a) ; в) 7-30 Гц; г) 3,5 с, анализируемый сигнал 0,5-2,5 с	а) децимация до 100 Гц, CSP, переход к TS; б) проекции ковариационных матриц в TS; в) SVM; г) Sparse Regression Model, уменьшение размерности с помощью LDA	а) 89,69 б) – в) 10-fold CV, усреднение 10 реализаций
	а) 2, Л./П. руки; б) 59 (BCI Comp. IV/1) ; в) 7-30 Гц; г) 4 с, анализируемый сигнал 0,5-2,5 с		а) 81,9 б) – в) 10-fold CV, усреднение 10 реализаций
[53]	а) 2, Л./П. руки; б) 64; в) 8-30 Гц; г) 4 с, анализируемый сигнал 1-3 с	а) переход к TSSM (Tangent Space of Sub-Manifold) ; б) проекции ковариационных матриц в TSSM; в) SVM; г) –	а) 90; б) – в) 30-fold CV

Примечание 1: CSP – Common Spatial Pattern, (FG)MRDM – (Filter Geodesic) Minimum Riemannian Distance to Mean, TS – Tangent Space, LDA – Linear Discriminant Analysis, GDA – Generalized Discriminant Analysis, kNN – k-nearest Neighbors (метод ближайших соседей).

Примечание 2: в методе hold-out используется тестовая выборка, в методе N-fold CV данные разбиваются на N частей, и поочередно каждая часть служит в качестве тестовой выборки, а все остальные части – в качестве тренировочной выборки.

Таблица 6. Применение римановой геометрии в режиме онлайн

	Данные	Классификация	Эксперимент
Статья	а) число классов, воображаемые движения; б) количество ЭЭГ отведений при анализе; в) анализируемый диапазон частот; г) длительность пробы	а) предобработка; б) используемые признаки; в) метод классификации; г) метод выбора признаков	а) обратная связь; б) точность (%); в) задержка; г) метод оценки
[3]	а) 2, покой, педалирование; б) 8 (FC1, FC2, C3, Cz, C4, Cp1, Cp2 и Pz); в) 0,1-30 Гц; г) 5 с, эпоха анализа 1 с	а) - б) ковариационные матрицы, переход к TS Римана; в) LDA; г) Fast Neighborhood Component Analysis, Pair-Wise Feature Proximity	а) – б) 69,3; в) 328 мс; г) hold-out

Примечание 1: TS – Tangent Space, LDA – Linear Discriminant Analysis.

Примечание 2: в методе hold-out используется тестовая выборка.

**10. Применение методов глубинного обучения (Deep Learning) для классификации ЭЭГ сигналов.** Согласно данным, представленным в таблице 7, использование методов глубокого обучения позволило получить лучшие результаты для классификации 4х классов воображаемых движений, равные 93,7% [50], при этом использовался вектор амплитуд сигналов и свёрточная нейросеть, которая агрегирует характеристики ЭЭГ, вычисленные во временных окнах разного размера (масштаба). Для двухклассовой классификации

лучший результат составил 95% при использовании вектора амплитуд сигналов и глубокой стековой сети (Deep Stacking Network) [62]. В первом случае – количество электродов равнялось 128, во втором – 6. В среднем по рассмотренным исследованиям (табл. 7) точность классификации 2х классов составила  $81,7 \pm 4,7\%$  – в большинстве работ (9 из 13) используются данные от трех отведений, расположенных в сенсомоторной коре. Таким образом, методы глубокого обучения могут позволить использовать малое количество электродов при распознавании сигнала в режиме реального времени. В [37] сверточная нейронная сеть была использована для управления роботом-манипулятором в режиме онлайн с задержкой 1,4 с (табл. 8).

Таблица 7. Применение методов глубинного обучения в режиме офлайн

	Данные	Классификация	Результат
Статья	а) число классов, воображаемые движения; б) количество ЭЭГ отведений при анализе; в) анализируемый диапазон частот; г) длительность пробы	а) предобработка; б) используемые признаки; в) метод классификации; г) метод выбора признаков	а) точность; б) каппа; в) метод оценки
[30]	а) 2, Л./П. руки; б) 22; в) 8-36 Гц; г) 4 с, эпоха анализа 3 с, шаг 0,3 с	а) FBCSP, TS; б) PSD, вектора проекций TS; в) CNN; г) Particle Swarm Optimization	а) 80,44 б) – в) hold-out
	а) 2, Л./П. руки; б) 3 (C3, Cz, C4); в) 8-36 Гц; г) 4 с, эпоха анализа 3 с, шаг 0,3 с		а) 82,39 б) – в) hold-out
[58]	а) 2, Л./П. руки; б) 3 (C3, Cz, C4); в) 4-38 Гц; г) 4 с, анализируемый сигнал 0,5-2,5 с	а) – б) спектрограммы; в) CapsNet; г) –	а) 78,44; б) –
[50]	а) 4, Л./П. руки, язык, покой; б) 128; в) не указан; г) 4 с, анализируемый сигнал (-0,5)-4 с	а) аугментация путём добавления шума; б) вектор амплитуд сигнала; в) Mixed-Scale CNN; г) –	а) 93,7; б) – в) hold-out

## Продолжение таблицы 7

[59]	а) 2, Л./П. руки; б) 3 (С3, Cz, C4); в) 6-30 Гц; г) 4 с, анализируемый сигнал 2 с	а) – б) спектрограммы; в) CNN + VAE; г) –	а) 78,4; б) 0,568; в) 10-fold CV, усреднение 10 реализаций
	а) 2, Л./П. руки; б) 5 (С3, C1, Cz, C2, C4); в) 6-30 Гц; г) 6 с, анализируемый сигнал 2 с		а) 80,2; б) 0,603; в) 10-fold CV, усреднение 10 реализаций
[19]	а) 2, Л./П. руки; б) 3 (С3, Cz, C4) – ВСI Comp. IV/2b; в) 0,5-100 Гц; г) 4 с	а) аугментация данных с помощью GAN; б) спектрограммы; в) CNN + MLP; г) –	а) 74,8; б) – в) hold-out
	а) 2, Л./П. руки; б) 32; в) 0,5-100 Гц; г) не указана	а) аугментация данных с помощью GAN; б) спектрограммы; в) CNN + LSTM; г) –	а) 76,4; б) – в) hold-out
[60]	а) 3, Л./П. руки, покой; б) 64; в) 8-35 Гц; г) 5 с, анализируемый сигнал 0,5-4,5 с, эпоха анализа 1 с, шаг 0,2 с	а) – б) PSD (Lomb-Scargie Periodogram); в) Deep Belief Network; г) –	а) 70; б) – в) hold-out
[61]	а) 2, Л./П. руки; б) 3 (С3, Cz, C4); в) 8-35 Гц; г) 5 с, анализируемый сигнал 0,5-4,5 с, эпоха анализа 1 с, шаг 0,2 с	а) Exponential Weighted Moving Average; б) вектор амплитуд сигнала; в) Deep Belief Network; г) –	а) 84,3; б) – в) hold-out, усреднение 10 реализаций
[37]	а) 2, Л./П. руки; б) 3 (С3, Cz, C4); в) 2-60 Гц; г) 4 с, анализируемый сигнал (-3)-4 с, эпоха анализа 4 с, шаг 125 мс	а) – б) спектрограммы (STFT); в) CNN; г) –	а) 84,24; б) – в) 5-fold CV

## Продолжение таблицы 7

[62]	а) 2, Л./П. руки; б) 6 (F3, F4, Fc5, Fc6, T7, T8); в) 8-30 Гц; г) 2 с	а) – б) вектор амплитуд сигнала; в) Deep Stacking Network; г) –	а) 95; б) – в) hold-out
	а) 2, Л./П. руки; б) 3 (C3, Cz, C4) – ВCI Comp. IV/2b; в) 0,5-100 Гц; г) 4 с	а) – б) вектор амплитуд сигнала; в) Deep Stacking Network; г) –	а) 83,55 б) – в) hold-out
[52]	а) 2, Л./П. руки; б) 3 (C3, Cz, C4) – ВCI Comp. IV/2b; в) 8-30 Гц; г) 4 с, анализируемый сигнал 1-3 с	а) FBCSP; б) вектор амплитуд сигнала; в) LSTM-RNN; г) –	а) 81,52; б) – в) не указан
	а) 2, Л./П. руки; б) 3 (C3, Cz, C4) – ВCI Comp. IV/2b; в) 8-30 Гц; г) 4 с, анализируемый сигнал 1-3 с	а) FBCSP; б) вектор амплитуд сигнала; в) GRU-RNN; г) –	а) 82,75; б) – в) не указан

Примечание 1: ConvNet, CNN – Convolutional Neural Network, CapsNet – Capsule Network, VAE – Variational Autoencoder, GAN – Generative Adversarial Network, MLP – Multi-Layer Perceptron, LSTM – Long Short-Term Memory, CSP – Common Spatial Pattern, TS – Tangent Space, PSD – Power Spectral Density.

Примечание 2: в методе hold-out используется тестовая выборка, в методе N-fold CV данные разбиваются на N частей, и каждая часть поочередно служит в качестве тестовой выборки, а все остальные части – в качестве тренировочной выборки.

Таблица 8. Применение методов глубинного обучения в режиме онлайн

	Данные	Классификация	Эксперимент
Статья	а) число классов, воображаемые движения б) количество ЭЭГ отведений при анализе в) анализируемый диапазон частот г) длительность пробы	а) предобработка б) используемые признаки в) метод классификации г) метод выбора признаков	а) обратная связь б) точность (%) в) задержка г) метод оценки

Продолжение таблицы 8

[37]	а) 3, Л./П. руки, покой б) 3 (С3, Сz, С4) в) 2-60 Гц г) не указана	а) – б) спектрограммы (STFT) в) CNN г) –	а) робот-манипулятор б) не указана в) 1,4 с г) не указан
------	---	--	---

Примечание: CNN – Convolutional Neural Network, STFT – Short-Time Fourier Transform.

**11. Сравнение разрешающей способности рассмотренных методов классификации.** Преобразование CSP преобразование дает оптимальные среди линейных методов фильтры, позволяющие различить два класса состояний [24]. При использовании CSP в нескольких частотных полосах можно подстроить классификатор под индивидуальные особенности человека, выбрав наилучший диапазон для анализа. Эта идея была использована в работе [20], показавшей наилучший результат в рамках набора данных VCI Competition IV/2a при индивидуальном выборе частотных полос ЭЭГ данных для CSP – значение каппа составило 0,57, что в случае 4 классов соответствует точности 67,75%. Преобразование FBSCP часто используется в качестве основного подхода для сравнения (baseline-модели) в задачах классификации воображаемых движений.

Поскольку классификаторы на основе римановой геометрии, а также глубинные нейронные сети являются нелинейными, эти модели могут превзойти результаты, получаемые с помощью оптимального линейного CSP. С использованием набора данных VCI Competition IV/2a в работе [17], в которой описаны сверточные сети DeepNet и ShallowNet, был показан выигрыш в точности относительно FBSCP в 2,9% и 5,7%, соответственно. Модель, описанная в работе [48] и использующая комбинацию преобразования CSP, сверточных сетей и LSTM-ячеек, показывает наибольшую среди рассмотренных работ точность для набора данных VCI Competition IV – 83% (табл. 2) для 4-х классов.

В работах, где для классификации используется концепция римановой геометрии, наблюдается менее значительное превосходство по точности относительно CSP: прирост в 2,77% в [33], прирост в 1,7% в [53], а также проигрыш в 0,25% в [27]. Тем не менее концепция римановой геометрии позволяет более эффективно осуществлять перенос обучения [14], описанный подробнее в следующем разделе.

Как показал анализ данных, применение методов глубокого обучения предполагает в основном использование сырого сигнала. В



то же время, применение концепции римановой геометрии или преобразования CSP позволяет получить преобработанный сигнал ЭЭГ, пригодный для использования с классическими методами машинного обучения.

Вышеописанные результаты были приведены для офлайн-режима тестирования. В онлайн-режиме помимо точности классификации важно также время, необходимое для предсказания класса пробы. В [37] было показано, что при классификации воображаемых сжатий левой и правой руки с использованием сверточной нейронной сети задержка составляла 1,4 с, в то время как в работе [4], использующей преобразование CSP, задержка была равна 430 мс. Таким образом, в практических приложениях в случае, когда выигрыш в точности от использования нелинейных методов невелик, на первый план может выходить быстродействие системы, и большинство работ среди рассмотренных использовали именно преобразование CSP в режиме онлайн. Однако использование римановой геометрии в режиме онлайн является перспективной стратегией, позволяющей достичь малых временных задержек (328 мс [3]).

**12. Частные случаи.** При классификации сигналов ЭЭГ возникает несколько специфических ограничений, которые необходимо преодолеть: сравнительно небольшое количество данных для обучения, а также необходимость адаптивности и/или робастности классификатора по отношению к изменению функционального состояния человека. Известно, что функциональное состояние постепенно изменяется по мере утомления пациента в пределах одной сессии регистрации ЭЭГ [63] или может резко измениться, например, под действием эмоций [64, 65]. В разные дни вариативность состояний в целом выше [15]. В ситуации направленной заданной деятельности ЭЭГ-паттерн более «стабилен», чем в условиях спонтанной активности [66]. В частности, реализация движений и их кинестетическое воображение (конечностями) в большинстве случаев характеризуется «устойчивым» паттерном десинхронизации ЭЭГ в контралатеральном полушарии на частотах сенсомоторного и бета ритмов ЭЭГ [67].

В ряде работ описаны методы классификации ЭЭГ-паттернов при использовании для обучения небольшого количества проб [68, 69]. Например, в работе [69] для классификации 3-х видов воображаемых движений одной рукой (сжатие кисти, шипковый захват (пальцами) и движение в локте с длительностью пробы 4 с) предложен адаптивный CSP. Адаптация CSP проводилась с использованием набора данных VCI competition IV dataset IIa – запись ЭЭГ от 22 электродов при выполнении 4-х воображаемых движений: левой и правой рукой, движение ногами и

языком (длительность пробы 3 с) – по 72 пробы каждого класса для каждого из 9 испытуемых. На этом наборе данных использование адаптивного CSP в отличие от фиксированного CSP приводило к значимому увеличению точности классификации при малом количестве проб в каждом классе. Точность фиксированного CSP линейно росла при использовании от 10 до 70 проб для обучения (результатирующая каппа – около 0.5), в то время как адаптивный CSP даже при использовании 10 проб каждого типа позволял достичь показателей каппа 0,45 и после 30 проб – переставал увеличиваться, достигая 0,52 для классификации четырех типов движений. При использовании адаптированного CSP при классификации новых данных (трех воображаемых движений одной рукой) и обучении на малом количестве проб (36 проб каждого класса) среднее значение каппы составило 0,474 по сравнению с 0,113 – для фиксированного DL CSP.

Для достижения адаптивности могут быть использованы различные подходы к выбору окон анализа и частотных фильтров. Так в работе [29] предлагается новый алгоритм – групповой пространственный фильтр с ограничением времени (temporally constrained sparse group spatial pattern (TSGSP)) – для индивидуального выбора пространственных фильтров и временного окна анализа. В данной работе адаптированный CSP применялся для классификации воображаемых движений из трех наборов данных: (i) VCI Competition III dataset IIIa – запись ЭЭГ от 60 электродов при выполнении 4х воображаемых движений: левой и правой рукой, движение ногами и языком (длительность пробы 4 с), по 180, 120 и 120 проб для трех испытуемых; (ii) VCI Competition IV datasets IIIa – запись ЭЭГ от 22 электродов при выполнении 4-х воображаемых движений: левой и правой рукой, движение ногами и языком (длительность пробы 3с), по 72 пробы каждого класса для каждого из 9 испытуемых; (iii) VCI Competition IV dataset IIIb – запись ЭЭГ от 3х электродов (C3, Cz, C4) при выполнении 2 воображаемых движений: левой и правой рукой (длительность пробы 4.5 с), по 160 проб каждого класса для каждого из 9 испытуемых. Наборы данных (i), (ii) были разделены для двухклассовой классификации по принципу: движение левой/правой рукой и движение ногами/языком; (iii) – оставался без изменений. Точность классификации с использованием предложенного алгоритма выбора признаков (TSGSP) и SVM в качестве классификатора достигала 88.5%, 83.3% и 84.3% соответственно.

Альтернативным подходом является перенос обучения (transfer learning), при котором часть проб в процессе тестирования используется для переобучения классификатора [14]. В [14] на примере набора данных

BCI Competition 2008, содержащих данные двух сессий из 4-х воображаемых движений – правой/левой рукой, ногами и языком (длительность пробы 4 с), рассмотрена возможность использования в качестве обучающей выборки данные одной сессии, а для тестирующей – данные другой сессии. Также допускается использование данных разных испытуемых. При использовании классификатора на основе римановой геометрии наблюдаются существенные различия распределений пространственных матриц ковариации, полученных в разных сессиях и у разных испытуемых, что осложняет перенос обучения. Предложено использовать аффинное преобразование для сближения ковариационных матриц, соответствующих разным испытуемым или разным сессиям, в римановом пространстве. Применение данного метода привело к значимому улучшению результатов по сравнению с обычным подходом (в отсутствие преобразования), в особенности при использовании данных для обучения и тестирования от разных испытуемых – без преобразования точность классификации 4-х движений составляла от 30 до 46%, после преобразования – от 57 до 69%.

Целая серия исследований проводится для уменьшения времени записи тренировочных сессий, используемых для обучения классификатора. В условиях реального времени редукция количества данных происходит и за счет артефактов.

В [60] рассматривается возможность классификации частично «поврежденного» сигнала (проб с моторным воображением) с помощью комбинации трех разных методов выделения признаков: оценки спектральной плотности сигнала – быстрого преобразования Фурье, Вельша (Welch), метода Ломба – Скаргла (Lomb-Scargle periodogram) и методов глубинного обучения (глубокая сеть доверия на основе машины Больцмана с ограниченной связностью) и SVM.

Так в работе использовались пробы с воображаемыми движениями: движение левой/правой рукой, и движение ногами. Период моторного воображения составлял 5 с из которых 4 с (0.5-4.5 с) использовались для анализа (всего 300 проб с моторным воображением). Для анализа каждая четырехсекундная проба была разделена на 16 участков с перекрытием 80% и длиной 1 с. Из данных участков ЭЭГ (случайным образом удаляли от 10 до 80% отсчетов). Было показано, что использование метода Ломба – Скаргла и глубокой сети доверия (Deep Belief Network) на основе машины Больцмана с ограниченной связностью позволяет с большей точностью классифицировать пробы с моторным воображением при потере до 80% сигнала по сравнению с быстрым преобразованием

Фурье и Вельша. Снижение точности наблюдалось для всех методов: от  $74.77 \pm 0.43\%$  при классификации полных данных до  $64.17 \pm 0.63\%$  (для метода Ломба – Скаргла) и около 51% (для методов Вельша и быстрого преобразования Фурье). Рассмотренные примеры работ направлены на улучшение потребительских свойств ИМК: ускорение обучения и повышение точности классификаторов, а также облегчение использования при разработке методов, устойчивых к «выбросам» и артефактам ЭЭГ-данных.

**13. Заключение.** Задача классификации сигналов ЭЭГ принципиально меняется при переходе от фиксированного набора данных к реальным экспериментам, поскольку классификатору необходимо подстраиваться под изменения функционального состояния человека, а также укладываться во временные ограничения режима работы в реальном времени. Как показал анализ данных, в условиях онлайн режима чаще используются более простые методы классификации, такие как LDA или SVM, а при тестировании методов на фиксированных наборах данных ЭЭГ (Data Sets) – широкий спектр методов машинного обучения. Для извлечения признаков в онлайн-режиме часто применяются CSP и CSD-преобразование (или фильтр Лапласа, преобразование Хьюрта).

Основным отличием онлайн тестирования является наличие обратной связи – испытуемый получает информацию о том, успешно ли было распознано классификатором сделанное испытуемым очередное воображаемое движение. В качестве обратной связи практикуется управление роботами Nao [16] и механической рукой [37], экзоскелетом [2] или курсором [54]. Управление может осуществляться дискретно (действие либо совершается, либо нет) или «непрерывно» (например, скорость курсора линейно зависит от мощности мю-ритма).

В целом рассмотренные работы демонстрируют преимущество использования римановой геометрии для классификации ЭЭГ-паттернов воображаемых движений в офлайн режиме, где точность двухклассовой классификации в среднем составляет  $90,2 \pm 6,6\%$  против  $77,5 \pm 5,8\%$  при использовании CSP и  $81,7 \pm 4,7\%$  при использовании сетей глубоко обучения. Количество работ по онлайн-классификации с использованием римановой геометрии и сетей глубокого обучения еще очень мало.

Так как в онлайн-режиме исключительно важна минимизация временных задержек подачи обратной связи, то при незначительном выигрыше в точности на первый план выходит быстрдействие системы, что при прочих равных условиях получено в большинстве

работ с использованием преобразования CSP в режиме онлайн и работ в контуре концепции римановой геометрии.

### Литература

1. Официальный сайт базы данных медицинских и биологических публикаций Pubmed, созданной Национальным центром биотехнологической информации США. URL: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov> (дата обращения: 15.01.2021).
2. Tang Z. et al. A Brain-Machine Interface Based on ERD/ERS for an Upper-Limb Exoskeleton Control // *Sensors*. 2016. vol. 16. no. 12. pp. 2050.
3. Romero-Laiseca M.A. et al. A Low-Cost Lower-Limb Brain-Machine Interface Triggered by Pedaling Motor Imagery for Post-Stroke Patients Rehabilitation // *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* 2020. vol. 28. pp. 988–996.
4. Belwafi K. et al. An embedded implementation based on adaptive filter bank for brain-computer interface systems // *Journal of Neuroscience Methods*. 2018. vol. 305. pp. 1–16.
5. Cervera M.A. et al. Brain-computer interfaces for post-stroke motor rehabilitation: a meta-analysis // *Ann. Clin. Transl. Neurol.* 2018. vol. 5. no. 5. pp. 651–663.
6. Bockbrader M.A. et al. Brain Computer Interfaces in Rehabilitation Medicine // *PM&R*. 2018. vol. 10. no. 9. pp. S233–S243.
7. Бирюкова Е.В. и др. Восстановление двигательной функции руки с помощью экзоскелета кисти, управляемого интерфейсом мозг-компьютер. случай пациента с обширным поражением мозговых структур // *Физиология человека*. 2016. Т. 42. № 1. С. 19–30.
8. Asensio-Cubero J., Gan J.Q., Palaniappan R. Multiresolution analysis over graphs for a motor imagery based online BCI game // *Comput. Biol. Med.* 2016. vol. 68. pp. 21–26.
9. Stankevich L.A. et al. EEG pattern decoding of rhythmic individual finger imaginary movements of one hand // *Human Physiology*. 2016. vol. 42. no. 1. pp. 32.
10. Lotte F. et al. A review of classification algorithms for EEG-based brain-computer interfaces: a 10 year update // *J Neural Eng.* 2018. vol. 15. no. 3. pp. 031005.
11. Zhao X., Zhao J., Liu C., Cai W. Deep Neural Network with Joint Distribution Matching for Cross-Subject Motor Imagery Brain-Computer Interfaces // *Biomed. Res. Int.* 2020. vol. 2020. no. 7285057.
12. Sonkin K.M. et al. Development of electroencephalographic pattern classifiers for real and imaginary thumb and index finger movements of one hand // *Artif Intell Med.* 2015. vol. 63. no. 2. pp. 107–117.
13. Xu L. et al. Cross-Dataset Variability Problem in EEG Decoding With Deep Learning // *Front. Hum. Neurosci.* 2020. vol. 14. pp. 103.
14. Zanini P. et al. Transfer Learning: A Riemannian Geometry Framework With Applications to Brain-Computer Interfaces // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2018. vol. 65. no. 5. pp. 1107–1116.
15. Rodrigues P.L.C., Jutten C., Congedo M. Riemannian Procrustes Analysis: Transfer Learning for Brain-Computer Interfaces // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2019. vol. 66. no. 8. pp. 2390–2401.
16. Ai Q. et al. Feature extraction of four-class motor imagery EEG signals based on functional brain network // *J. Neural Eng.* 2019. vol. 16. no. 2. pp. 026032.
17. Schirrmeyer R.T. et al. Deep learning with convolutional neural networks for EEG decoding and visualization // *Human Brain Mapping*. 2017. vol. 38. no. 11. pp. 5391–5420.
18. Hartmann K. G., Schirrmeyer R. T., Ball T. EEG-GAN: Generative adversarial networks for electroencephalographic (EEG) brain signals // *arXiv.org*. 2018. URL: <http://arxiv.org/abs/1806.01875> (дата обращения: 07.09.2020).
19. Yang B. et al. A Framework on Optimization Strategy for EEG Motor Imagery Recognition. Proceedings of the 41st Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). 2019. pp. 774–777.

20. *Ang K.K. et al.* Filter Bank Common Spatial Pattern Algorithm on BCI Competition IV Datasets 2a and 2b // *Front. Neurosci.* 2012. vol. 6. no. 39.
21. *Gaur P., Pachori R.B., Wang H., Prasad G.* A multi-class EEG-based BCI classification using multivariate empirical mode decomposition based filtering and Riemannian geometry // *Expert Systems with Applications.* 2018. vol. 95. pp. 201–211.
22. *McFarland D.J., McCane L.M., David S.V., Wolpaw J. R.* Spatial filter selection for EEG-based communication // *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology.* 1997. vol. 103. no. 3. pp. 386–394.
23. *Fukunaga K.* Introduction to Statistical Pattern Recognition (2<sup>nd</sup> ed.) // New York: Academic Press. 1990. 592 p.
24. *Ramoser H., Müller-Gerking J., Pfurtscheller G.* Optimal spatial filtering of single trial EEG during imagined hand movement // *IEEE Trans. Rehab. Eng.* 2000. vol. 8. no. 4. pp. 441–446.
25. *Müller-Gerking J., Pfurtscheller G., Flyvbjerg H.* Designing optimal spatial filters for single-trial EEG classification in a movement task // *Electroenc. Clin. Neurophys.* 1999. vol. 110. no. 5. pp. 787–798.
26. *Meng J. et al.* Noninvasive Electroencephalogram Based Control of a Robotic Arm for Reach and Grasp Tasks // *Sci. Rep.* 2016. vol 6. no. 38565.
27. *Barachant A., Bonnet S., Congedo M., Jutten C.* Multiclass Brain–Computer Interface Classification by Riemannian Geometry // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2012. vol. 59. no. 4. pp. 920–928.
28. *Lei B. et al.* Walking Imagery Evaluation in Brain Computer Interfaces via a Multi-View Multi-Level Deep Polynomial Network // *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* 2019. vol. 27. no. 3. pp. 497–506.
29. *Zhang Z. et al.* Modeling EEG-based Motor Imagery with Session to Session Online Adaptation. Proceedings of the 40th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). 2018. pp. 1988–1991.
30. *Majidov I., Whangbo T.* Efficient Classification of Motor Imagery Electroencephalography Signals Using Deep Learning Methods // *Sensors.* 2019. vol. 19. no. 7. pp. 1736.
31. *Delisle-Rodriguez D. et al.* System based on subject-specific bands to recognize pedaling motor imagery: towards a BCI for lower-limb rehabilitation // *J. Neural Eng.* 2019. vol. 16. no. 056005.
32. *Lotte F. et al.* A review of classification algorithms for EEG-based brain-computer interfaces // *J. Neural Eng.* 2007. vol. 4. no. 2. pp. R1.
33. *Guan S., Zhao K., Yang S.* Motor Imagery EEG Classification Based on Decision Tree Framework and Riemannian Geometry // *Computational Intelligence and Neuroscience.* 2019. vol. 2019. no. 5627156.
34. *Frolov A.A. et al.* Post-stroke Rehabilitation Training with a Motor-Imagery-Based Brain-Computer Interface (BCI)-Controlled Hand Exoskeleton: A Randomized Controlled Multicenter Trial // *Front. Neurosci.* 2017. vol. 11. pp. 400.
35. *Lisi G., Rivela D., Takai A., Morimoto J.* Markov Switching Model for Quick Detection of Event Related Desynchronization in EEG // *Front. Neurosci.* 2018. vol. 12. p. 24. doi: 10.3389/fnins.2018.00024
36. *Lawhern V.J. et al.* EEGNet: A Compact Convolutional Network for EEG-based Brain-Computer Interfaces // *J. Neural Eng.* 2018. vol. 15. no. 056013.
37. *Tayeb Z. et al.* Validating Deep Neural Networks for Online Decoding of Motor Imagery Movements from EEG Signals // *Sensors.* 2019. vol. 19. no. 1. p. 210.
38. *Schalk G. et al.* BCI2000: A General-Purpose Brain-Computer Interface (BCI) System // *IEEE TBME.* 2004. vol. 51. no. 6. pp. 1034–1043.
39. *Gramfort A. et al.* MEG and EEG data analysis with MNE-Python // *Front. Neurosci.* 2013. vol. 7. pp. 267.

40. *Tangermann M. et al.* Review of the BCI Competition IV // *Front. Neurosci.* 2012. vol. 6. pp. 5.
41. *Manton J.H.* A globally convergent numerical algorithm for computing the centre of mass on compact Lie groups // *Proceedings of the ICARCV Conference.* 2004. pp. 2211–2216.
42. *Barachant A., Bonnet S., Congedo M., Jutten C.* Classification of covariance matrices using a Riemannian-based kernel for BCI applications // *Neurocomputing.* 2013. vol. 112. pp. 172–178.
43. *Congedo M., Barachant A.* A special form of SPD covariance matrix for interpretation and visualization of data manipulated with Riemannian geometry. *Proceedings of the Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering.* 2014. pp. 495–503.
44. *Haykin S.* *Neural Networks: A Comprehensive Foundation (2 ed.).* // Prentice Hall, 1998. 842 p.
45. *Hinton G. E., Salakhutdinov R.R.* Reducing the Dimensionality of Data with Neural Networks // *Science.* 2006. vol. 313. no. 5786. pp. 504–507.
46. *LeCun Y. et al.* Backpropagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition // *Neural Computation.* 1989. vol. 1. no. 4. pp. 541–551.
47. *Hochreiter S., Schmidhuber J.* Long short-term memory // *Neural Computation.* 1997. vol. 9. no. 8. pp. 1735–1780.
48. *Brunner C., Leeb R., Mueller-Putz G., Schlögl A., Pfurtscheller G.* BCI Competition 2008 – Graz data set A. URL: [http://bbci.de/competition/iv/desc\\_2a.pdf](http://bbci.de/competition/iv/desc_2a.pdf) (дата обращения: 07.09.2020).
49. *Zhang R., Zong Q., Dou L., Zhao X.* A novel hybrid deep learning scheme for four-class motor imagery classification // *J. Neural Eng.* 2019. vol. 16. no. 6. pp. 066004.
50. *Li Y. et al.* A Channel-Projection Mixed-Scale Convolutional Neural Network for Motor Imagery EEG Decoding // *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* 2019. vol. 27. no. 6. pp. 1170–1180.
51. *Sakhavi S., Guan C., Yan S.* Learning Temporal Information for Brain-Computer Interface Using Convolutional Neural Networks // *IEEE Trans. Neural Netw. Learning Syst.* 2018. vol. 29. no. 11. pp. 5619–5629.
52. *Luo T., Zhou C., Chao F.* Exploring spatial-frequency-sequential relationships for motor imagery classification with recurrent neural network // *BMC Bioinformatics.* 2018. vol. 19. no. 344.
53. *Xie X. et al.* Motor Imagery Classification Based on Bilinear Sub-Manifold Learning of Symmetric Positive-Definite Matrices // *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* 2016. vol. 25. no. 6. pp. 504–516.
54. *Meng J. et al.* A Study of the Effects of Electrode Number and Decoding Algorithm on Online EEG-Based BCI Behavioral Performance // *Front. Neurosci.* 2018. vol. 12. pp. 227.
55. *Singh A., Lal S., Guesgen H.* Reduce Calibration Time in Motor Imagery Using Spatially Regularized Symmetric Positives-Definite Matrices Based Classification // *Sensors.* 2019. vol. 19. no. 2. pp. 379.
56. *Gurue D. et al.* Subject-specific EEG channel selection using non-negative matrix factorization for lower-limb motor imagery recognition // *J. Neural Eng.* 2020. vol. 17. no. 2. p. 026029.
57. *Kumar S., Mamun K., Sharma A.* CSP-TSM: Optimizing the performance of Riemannian tangent space mapping using common spatial pattern for MI-BCI // *Computers in Biology and Medicine.* 2017. vol. 91. pp. 231–242.
58. *Ha K.-W., Jeong J.-W.* Motor Imagery EEG Classification Using Capsule Networks // *Sensors.* 2019. vol. 19. no. 13. pp. 2854.
59. *Dai M. et al.* EEG Classification of Motor Imagery Using a Novel Deep Learning Framework // *Sensors.* 2019. vol. 19. no. 3. pp. 551.
60. *Chu Y. et al.* A Decoding Scheme for Incomplete Motor Imagery EEG With Deep Belief Network // *Front. Neurosci.* 2018. vol. 12. pp. 680.

61. *Wu H et al.* A Parallel Multiscale Filter Bank Convolutional Neural Networks for Motor Imagery EEG Classification // *Front. Neurosci.* 2019. vol. 13. pp. 1275.
62. *Tang X.-L., Ma W.-C., Kong D.-S., Li W.* Semisupervised Deep Stacking Network with Adaptive Learning Rate Strategy for Motor Imagery EEG Recognition // *Neural Computation.* 2019. vol. 31. no. 5. pp. 919–942. doi:10.1162/neco\_a\_01183
63. *Foong R. et al.* Assessment of the Efficacy of EEG-Based MI-BCI With Visual Feedback and EEG Correlates of Mental Fatigue for Upper-Limb Stroke Rehabilitation // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2020. vol. 67. no. 3. pp. 786–795.
64. *Shemyakina N.V., Dan'ko S.G.* Changes in the power and coherence of the  $\beta 2$  EEG band in subjects performing creative tasks using emotionally significant and emotionally neutral words // *Hum. Physiol.* 2007. vol. 33. pp. 20–26.
65. *Шемякина Н.В., Данько С.Г.* Влияние эмоциональной окраски воспринимаемого сигнала на электроэнцефалографические корреляты творческой деятельности // *Физиология человека.* 2004. Т. 30. № 2. С. 22–29.
66. *Schmidt H., Avitabile D., Montbrío E., Roxin A.* Network mechanisms underlying the role of oscillations in cognitive tasks // *PLoS Comput. Biol.* 2018. vol. 14. no. 9. pp. e1006430. doi: 10.1371/journal.pcbi.1006430. PMID: 30188889; PMCID: PMC6143269.
67. *Neuper C., Scherer R., Reiner M., Pfurtscheller G.* Imagery of motor actions: differential effects of kinesthetic and visual-motor mode of imagery in single-trial EEG // *Cogn. Brain. Res.* 2005. vol. 25. no. 3. pp. 668–677.
68. *She Q. et al.* A hierarchical semi-supervised extreme learning machine method for EEG recognition // *Med. Biol. Eng. Comput.* 2019. vol. 57. pp. 147–157.
69. *Costa A.P., Moller J.S., Iversen H.K., Puthusserypady S.* An adaptive CSP filter to investigate user independence in a 3-class MI-BCI paradigm // *Comput. Biol. Med.* 2018. vol. 103. pp. 24–33.

**Капралов Николай Владимирович** – младший научный сотрудник, Междисциплинарная лаборатория нейробиологии, Институт эволюционной физиологии и биохимии им. И.М. Сеченова РАН (ИЭФБ РАН). Область научных интересов: искусственный интеллект, когнитивные системы, антропоморфная робототехника, интерфейсы «мозг-компьютер». Число научных публикаций – 5. nikolay.kapralov@gmail.com; Тореза, 44, 194233, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +79119636947; факс: +7(812)552-3012.

**Нагорнова Жанна Владимировна** – канд. биол. наук, старший научный сотрудник, Лаборатория сравнительных эколого-физиологических исследований, Институт эволюционной физиологии и биохимии им. И.М. Сеченова РАН (ИЭФБ РАН). Область научных интересов: методы анализа биоэлектрических сигналов, возрастная физиология, нейрофизиология творческой деятельности и ассоциативного мышления, интерфейсы «мозг-компьютер», воображаемые движения. Число научных публикаций – 25. nagornova\_zh@mail.ru; Тореза, 44, 194233, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7 (960) 266-7304; факс: +7 (812) 552-3012.

**Шемякина Наталья Вячеславовна** – канд. биол. наук, ведущий научный сотрудник, Лаборатория сравнительных эколого-физиологических исследований, Институт эволюционной физиологии и биохимии им. И.М. Сеченова РАН (ИЭФБ РАН). Область научных интересов: методы анализа биоэлектрических сигналов, возрастная физиология, нейрофизиология творческой деятельности и ассоциативного мышления, интерфейсы «мозг-компьютер», воображаемые движения. Число научных публикаций – 31. shemyakina\_n@mail.ru; Тореза, 44, 194233, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7 (911) 224-8293; факс: +7 (812) 552-3012.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена в рамках гос. задания ИЭФБ РАН.



N. KAPRALOV, Zh. NAGORNOVA, N. SHEMYAKINA  
**CLASSIFICATION METHODS FOR EEG PATTERNS OF  
IMAGINARY MOVEMENTS**

*Kapralov N., Nagornova Zh., Shemyakina N. Classification Methods for EEG Patterns of Imaginary Movements.*

**Abstract.** The review focuses on the most promising methods for classifying EEG signals for non-invasive BCIs and theoretical approaches for the successful classification of EEG patterns. The paper provides an overview of articles using Riemannian geometry, deep learning methods and various options for preprocessing and "clustering" EEG signals, for example, common-spatial pattern (CSP). Among other approaches, pre-processing of EEG signals using CSP is often used, both offline and online. The combination of CSP, linear discriminant analysis, support vector machine and neural network (BPNN) made it possible to achieve 91% accuracy for binary classification with exoskeleton control as a feedback. There is very little work on the use of Riemannian geometry online and the best accuracy achieved so far for a binary classification problem is 69.3% in the work. At the same time, in offline testing, the average percentage of correct classification in the considered articles for approaches with CSP –  $77.5 \pm 5.8\%$ , deep learning networks –  $81.7 \pm 4.7\%$ , Riemannian geometry –  $90.2 \pm 6.6\%$ . Due to nonlinear transformations, Riemannian geometry-based approaches and complex deep neural networks provide higher accuracy and better extract of useful information from raw EEG recordings rather than linear CSP transformation. However, in real-time setup, not only accuracy is important, but also a minimum time delay. Therefore, approaches using the CSP transformation and Riemannian geometry with a time delay of less than 500 ms may be in the future advantage.

**Keywords:** EEG Patterns, Motor Imagination, Common Spatial Pattern, Riemannian Geometry, Deep Learning Methods, ANN

## References

1. Oficial'nyj sajt bazy dannyh medicinskih i biologicheskikh publikacij Pubmed, sozdannoj Nacional'nym centrom biotekhnologicheskoy informacii SSHA. [Official website of Pubmed database of references and abstracts on life sciences and biomedical topics, maintained by the National Center for Biotechnology Information, USA]. Available at: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov> (accessed 15.01.2021) (In Russ.).
2. Tang Z. et al. A Brain-Machine Interface Based on ERD/ERS for an Upper-Limb Exoskeleton Control. *Sensors*. 2016. vol. 16. no. 12. pp. 2050.
3. Romero-Laiseca M.A. et al. A Low-Cost Lower-Limb Brain-Machine Interface Triggered by Pedaling Motor Imagery for Post-Stroke Patients Rehabilitation. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* 2020. vol. 28. pp. 988–996.
4. Belwafi K. et al. An embedded implementation based on adaptive filter bank for brain-computer interface systems. *Journal of Neuroscience Methods*. 2018. vol. 305. pp. 1–16.
5. Cervera M.A. et al. Brain-computer interfaces for post-stroke motor rehabilitation: a meta-analysis. *Ann. Clin. Transl. Neurol.* 2018. vol. 5. no. 5. pp. 651–663.
6. Bockbrader M.A. et al. Brain Computer Interfaces in Rehabilitation Medicine. *PM&R*. 2018. vol. 10. no. 9. pp. S233–S243.
7. Birjukova E.V. et al. [Restoration of the hand motor functions using the exoskeleton hand controlled by the brain-computer interface. The case of severely damaged brain structures]. *Fiziologija cheloveka – Human Physiology*. 2016. Issue 42. vol. 1. pp. 19–30.
8. Asensio-Cubero J., Gan J.Q., Palaniappan R. Multiresolution analysis over graphs for a motor imagery based online BCI game. *Comput. Biol. Med.* 2016. vol. 68. pp. 21–26.

9. Stankevich L.A. et al. EEG pattern decoding of rhythmic individual finger imaginary movements of one hand. *Human Physiology*. 2016. vol. 42. no. 1. pp. 32.
10. Lotte F. et al. A review of classification algorithms for EEG-based brain-computer interfaces: a 10 year update. *J Neural Eng*. 2018. vol. 15. no. 3. pp. 031005.
11. Zhao X., Zhao J., Liu C., Cai W. Deep Neural Network with Joint Distribution Matching for Cross-Subject Motor Imagery Brain-Computer Interfaces. *Biomed. Res. Int*. 2020. vol. 2020. no. 7285057.
12. Sonkin K.M. et al. Development of electroencephalographic pattern classifiers for real and imaginary thumb and index finger movements of one hand. *Artif Intell Med*. 2015. vol. 63. no. 2. p. 107–117.
13. Xu L. et al. Cross-Dataset Variability Problem in EEG Decoding With Deep Learning. *Front. Hum. Neurosci*. 2020. vol. 14. pp. 103.
14. Zanini P. et al. Transfer Learning: A Riemannian Geometry Framework With Applications to Brain-Computer Interfaces. *IEEE Trans. Biomed. Eng*. 2018. vol. 65. no. 5. pp. 1107–1116.
15. Rodrigues P.L.C., Jutten C., Congedo M. Riemannian Procrustes Analysis: Transfer Learning for Brain-Computer Interfaces. *IEEE. Trans. Biomed. Eng*. 2019. vol. 66. no. 8. pp. 2390–2401.
16. Ai Q. et al. Feature extraction of four-class motor imagery EEG signals based on functional brain network. *J. Neural Eng*. 2019. vol. 16. no. 2. pp. 026032.
17. Schirrneister R.T. et al. Deep learning with convolutional neural networks for EEG decoding and visualization. *Human Brain Mapping*. 2017. vol. 38. no. 11. pp. 5391–5420.
18. Hartmann K. G., Schirrneister R. T., Ball T. EEG-GAN: Generative adversarial networks for electroencephalographic (EEG) brain signals. arXiv.org. 2018. Available at: <http://arxiv.org/abs/1806.01875> (accessed: 07.09.2020).
19. Yang B. et al. A Framework on Optimization Strategy for EEG Motor Imagery Recognition. Proceedings of the 41st Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). 2019. pp. 774–777.
20. Ang K.K. et al. Filter Bank Common Spatial Pattern Algorithm on BCI Competition IV Datasets 2a and 2b. *Front. Neurosci*. 2012. vol. 6. no. 39.
21. Gaur P., Pachori R.B., Wang H., Prasad G. A multi-class EEG-based BCI classification using multivariate empirical mode decomposition based filtering and Riemannian geometry. *Expert Systems with Applications*. 2018. vol. 95. pp. 201–211.
22. McFarland D.J., McCane L.M., David S.V., Wolpaw J. R. Spatial filter selection for EEG-based communication. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*. 1997. vol. 103. no. 3. pp. 386–394.
23. Fukunaga K. Introduction to Statistical Pattern Recognition (2<sup>nd</sup> ed.). New York: Academic Press. 1990. 592 p.
24. Ramoser H., Müller-Gerking J., Pfurtscheller G. Optimal spatial filtering of single trial EEG during imagined hand movement. *IEEE Trans. Rehab. Eng*. 2000. vol. 8. no. 4. pp. 441–446.
25. Müller-Gerking J., Pfurtscheller G., Flyvbjerg H. Designing optimal spatial filters for single-trial EEG classification in a movement task. *Electroenc. Clin. Neurophys.* 1999. vol. 110. no. 5. pp. 787–798.
26. Meng J. et al. Noninvasive Electroencephalogram Based Control of a Robotic Arm for Reach and Grasp Tasks. *Sci. Rep*. 2016. vol 6. no. 38565.
27. Barachant A., Bonnet S., Congedo M., Jutten C. Multiclass Brain–Computer Interface Classification by Riemannian Geometry. *IEEE Trans. Biomed. Eng*. 2012. vol. 59. no. 4. pp. 920–928.
28. Lei B. et al. Walking Imagery Evaluation in Brain Computer Interfaces via a Multi-View Multi-Level Deep Polynomial Network. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng*. 2019. vol. 27. no. 3. pp. 497–506.

29. Zhang Z. et al. Modeling EEG-based Motor Imagery with Session to Session Online Adaptation. Proceedings of the 40th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). 2018. pp. 1988–1991.
30. Majidov I., Whangbo T. Efficient Classification of Motor Imagery Electroencephalography Signals Using Deep Learning Methods. *Sensors*. 2019. vol. 19. no. 7. pp. 1736.
31. Delisle-Rodriguez D. et al. System based on subject-specific bands to recognize pedaling motor imagery: towards a BCI for lower-limb rehabilitation. *J. Neural Eng.* 2019. vol. 16. no. 056005.
32. Lotte F. et al. A review of classification algorithms for EEG-based brain-computer interfaces. *J. Neural Eng.* 2007. vol. 4. no. 2. pp. R1.
33. Guan S., Zhao K., Yang S. Motor Imagery EEG Classification Based on Decision Tree Framework and Riemannian Geometry. *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2019. vol. 2019. no. 5627156.
34. Frolov A.A. et al. Post-stroke Rehabilitation Training with a Motor-Imagery-Based Brain-Computer Interface (BCI)-Controlled Hand Exoskeleton: A Randomized Controlled Multicenter Trial. *Front. Neurosci.* 2017. vol. 11. pp. 400.
35. Lisi G., Rivela D., Takai A., Morimoto J. Markov Switching Model for Quick Detection of Event Related Desynchronization in EEG. *Front. Neurosci.* 2018. vol. 12. p. 24. doi: 10.3389/fnins.2018.00024
36. Lawhern V.J. et al. EEGNet: A Compact Convolutional Network for EEG-based Brain-Computer Interfaces. *J. Neural Eng.* 2018. vol. 15. no. 056013.
37. Tayeb Z. et al. Validating Deep Neural Networks for Online Decoding of Motor Imagery Movements from EEG Signals. *Sensors*. 2019. vol. 19. no. 1. p. 210.
38. Schalk G. et al. BCI2000: A General-Purpose Brain-Computer Interface (BCI) System. *IEEE TBME*. 2004. vol. 51. no. 6. pp. 1034–1043.
39. Gramfort A. et al. MEG and EEG data analysis with MNE-Python. *Front. Neurosci.* 2013. vol. 7. pp. 267.
40. Tangermann M. et al. Review of the BCI Competition IV. *Front. Neurosci.* 2012. vol. 6. pp. 5.
41. Manton J.H. A globally convergent numerical algorithm for computing the centre of mass on compact Lie groups. Proceedings of the ICARCV Conference. 2004. pp. 2211–2216.
42. Barachant A., Bonnet S., Congedo M., Jutten C. Classification of covariance matrices using a Riemannian-based kernel for BCI applications. *Neurocomputing*. 2013. vol. 112. pp. 172–178.
43. Congedo M., Barachant A. A special form of SPD covariance matrix for interpretation and visualization of data manipulated with Riemannian geometry. Proceedings of the Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering. 2014. pp. 495–503.
44. Haykin S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation* (2 ed.). Prentice Hall, 1998. 842 p.
45. Hinton G. E., Salakhutdinov R.R. Reducing the Dimensionality of Data with Neural Networks. *Science*. 2006. vol. 313. no. 5786. pp. 504–507.
46. LeCun Y. et al. Backpropagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition. *Neural Computation*. 1989. vol. 1. no. 4. pp. 541–551.
47. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long short-term memory. *Neural Computation*. 1997. vol. 9. no. 8. pp. 1735–1780.
48. Brunner C., Leeb R., Mueller-Putz G., Schlögl A., Pfurtscheller G. BCI Competition 2008 – Graz data set A. Available at: [http://bbci.de/competition/iv/desc\\_2a.pdf](http://bbci.de/competition/iv/desc_2a.pdf) (accessed: 07.09.2020).
49. Zhang R., Zong Q., Dou L., Zhao X. A novel hybrid deep learning scheme for four-class motor imagery classification. *J. Neural Eng.* 2019. vol. 16. no. 6. pp. 066004.

50. Li Y. et al. A Channel-Projection Mixed-Scale Convolutional Neural Network for Motor Imagery EEG Decoding. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* 2019. vol. 27. no. 6. pp. 1170–1180.
51. Sakhavi S., Guan C., Yan S. Learning Temporal Information for Brain-Computer Interface Using Convolutional Neural Networks. *IEEE Trans. Neural Netw. Learning Syst.* 2018. vol. 29. no. 11. pp. 5619–5629.
52. Luo T., Zhou C., Chao F. Exploring spatial-frequency-sequential relationships for motor imagery classification with recurrent neural network. *BMC Bioinformatics.* 2018. vol. 19. no. 344.
53. Xie X. et al. Motor Imagery Classification Based on Bilinear Sub-Manifold Learning of Symmetric Positive-Definite Matrices. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.* 2016. vol. 25. no. 6. pp. 504–516.
54. Meng J. et al. A Study of the Effects of Electrode Number and Decoding Algorithm on Online EEG-Based BCI Behavioral Performance. *Front. Neurosci.* 2018. vol. 12. pp. 227.
55. Singh A., Lal S., Guesgen H. Reduce Calibration Time in Motor Imagery Using Spatially Regularized Symmetric Positives-Definite Matrices Based Classification. *Sensors.* 2019. vol. 19. no. 2. pp. 379.
56. Gurve D. et al. Subject-specific EEG channel selection using non-negative matrix factorization for lower-limb motor imagery recognition. *J. Neural Eng.* 2020. vol. 17. no. 2. p. 026029.
57. Kumar S., Mamun K., Sharma A. CSP-TSM: Optimizing the performance of Riemannian tangent space mapping using common spatial pattern for MI-BCI. *Computers in Biology and Medicine.* 2017. vol. 91. pp. 231–242.
58. Ha K.-W., Jeong J.-W. Motor Imagery EEG Classification Using Capsule Networks. *Sensors.* 2019. vol. 19. no. 13. pp. 2854.
59. Dai M. et al. EEG Classification of Motor Imagery Using a Novel Deep Learning Framework. *Sensors.* 2019. vol. 19. no. 3. pp. 551.
60. Chu Y. et al. A Decoding Scheme for Incomplete Motor Imagery EEG With Deep Belief Network. *Front. Neurosci.* 2018. vol. 12. pp. 680.
61. Wu H et al. A Parallel Multiscale Filter Bank Convolutional Neural Networks for Motor Imagery EEG Classification. *Front. Neurosci.* 2019. vol. 13. pp. 1275.
62. Tang X.-L., Ma W.-C., Kong D.-S., Li W. Semisupervised Deep Stacking Network with Adaptive Learning Rate Strategy for Motor Imagery EEG Recognition. *Neural Computation.* 2019. vol. 31. no. 5. pp. 919–942. doi:10.1162/neco\_a\_01183
63. Foong R. et al. Assessment of the Efficacy of EEG-Based MI-BCI With Visual Feedback and EEG Correlates of Mental Fatigue for Upper-Limb Stroke Rehabilitation. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2020. vol. 67. no. 3. pp. 786–795.
64. Shemyakina N.V., Dan'ko S.G. Changes in the power and coherence of the  $\beta_2$  EEG band in subjects performing creative tasks using emotionally significant and emotionally neutral words. *Hum. Physiol.* 2007. vol. 33. pp. 20–26.
65. Shemyakina N.V., Dan'ko S.G. [Influence of the emotional perception of a signal on the electroencephalographic correlates of the creative activity]. *Fiziologija cheloveka – Human Physiology.* 2004. Issue 30. vol. 2. pp. 22–29. (In Russ.)
66. Schmidt H., Avitabile D., Montbrió E., Roxin A. Network mechanisms underlying the role of oscillations in cognitive tasks. *PLoS Comput. Biol.* 2018. vol. 14. no. 9. pp. e1006430.
67. Neuper C., Scherer R., Reiner M., Pfurtscheller G. Imagery of motor actions: differential effects of kinesthetic and visual-motor mode of imagery in single-trial EEG. *Cogn. Brain. Res.* 2005. vol. 25. no. 3. pp. 668–677.
68. She Q. et al. A hierarchical semi-supervised extreme learning machine method for EEG recognition. *Med. Biol. Eng. Comput.* 2019. vol. 57. pp. 147–157.

69. Costa A.P., Møller J.S., Iversen H.K., Puthusserypady S. An adaptive CSP filter to investigate user independence in a 3-class MI-BCI paradigm. *Comput. Biol. Med.* 2018. vol. 103. pp. 24–33

**Kapralov Nikolai** – Junior Researcher, Interdisciplinary Laboratory of Neuroscience, Sechenov Institute of Evolutionary Physiology and Biochemistry RAS (IEPHB RAS). Research interests: artificial intelligence, cognitive systems, anthropomorphic robotics, brain-computer interfaces. The number of publications – 5. [nikolay.kapralov@gmail.com](mailto:nikolay.kapralov@gmail.com); 44, Toreza, 194233, St. Petersburg, Russia; office phone: +79119636947; fax: +7(812)552-3012.

**Nagornova Zhanna** – Ph.D., Senior Researcher, Laboratory of Comparative Ecological and Physiological Studies, Sechenov Institute of Evolutionary Physiology and Biochemistry RAS (IEPHB RAS). Research interests: imagination, age physiology, analysis of EEG signals, brain-computer interfaces. The number of publications – 25. [nagornova\\_zh@mail.ru](mailto:nagornova_zh@mail.ru); 44, Toreza, 194233, St. Petersburg, Russia; office phone: +7 (960) 266-7304; fax: +7 (812) 552-3012.

**Shemyakina Natalia** – Ph.D., Leading Researcher, Laboratory of Comparative Ecological and Physiological Studies, Sechenov Institute of Evolutionary Physiology and Biochemistry RAS (IEPHB RAS). Research interests: methods for analyzing bioelectric signals, age physiology, neurophysiology of creative activity and associative thinking, brain-computer interfaces, imaginary movements. The number of publications – 31. [shemyakina\\_n@mail.ru](mailto:shemyakina_n@mail.ru); 44, Toreza, 194233, St. Petersburg, Russia; office phone: +7 (911) 224-8293; fax: +7 (812) 552-3012.

**Acknowledgements.** This research is supported by state assignment of IEPHB RAS.

M. FADHEL, Z. OMAR  
**GEOMETRIC PIECEWISE CUBIC BÉZIER INTERPOLATING  
POLYNOMIAL WITH  $C^2$  CONTINUITY**

*Fadhel M.A., Omar Z.B. Geometric Piecewise Cubic Bézier Interpolating Polynomial with  $C^2$  Continuity.*

**Abstract.** Bézier curve is a parametric polynomial that is applied to produce good piecewise interpolation methods with more advantage over the other piecewise polynomials. It is, therefore, crucial to construct Bézier curves that are smooth and able to increase the accuracy of the solutions. Most of the known strategies for determining internal control points for piecewise Bezier curves achieve only partial smoothness, satisfying the first order of continuity. Some solutions allow you to construct interpolation polynomials with smoothness in width along the approximating curve. However, they are still unable to handle the locations of the inner control points. The partial smoothness and non-controlling locations of inner control points may affect the accuracy of the approximate curve of the dataset. In order to improve the smoothness and accuracy of the previous strategies, a new piecewise cubic Bézier polynomial with second-order of continuity  $C^2$  is proposed in this study to estimate missing values. The proposed method employs geometric construction to find the inner control points for each adjacent subinterval of the given dataset. Not only the proposed method preserves stability and smoothness, the error analysis of numerical results also indicates that the resultant interpolating polynomial is more accurate than the ones produced by the existing methods.

**Keywords:** Interpolation Polynomial, Bézier Curve, Bézier Spline, SSE, MAE, RMSE

**1. Introduction.** The Missing values of dataset are the common issues in many areas of sciences such as statistics, computer sciences, and geophysics [1-3]. Several interpolation methods employed piecewise polynomials to estimate missing values. One of them is Bezier curve which is a parametric polynomial used extensively in computer-aided design (CAD) [4, 5], numerical analysis [6, 7], hitch avoidance path determination of unicycle robots [8, 9], lane changing [10, 11], and roundabouts [12, 13] due to its flexibility, stability, and simplicity in representation. By taking the advantages of Bézier curve, researchers started to construct a piecewise cubic Bézier curve at every subinterval of data points in order to improve the smoothness of the interpolating polynomial and consequently increase the accuracy.

Ge and Kang [14] proposed two algorithms of piecewise Bezier functions. The first algorithm produces an approximation function for a dataset, while, the resultant function in the second algorithm interpolates through a dataset. However, both algorithms only satisfy the second order geometric continuity ( $G^2$ ). In Pollock [15], piecewise cubic Bézier curves with the second order of continuity ( $C^2$ ) have been achieved by adopting the construction of a natural cubic spline strategy. Three years later, a geometric technique piecewise Bezier interpolating was proposed by Shemanarev [16]. The resultant polynomial seemed smooth at data points, behaving like the first order geometric continuity ( $G^1$ ) although he did not test the order of continuity. Yau and Wang [17] pre-

sented a new method for deriving piecewise cubic Bézier interpolating polynomial with the first order of continuity ( $C^1$ ). Nonetheless, the calculations required in this strategy are very time-consuming. Subsequently, Saaban, Zainudin, and Bakar [18] combined Bézier and Said-Ball functions to estimate the missing values of solar radiation in Kedah. In order to further improve the estimation of the missing values of solar radiation datasets in Penang, Karim [19] preserved the positivity and monotonicity by deriving sufficient conditions for rational cubic Ball interpolant. However, the cubic Ball interpolation satisfies the first order of continuity  $C^1$ . To control the piecewise Bezier curves, Saaban, Zainudin, and Abu Bakar [20] constructed piecewise parametric polynomials with  $C^1$  continuity by imposing sufficient positivity conditions for Bézier curve. The same year, Ueda et al. [21] proposed an algorithm using multi objective simulated annealing to determine a piecewise cubic Bézier Polynomial with  $C^1$  continuity. However, their resultant polynomial is not interpolated through all data points, which means that the polynomial is only an approximate curve. By taking the advantage of the diagonal matrix, Stelia, Potapenko, and Sirenko [22] determined the coefficients of linear system equations to find the inner control points. Unfortunately, the resulted piecewise cubic Bezier polynomial only fulfils the first order of continuity  $C^1$ . Moreover, an improvement of image upscaling resolution has been attempted by Zulkifli et al. [23] utilizing a rational cubic Ball function.

In this article, a geometric structure of piecewise parametric interpolating polynomial employing cubic Bézier curves is proposed for locating the inner control points.

**2. Piecewise Cubic Bézier Curve.** A piecewise cubic Bézier curve is constructed by a sequence of cubic Bézier curves interpolated at the data points  $W_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , to produce a smooth and continuous curve (refer to Fig. 1). According to Elber [24] and Quarteroni, Sacco, and Saleri [25], Bézier function  $P(t)$  is given by:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t),$$

where  $p_i = (p_{x_i}, p_{y_i})$  are a control points, and  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  are a Bernstein polynomials, where:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \text{ for all } i.$$

By using a cubic Bézier curve between every two adjacent data points [26], the following piecewise parametric polynomial  $F(t)$  of cubic Bézier curves  $P_k(t)$  is constructed:

$$F(t) = \begin{cases} P_0(t) & t \in [0,1], \\ P_1(t) & t \in [0,1], \\ \vdots & \vdots \\ P_{n-1}(t) & t \in [0,1], \end{cases}$$

for all  $k = 0, \dots, n-1$ , where

$$P_k(t) = (1-t)^3 p_0^k + 3(1-t)^2 t p_1^k + 3(1-t) t^2 p_2^k + t^3 p_3^k \quad (1)$$

and

$$P_k(t) = (x_k(t), y_k(t)),$$

with

$$x_k(t) = (1-t)^3 p_{x_0}^k + 3(1-t)^2 t p_{x_1}^k + 3(1-t) t^2 p_{x_2}^k + t^3 p_{x_3}^k,$$

and  $y_k(t) = (1-t)^3 p_{y_0}^k + 3(1-t)^2 t p_{y_1}^k + 3(1-t) t^2 p_{y_2}^k + t^3 p_{y_3}^k$ .

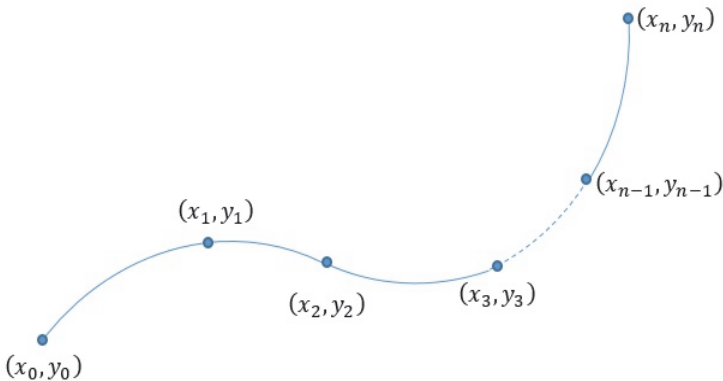


Fig. 1. Cubic bézier curve between every two adjacent data points



Each subinterval requires two inner control points and two end points for constructing a cubic Bézier spline. Since there are  $n$  subintervals,  $2n$  inner control points are needed to construct  $n$  cubic Bézier splines. The control points for each cubic Bézier curve is given by:

$$p_{\zeta}^k = (p_{x_{\zeta}}^k, p_{y_{\zeta}}^k),$$

where  $\zeta = 0 \dots, 3$ .

Several previous studies have found good strategies for locating the inner control points for piecewise Bézier curves. Most of them, however, achieve partial smoothness by satisfying the first order of continuity  $C^1$  as in Saaban et al. [18, 20], Stelia et al. [22], and Zulkifli et al. [23]. Although, some researchers achieved to construct interpolating polynomials with wider smoothness along the approximating curve, including Pollock [15], they are still unable to handle the locations of the inner control points. The partial smoothness and/or non-controlling locations of inner control points may affect the accuracy of the approximate curve of the dataset.

**3. Proposed Piecewise Cubic Bézier Polynomial.** In order to improve the smoothness and accuracy of the previous strategies, a new piecewise interpolating polynomial known as  $C^2$  Geometric Bézier Polynomial (C2GBP) is proposed in this study. To construct this polynomial, the inner control points will be located geometrically depending on the polygon of the dataset.

**3.1. Construction of C2GBP.** In the section, the construction of the new piecewise interpolating polynomial is discussed. The procedure details for constructing C2GBP are as follows:

*Step 1.* Find the straight lines in all subintervals.

Let  $W_k W_{k+1}$  be straight lines in subintervals, where  $k = 0, \dots, n - 1$ , as shown in Figure 2.

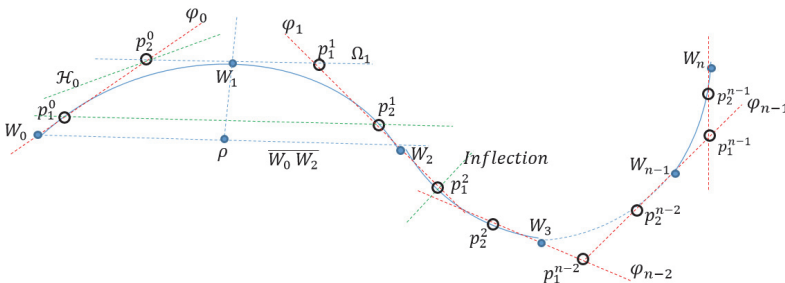


Fig. 2. Construction of C2GBP

The slope  $\omega_k$  is defined as:

$$\omega_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k},$$

whose y-intercept is:

$$\delta_k = y_k - \omega_k x_k.$$

$$\delta_k = y_k - \omega_k x_k.$$

*Step 2.* Find the straight lines connecting  $W_{j-1}$  with  $W_{j+1}$  where  $j = 0, \dots, n-1$ .

Let  $\overline{W_{j-1}W_{j+1}}$  be straight lines as shown in Figure 2 with slopes  $a_j$  defined by:

$$a_j = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}},$$

whose y-intercepts are:

$$b_j = y_{j-1} - a_j x_{j+1}.$$

The equations for straight lines of  $\overline{W_{j-1}W_{j+1}}$  are  $y = a_j x + b_j$ .

**Step 3.** Find y-intercepts of the straight lines pass through  $W_1$  with slope  $a_1$ .

Let  $\Omega_1$  be a straight line passing through  $W_1$  with slope  $a_1$  (refer to Fig. 3.1). The y-intercepts of the line is defined as:

$$\sigma_1 = y_1 - a_1 x_1. \quad (2)$$

*Step 4.* Find interception point ( $p = (p_x, p_y)$ ) of the straight line  $\overline{W_0W_2}$  with perpendicular of the same straight line passing through  $W_1$ .

Let  $\nu$  be a straight line perpendicular to  $\overline{W_0W_2}$  passing through  $W_1$ . Therefore, the slope of  $\nu$  is  $-\frac{1}{a_1}$ , while  $y$ -intercept is given by:

$$b_1^\ell = y_1 + \frac{1}{a_1} x_1,$$

therefore, the interception point is defined as:

$$\rho_x = \frac{b_1^\ell - b_1}{a_1 + \frac{1}{a_1}},$$

and  $y$ -intercept is:

$$p_y = a_1 p_x + b_1.$$

*Step 5.* Find  $y$ -intercept ( $h_0$ ) of the straight line with slope  $\omega_0$ .

Let  $\gamma_0$  be a value calculated by the distance  $\mathfrak{Z}(\overline{W_1\rho_0})$  between  $W_1$  and  $\rho_0$ , where:

$$\mathfrak{Z}(\overline{W_1\rho_0}) = \sqrt{(y_1 - \rho_{y_0})^2 + (x_1 - \rho_{x_0})^2}.$$

The value of  $\gamma_0$  is defined as:

$$\gamma_0 = \frac{m \mathfrak{Z}(\overline{W_0W_1})}{q},$$

where  $m$  is the number of inner control points, and  $q$  is the degree of the polynomial in each sub-interval. In our construction, the values of  $q$  and  $m$  are 3 and 2, respectively.

Then,  $y$ -intercepts is defined by:

$$h_0 = \delta_0 \pm \gamma_0,$$

where the positive/negative value of  $\gamma_0$  is determined using algorithm below:

**Input:**  $W_0, \omega_0, \delta_0, b_1, \sigma_1, \mathfrak{Z}(\overline{W_0W_1}), \mathfrak{Z}(\overline{W_1\rho_0})$ .

**Output:**  $y$ -intercepts ( $h_0$ ) of a straight line parallel to  $\overline{W_0W_1}$  with a distance of  $\gamma_0$ .

**Start**

$$\gamma_0 = (2\mathfrak{Z}(\overline{W_0W_1}))/3$$

**if**  $b_1 \leq \sigma_1$  **then**

$$h_0 = \delta_0 + \gamma_0$$

**else if**  $b_1 > \sigma_1$  **then**

$$h_0 = \delta_0 - \gamma_0$$

**end**

**End**

*Step 6.* Find the inner control point  $p_2^0$  in the first subinterval.

The inner control point of the first subinterval  $p_2^0$  is defined as interception of the line  $\wp_0$  with the line  $\Omega_1$ , where  $\wp_0$  is the straight line given as  $y = \omega_0x - h_0$ .

Hence,

$$p_{x_2}^0 = \frac{h_0 - \sigma_1}{a_1 - \omega_0},$$

and  $y$ -intercept is:

$$p_{y_2}^0 = \omega_0 p_{x_2}^0 + h_0.$$

*Step 7.* Find the straight lines connecting  $W_0$  with  $p_2^0$ .

Let  $\overline{W_0p_2^0}$  be straight lines, as shown in Figure 2.

The slope  $\eta_0$  is:

$$\eta_0 = \frac{p_{y_2}^0 - y_0}{p_{x_2}^0 - x_0}$$

with  $y$ -intercept:

$$\vartheta_0 = p_{y_2}^0 - \eta_0 p_{x_2}^0.$$

The straight line of  $\overline{W_0 p_2^0}$  is  $y = \eta_0 x + \vartheta_0$ .

*Step 8.* Find the inner control point  $p_1^1$  at second subinterval.

Let  $\mathfrak{I}_1$  is a distance between  $p_2^0$  and  $W_1$  defined by :

$$\mathfrak{I}_1 = \sqrt{(y_1 - p_{y_2}^0)^2 + (x_1 - p_{x_2}^0)^2},$$

whose slope is:

$$\varpi_1 = \frac{y_1 - p_{y_2}^0}{x_1 - p_{x_2}^0}$$

and  $y$ -intercept:

$$\xi_1 = y_1 - \varpi_1 x_1.$$

Let  $\mathfrak{I}_1$  is a distance between the inner control point  $p_1^1$  and  $W_1$ , given by:

$$\mathfrak{I}_1 = \sqrt{(p_{y_1}^1 - y_1)^2 + (p_{x_1}^1 - x_1)^2},$$

Since  $p_1^1$  satisfies the equation of line  $\Omega_1$ , then  $p_{y_1}^1 = \varpi_1 p_{x_1}^1 + \xi_1$ .

Hence,

$$\begin{aligned} & [(a_1)^2 + 1] (p_{x_1}^1)^2 + \\ & [2a_1\sigma_1 - 2y_1a_1 - 2x_1] p_{x_1}^1 + [(y_1)^2 - 2y_1\sigma_1 + \sigma_1^2 + (x_1)^2 - (\mathfrak{I}_1)^2] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

using quadratic formula to find the value of  $p_{x_1}^1$  in Equation (3). Substituting  $p_{x_1}^1$  into (2) yields the value of  $p_{y_1}^1$ .

*Step 9.* Find  $y$ -intercept ( $h_1$ ) of the straight line  $\wp_1$  with slope  $\omega_1$  as described in the following algorithms:

**Input:**  $\omega_1, p_1^1, \delta_1, b_1, \sigma_1$ .

**Output:**  $y$ -intercepts ( $h_1$ ) of the straight line with slope  $\omega_1$ .

**Start**

$$\hat{h}_1 = p_{y_1}^1 - \omega_1 p_{x_1}^1$$

$$\gamma_1 = |\hat{h}_1 - \delta_1|$$

**if**  $b_1 > \sigma_1$  &  $b_2 > \sigma_2$  or  $b_1 < \sigma_1$  &  $b_2 < \sigma_2$  then

$$h_1 < \hat{h}_1$$

**else if**  $b_1 \geq \sigma_1$  &  $b_2 \leq \sigma_2$  then (inflection)

$$h_1 = \delta_1 + \gamma_1$$

**else if**  $b_1 \leq \sigma_1$  &  $b_2 \geq \sigma_2$  then (inflection)

$$h_1 = \delta_1 - \gamma_1$$

**End**

**end**

**End**

*Step 10.* Find  $y$ -intercepts ( $\wp_1$ ) of the straight line connecting  $W_2$  with  $p_1^1$ .

Let  $\overline{W_2 p_1^1}$  be straight lines as shown in Figure 2.

The slope  $\eta_1$  is defined as:

$$\eta_1 = \frac{y_2 - p_{y_1}^1}{x_2 - p_{x_1}^1}$$

and  $y$ -intercept is:

$$\wp_1 = p_{y_1}^1 - \eta_1 p_{x_1}^1.$$

The straight line of  $\overline{W_2 p_1^1}$  is represented by  $y = \eta_1 x + \wp_1$ .

When there is an inflection of the data points polygon, the slope will be calculated by replacing  $W_2$  with  $\chi^1$ , as given below:

Let  $r$  be a perpendicular of the straight  $y = \omega_1 x + h_1$ , hence, the slope of  $r$  is given by  $-\frac{1}{\omega_1}$ , while  $y$ -intercept is

$$b_1^h = p_{y_1}^1 + \frac{1}{\omega_1} p_{x_1}^1.$$

This leads to the interception point  $\chi^1 = (\chi_x^1, \chi_y^1)$  where:

$$\chi_x^1 = \frac{b_1^h - h_1}{\omega_1 + \frac{1}{\omega_1}},$$

with  $y$ -intercept:

$$\chi_y^1 = -\frac{1}{\omega_1} \chi_x^1 + b_1^h.$$

Following algorithm demonstrates the  $y$ -intercept ( $\vartheta_1$ ) construction that covers the inflection areas in a polygon dataset. Refer to Figure 3.1 for line  $\varphi_1$ .

**Input:**  $W_2, \omega_1, p_1^1, h_1, b_1, \sigma_1, b_2, \sigma_2$ .

**Output:**  $y$ -intercepts ( $\vartheta_1$ ) of the straight line with slope  $\omega_1$ .

**Start**

$$b_1^h = p_{y_1}^1 + \frac{1}{\omega_1} p_{x_1}^1$$

$$\chi_x^1 = \frac{b_1^h - h_1}{\omega_1 + \frac{1}{\omega_1}}$$

$$\chi_y^1 = -\frac{1}{\omega_1} \chi_x^1 + b_1^h.$$

**if**  $b_1 > \sigma_1$  &  $b_2 > \sigma_2$  or  $b_1 < \sigma_1$  &  $b_2 < \sigma_2$  **then**

$$\eta_1 = \frac{y_2 - p_{y1}^1}{x_2 - p_{x1}^1}$$

**else if**  $b_1 \geq \sigma_1$  &  $b_2 \leq \sigma_2$  then (inflection)

$$\eta_1 = \frac{\chi_y^1 - p_{y1}^1}{\chi_x^1 - p_{x1}^1}$$

**end**

**End**

$$\vartheta_1 = p_{y1}^1 - \eta_1 p_{x1}^1.$$

*Step 11.* Find the inner control point  $p_1^0$  and  $p_2^1$

Let  $p_1^0$ ,  $p_2^1$  are intercept points of straight lines  $\wp_0, \wp_1$  with straight the line  $\overline{W_0W_2}$  respectively,

$$p_{x1}^0 = \frac{h_0 - \varepsilon}{a_1 - \omega_0}; \quad p_{y1}^0 = \omega_0 p_{x1}^0 + h_0. \quad (4)$$

$$p_{x2}^0 = \frac{h_1 - \varepsilon}{a_1 - \omega_1}; \quad p_{y2}^0 = \omega_1 p_{x2}^0 + h_1. \quad (5)$$

In order to define the value of  $\varepsilon$ , we will use the following relation:

$$4\mathfrak{I}_1 = \sqrt{(p_{y2}^1 - p_{y1}^0)^2 + (p_{x2}^1 - p_{x1}^0)^2}. \quad (6)$$

Substituting (4), (5) in (6) gives:

$$\begin{aligned} 16(\mathfrak{I}_1)^2 &= \left( a_1 \left( \frac{h_1 - \varepsilon}{a_1 - \omega_1} \right) + h_1 \right)^2 - \\ &- 2 \left( \omega_1 \left( \frac{h_1 - \varepsilon}{a_1 - \omega_1} \right) + h_1 \right) \left( \omega_0 \left( \frac{h_0 - \varepsilon}{a_1 - \omega_0} \right) + h_0 \right) + \\ &+ \left( \omega_0 \left( \frac{h_0 - \varepsilon}{a_1 - \omega_0} \right) + h_0 \right)^2 + \left( \frac{h_1 - \varepsilon}{a_1 - \omega_1} \right)^2 - \\ &- 2 \left( \frac{h_1 - \varepsilon}{a_1 - \omega_1} \right) \left( \frac{h_0 - \varepsilon}{a_1 - \omega_0} \right) + \left( \frac{h_0 - \varepsilon}{a_1 - \omega_0} \right)^2. \end{aligned}$$



which leads to:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(\omega_1)^2 + 1}{(a_1 - \omega_1)^2} - \frac{2(1 + \omega_1 \omega_0)}{(a_1 - \omega_1)(a_1 - \omega_0)} + \frac{(\omega_0)^2 + 1}{(a_1 - \omega_0)^2} \right] \varepsilon^2 - \\ & - \left[ \left( \frac{2h_1(\omega_1 a_1 + 1)}{(a_1 - \omega_1)^2} \right) - \left( \frac{2\omega_0 h_1 a_1 + 2\omega_1 h_0 a_1 + 2(h_1 + h_0)}{(a_1 - \omega_1)(a_1 - \omega_0)} \right) + \left( \frac{2h_0(a_1 \omega_0 + 1)}{(a_1 - \omega_0)^2} \right) \right] \varepsilon + \quad (7) \\ & + \left[ \frac{h_1^2(a_1^2 + 1)}{(a_1 - \omega_1)^2} - \frac{2h_1 h_0(a_1^2 + 1)}{(a_1 - \omega_1)(a_1 - \omega_0)} + \frac{h_0^2(a_1^2 + 1)}{(a_1 - \omega_0)^2} - 16\mathfrak{S}_1^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

By solving Equation (7) using quadratic formula, we can find the value of  $\varepsilon$  which then substituted into (4), (5) to get the value of  $P_1^0$  and  $P_2^1$ .

*Step 12.* Repeat Step 8 to find inner control point  $P_1^s$  where  $s = 2, \dots, n-1$ . Replacing  $\mathfrak{S}_1$  with  $\mathfrak{S}_s$ ,  $y_1$  with  $y_s$ ,  $x_1$  with  $x_s$ ,  $P_2^0$  with  $P_2^{s-1}$ ,  $P_1^1$  with  $P_1^s$ ,  $a_1$  with  $\tau_s$ ,  $\Omega_1$  with  $\Omega_s$ , and  $\sigma_1$  with  $\mu_s$ , the inner control point  $P_1^s$  can be found, where  $\tau_s$  define as  $\tau_s = \frac{y_s - P_{y_2}^{s-1}}{x_s - P_{x_2}^{s-1}}$ ,

$$\mu_s = y_s - \tau_s x_s.$$

*Step 13.* Repeat Step 9 to find  $y$ -intercepts ( $h_s$ ) of the straight line with slope  $\omega_s$ .

Replacing  $\wp_1$  with  $\wp_s$ ,  $h_1$  with  $h_s$ ,  $P_1^1$  with  $P_1^s$ ,  $\omega_1$  with  $\omega_s$ ,  $\delta_1$  with  $\delta_s$ ,  $b_1$  with  $b_s$ ,  $\sigma_1$  with  $\sigma_s$ ,  $\tilde{h}_1$  with  $\tilde{h}_s$ , and  $\gamma_1$  with  $\gamma_s$  to find  $h_s$ .

*Step 14.* Repeat Step 10 to find  $y$ -intercepts ( $\mathfrak{S}_s$ ) of the straight line connecting  $W_{s+1}$  with  $P_1^s$ .

Replacing  $\eta_1$  with  $\eta_s$ ,  $W_2$  with  $W_{s+1}$ ,  $P_1^1$  with  $P_1^s$ ,  $\omega_1$  with  $\omega_s$ ,  $h_1$  with  $h_s$ ,  $b_1^h$  with  $b_s^h$ , and  $\chi^1$  with  $\chi^s$  to find  $\mathfrak{S}_s$ .

*Step 15.* Find the inner control point  $P_2^s$

The distance between  $P_2^{s-1}$  and  $P_1^s$  given as:

$$2\mathfrak{S}_s = \sqrt{\left( P_{y_1}^s - P_{y_2}^{s-1} \right)^2 + \left( P_{x_1}^s - P_{x_2}^{s-1} \right)^2}$$

Suppose the distance between the inner control points  $P_1^{s-1}$  and  $P_2^s$  is  $4\mathfrak{I}_s$ . Then:

$$4\mathfrak{I}_s = \sqrt{(p_{y_2}^s - p_{y_1}^{s-1})^2 + (p_{x_2}^s - p_{x_1}^{s-1})^2}.$$

Since  $P_2^s$  satisfies the equation of the line  $\varphi_s$ , then  $p_{y_2}^s = \eta_s p_{x_2}^s + \mathfrak{I}_s$ , which yields:

$$\begin{aligned} & \left[ \eta_s^2 + 1 \right] \left( p_{x_2}^s \right)^2 + \left[ 2\eta_s \mathfrak{I}_s - 2p_{y_1}^{s-1} \eta_s - 2p_{x_1}^{s-1} \right] p_{x_2}^s + \\ & + \left[ \left( p_{y_1}^{s-1} \right)^2 - 2p_{y_1}^{s-1} \mathfrak{I}_s + \mathfrak{I}_s^2 + \left( p_{x_1}^{s-1} \right)^2 - 16\mathfrak{I}_s^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

The quadratic formula will be employed in Equation (8) to find the value of  $p_{x_2}^s$ . As well, substituting  $p_{x_2}^s$  into (2) to produce  $p_{y_2}^s$ .

The values of inner control points are then substituted in (1) in order to obtain PCBP as below:

$$F(t) = \begin{cases} (x_0(t), y_0(t)) & x_0(t) \in [x_0, x_1], y_0(t) \in [y_0, y_1], t \in [0, 1], \\ (x_1(t), y_1(t)) & x_1(t) \in [x_1, x_2], y_1(t) \in [y_1, y_2], t \in [0, 1], \\ \vdots & \vdots \\ (x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)) & x_{n-1}(t) \in [x_{n-1}, x_n], y_{n-1}(t) \in [y_{n-1}, y_n], t \in [0, 1]. \end{cases}$$

**3.2. Limitations.** The limitations of the proposed method are as follows:

1. The data points should be arranged ascending as  $W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_n$ .
2. The number of data points should be not less than three data.
3. The domain of the dataset is  $\mathbb{R}$ .
4. The distance between every adjacent date points should be not more or less than (1:1.25), or increase at every next subinterval.

**3.3. Proof of Smoothness.** To prove that the proposed parametric interpolating polynomial C2GBP fulfils the second order of continuity  $C^2$ , the following conditions must be satisfied:

- (a)  $P_{j-1}(1) = P_j(0)$  for each  $j = 1, \dots, n-1$ ;
- (b)  $P'_{j-1}(1) = P'_j(0)$  for each  $j$ ;
- (c)  $P''_{j-1}(1) = P''_j(0)$  for each  $j$ .

By definition, the first condition (a) satisfied.

In order to investigate the condition (b), the values (1) and (0) are substituted in the first derivative of Equation (1) which is given by:

$$P'_j(t) = 3(1-t)^2(p_1^j - p_0^j) + 6t(1-t)(p_2^j - p_1^j) + 3t^2(p_3^j - p_2^j). \quad (9)$$

Substituting the values (1) and (0) into Equation (9) yields:

$$P'_j(1) = P'_{j+1}(0),$$

which leads to:

$$p_3^j - p_2^j = p_1^{j+1} - p_0^{j+1}$$

and

$$p_1^{j+1} + p_2^j = p_0^{j+1} + p_3^j.$$

Since  $p_3^j = p_0^{j+1} = W_j$ , then

$$W_j - p_2^j = p_1^{j+1} - W_j,$$

which means the distance between  $W_j$  and  $p_2^j$  is equal to the distance between  $p_1^{j+1}$  and  $W_j$ , which is already achieved in Step 7.

In order to investigate the condition  $P''_j(1) = P''_{j+1}(0)$  in (c) we need to substitute into the second derivative of Equation (1).

Since  $P''_j(t) = 6(1-t)(p_2^j - 2p_1^j + p_0^j) + 6t(p_3^j - 2p_2^j + p_1^j)$ , then

$$2p_2^j - p_1^j + p_2^{j+1} - 2p_1^{j+1} = p_3^j - p_0^{j+1}.$$

Since  $p_3^j = p_0^{j+1}$  then:

$$2p_2^j - p_1^j + p_2^{j+1} - 2p_1^{j+1} = 0,$$

which leads to

$$p_2^{j+1} - p_1^j = 2(p_1^{j+1} - p_2^j).$$

This implies the distances ( $\mathfrak{I}_j$ ) from  $p_2^{j+1}$  to  $p_1^j$  are two times those from  $p_1^{j+1}$  to  $p_2^j$ . Furthermore, the distances between  $p_1^{j+1}$  and  $p_2^j$  are twice the distances between  $W_j$  and  $p_2^j$  (or  $p_1^{j+1}$  and  $W_j$ ). Hence, the distances from  $p_2^{j+1}$  to  $p_1^j$  are  $(4\mathfrak{I}_j)$ , as shown in Equation (6).

**4. Numerical Results.** In this section, the numerical results obtained by the proposed parametric interpolating polynomial in solving test problems will be compared with the previous studies in terms of accuracy.

**4.1. Test Problems.** Three test problems (functions) were used to verify the accuracy of the proposed parametric polynomial interpolation. The obtained results were then compared with the Natural Cubic Spline (Spline) [27], Cubic Hermit Interpolating Polynomial (Pchip) [28], Modified Akima Piecewise Cubic Hermit Interpolation (mAkima) [29], Rational Cubic Ball Interpolation (Ball) [19], and Cubic Natural Curve (Pollock) [15], in terms of errors.

*Problem 1:*

Function:  $y = \sin x$ ,  $x \in [-3.5, 7]$ .

Data points:  $x = [-3.5, -1.5, 0.9, 4.2, 7]$ .

Figure 3 shows the behaviour of the test function and its comparison with six other curves obtained by employing six different approximation methods.

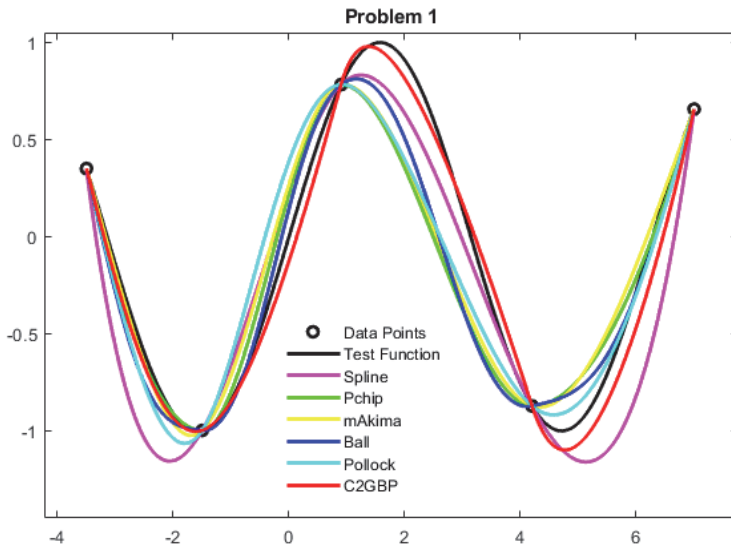


Fig. 3. Comparison between six different methods with the test function for approximating dataset in Problem 1

*Problem 2:*

$$\text{Function: } y = \frac{x^3 - 2}{|x^3| + 1}, \quad x \in [-2.52, 4.84]$$

$$\text{Data points: } x = [-2.52, -1.13, -0.12, 1.23, 4.84]$$

Analogous to Problem 1, Figure 4 shows the behaviour of seven curves for the test function and its comparison with other approximation parametric interpolating polynomials.

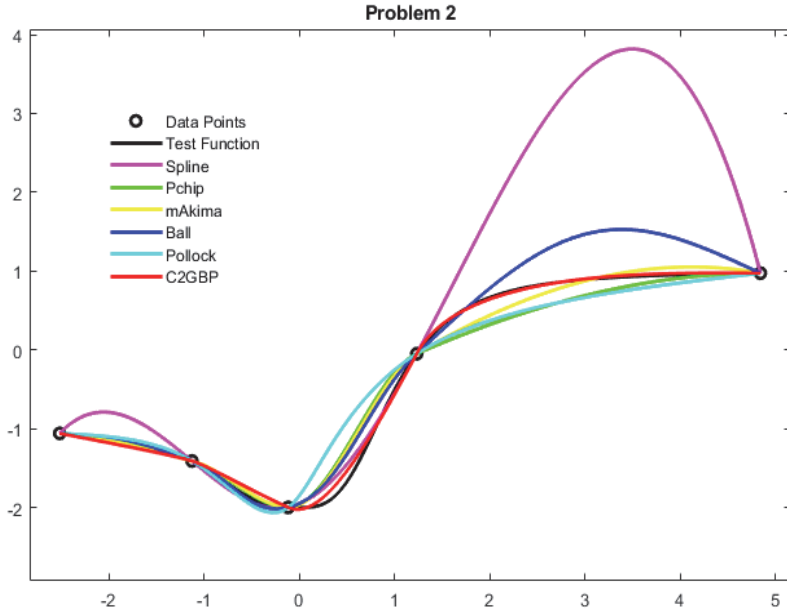


Fig. 4. Comparison between six different methods with the test function for approximating dataset in Problem 2

*Problem 3:*

$$\text{Function: } y = \sinh \frac{5x}{2}, \quad x \in [-2.72, 6.91]$$

$$\text{Data points: } x = [-2.72, -1.13, 0.62, 3.73, 6.91]$$

Similarly, Figure 5 illustrates the comparison of the test function with other approximate parametric polynomials.

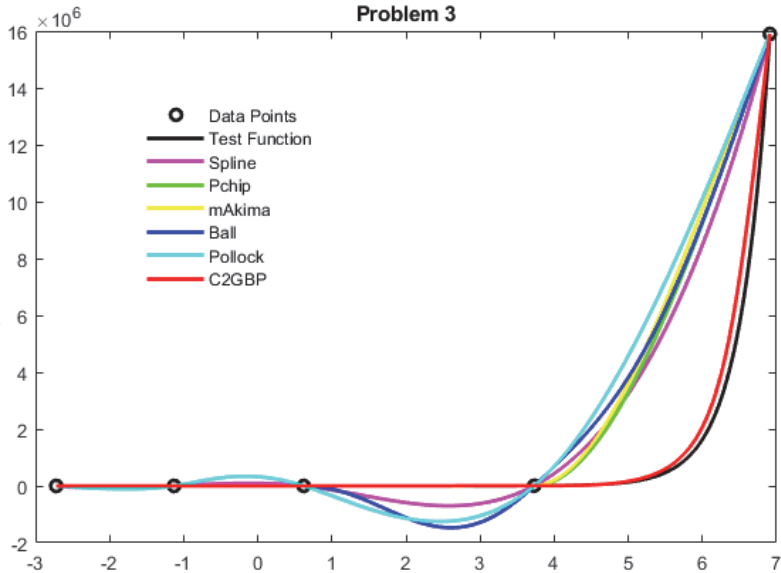


Fig. 5. Comparison between six different methods with the test function for approximating dataset in Problem 3

**4.2. Error Analysis.** Error values can be measured by using one or more error estimating formulas obtained by calculating the distance on every test point on the test curve with the approximate curve over the whole subintervals. The errors were using 99 test points on the entire curve between every adjacent data points, i.e. the total number of test points ( $\lambda$ ) along the entire curve is  $100n + 2$  where  $n + 1$  is the number of data points. Three types of errors were used; Sum of Squared Estimate, Mean Absolute Error, and Root Mean Square Error (RMSE). Sum of Squared Estimate (SSE) is the sum of the squared differences between each test points on the comparison curves, defined by:

$$SSE = \sum_{Y=0}^{\lambda} (y_Y^J - y_Y^e)^2,$$

where  $\lambda = 100n + 2$ ,  $n$  is the number of data points,  $y_Y^J$  are the test points on the test curve, and  $y_Y^e$  are the test points on the approximating curve. Meanwhile, Mean Absolute Error (MAE) calculates the average difference

difference between the lengths of distance between every test points on the comparison curves. The formula for MAE is:

$$MAE = \frac{\sum_{Y=0}^{\lambda} |y_Y^J - y_Y^e|}{\lambda}.$$

Finally, Root Mean Square Error (RMSE) measures the square radical of the squared differences between the gap lengths of test points on the comparison curves divided by the number of test points as given in the following formula:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{Y=0}^{\lambda} (y_Y^J - y_Y^e)^2}{\lambda}}.$$

**4.3. Results and Discussion.** The numerical results show the comparison between the six methods in terms of accuracy. In general, the proposed parametric interpolating polynomial performs better than the other existing interpolating polynomial considered in this study. Figure 3 demonstrates C2GBP is capable of preserving the curvature compared with the other five previous methods in Problem 1. An irregular inflexion curve was detected in Problem 2. The numerical results indicate that C2GBP manages to handle this situation better than the other methods by producing the smallest errors as displayed in Figure 4. Figure 5 presents the numerical results obtained in the employed method for solving the increase step of the curve occurred in Problem 3. The results show that C2GBP also excels in non-oscillating curve output since the inner control points are geometrically constructed. The advantage of C2GBP is that it is able to control the curvature at subintervals which increases accuracy.

The results of the approximate parametric interpolating polynomials for solving Problems 1-3 in terms of errors are also displayed in Tables 1 to 3, respectively.

Table 1. Comparison of the new method with the existing methods in terms accuracy for solving Problem 1

No.	Error Method	Spline	Pchip	mAkima	Ball	Pollock	C2GBP	Error Method
1	SSE	30.1732	22.3251	21.4038	16.4903	18.8969	0.9798	SSE
2	MAE	0.1438	0.0500	0.0220	0.0753	0.0430	0.0030	MAE
3	RMSE	4.5673	3.2846	3.4321	2.8704	3.3622	0.7389	RMSE

Table 2. Comparison of the new method with the existing methods in terms accuracy for solving Problem 2

No.	Error Method	Spline	Pchip	mAkima	Ball	Pollock	C2GBP
1	SSE	400.5244	13.3164	9.2046	20.3031	13.5424	2.8842
2	MAE	0.5216	0.1207	0.1030	0.1377	0.1283	0.0688
3	RMSE	10.4459	2.4161	2.0618	2.7570	2.5692	1.3780

Table 3. Comparison of the new method with the existing methods in terms accuracy for solving Problem 3

No.	Error Method	Spline	Pchip	mAkima	Ball	Pollock	C2GBP
1	SSE	$1.9909 \times 10^{+15}$	$2.3463 \times 10^{+15}$	$2.6544 \times 10^{+15}$	$2.5843 \times 10^{+15}$	$3.2945 \times 10^{+15}$	$7.1770 \times 10^{+14}$
2	MAE	$1.0663 \times 10^{+6}$	$9.8778 \times 10^{+5}$	$1.0557 \times 10^{+6}$	$1.2654 \times 10^{+6}$	$1.4839 \times 10^{+6}$	$4.9519 \times 10^{+5}$
3	RMSE	$2.1352 \times 10^{+7}$	$1.9780 \times 10^{+7}$	$2.1139 \times 10^{+7}$	$2.5340 \times 10^{+7}$	$2.9716 \times 10^{+7}$	$9.9161 \times 10^{+6}$

The errors in terms of SSE, MAE, RMSE in Tables 1 to 3 suggest that C2GBP is the best option to be applied to approximate dataset in all test problems.

Figures 6-8 illustrate the error rates on all  $\lambda$  along approximate curves by using the RMSE, in order to provide a more accurate description. Curvature amplitude reveals that the error ratio of the curves increases which means the closer the curve to  $x$ -coordinate, the less the error is. It is worth to mention that the error at the dataset is zero since the interpolating points are the dataset.



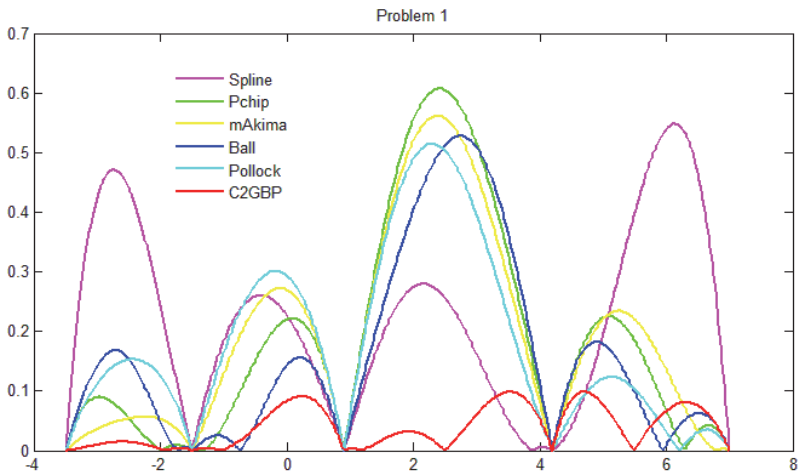


Fig. 6. Comparison between six different methods in terms of error ratio using RMSE for approximating dataset in solving Problem 1

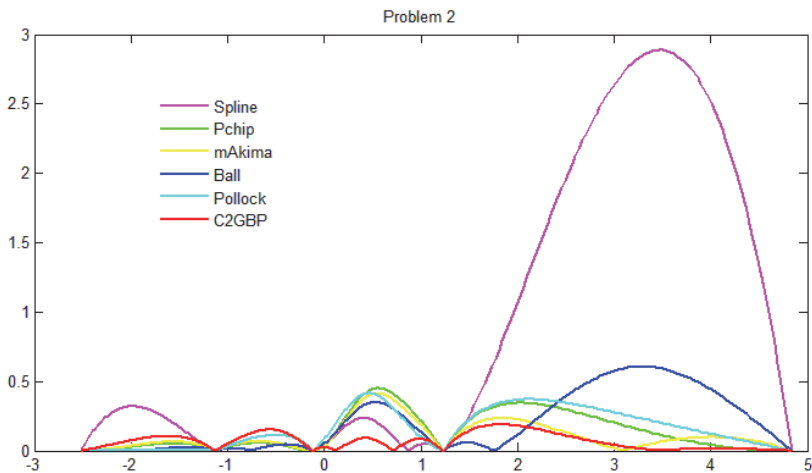


Fig. 7. Comparison between six different methods in terms of error ratio using RMSE for approximating dataset in solving Problem 2

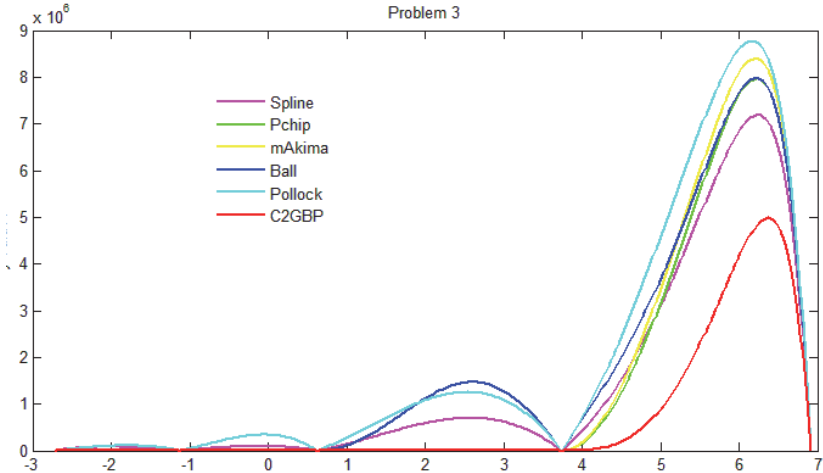


Fig. 8. Comparison between six different methods in terms of error ratio using RMSE for approximating dataset in solving Problem 3

The Bar Graph representation of Tables 1 to 3 are shown in Figures 9- 11, respectively.

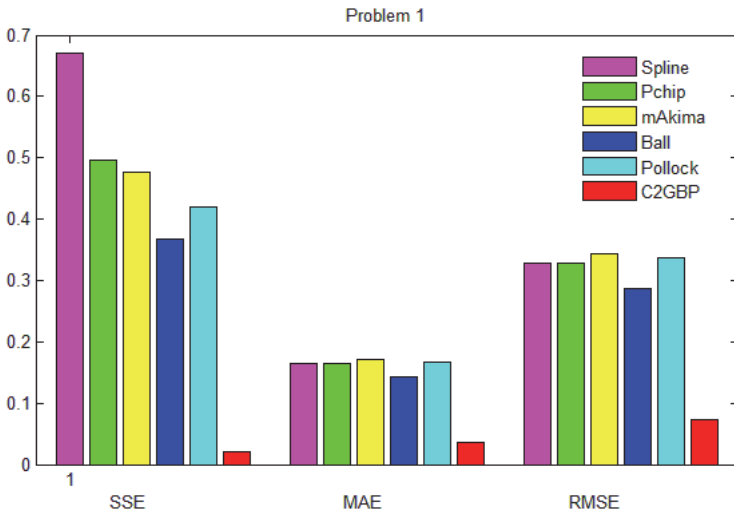


Fig. 9. Bar Graph of Accuracy for Problem 1

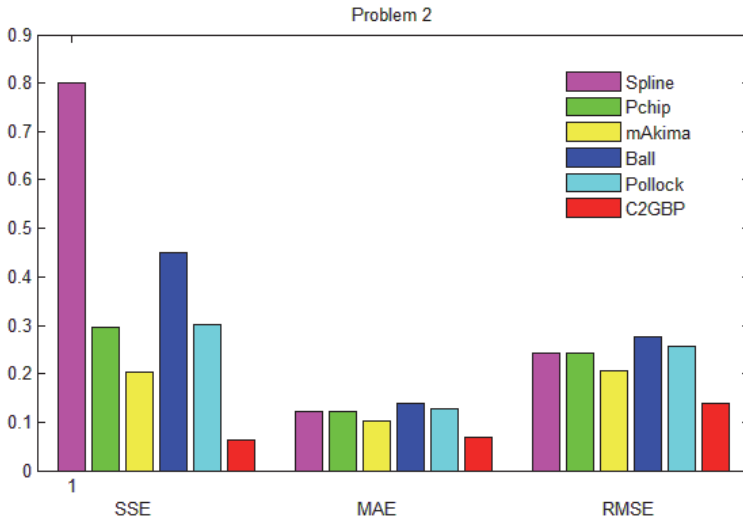


Fig. 10. Bar Graph of Accuracy for Problem 2

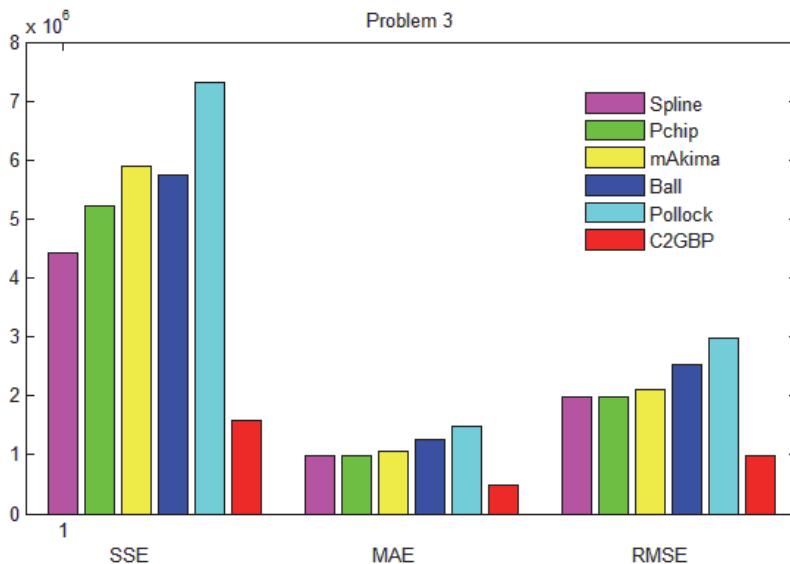


Fig. 11. Bar Graph of accuracy for Problem 3

**5. Conclusion.** This study has successfully constructed a piecewise cubic Bézier polynomial using a geometric technique to find suitable Bézier

inner control point locations for each sub-interval. The proposed method gives an approximate cubic Bézier curve representing the dataset with interpolating at all data points. The proposed procedure succeeded in achieving the second-order of parametric continuity between every adjacent sub-interval of the data points. The newly constructed parametric interpolating polynomial was then compared with the existing natural cubic spline, piecewise cubic Hermite interpolating polynomial, modified Akima piecewise cubic Hermite interpolation, rational cubic Ball interpolation, and natural cubic Bézier curve using the same datasets. Three different error testing methods have been used by taking (100) test points for each sub-interval. The numerical results show that the proposed method is more accurate than the other existing methods shown in this study. All the details of the comparison have been indicated in tables and graphs for each testing. The resulting curve is very appropriate to find a fit, smooth, and accurate representation of the data points. The proposed method can also be used in many applications, as in image processing and geographic information systems. As well, it is expandable to include many applications in two-dimension.

## References

1. Alawadi F. New Pattern Recognition Methods for Identifying Oil Spills from Satellite Remote Sensing Data. *Image and Signal Processing for Remote Sensing XV*. 2009. vol. 7477. pp. 74770X.
2. Amenta N., Bern M. Surface Reconstruction by Voronoi Filtering. *Discrete & Computational Geometry*. 1999. vol. 22. pp. 481–504.
3. Kondrashov D., Ghil M. Spatio-Temporal Filling of Missing Points in Geophysical Data Sets. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2006. vol. 13(2). pp. 151–159.
4. Chen F., Lou W. Degree Reduction of Interval Bézier Curves. *CAD Computer Aided Design*. 2000. vol. 32(10). pp. 571–582.
5. Wu Q.B., Xia F.H. Shape modification of Bézier curves by constrained optimization. *Journal of Zhejiang University: Science*. 2005. vol. 6. pp. 124–127.
6. Al-Shemary M.A.F. Interpolation by Using Bézier Curve Numerically with Image Processing Applications. *Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics*. 2011. vol. 3(2). pp. 400–409.
7. Sederberg T.W., Farouki R.T. Approximation by Interval Bézier Curves. *IEEE Computer Graphics and Applications*. 1992. vol. 12. pp. 87–59.
8. Hwang J.H., Arkin R.C., Kwon D.S. Mobile Robots at your Fingertip: Bezier Curve on-line Trajectory Generation for Supervisory Control. 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2003. vol. 2. pp. 1444–1449.
9. Škrjanc L., Klančar G. Cooperative Collision Avoidance Between Multiple Robots Based on Bernstein-Bézier Curves. *International Conference on Information Technology Interfaces*. 2007. pp. 34–43.
10. Ho M.L., Chan P.T., Rad A.B. Lane Change Algorithm for Autonomous Vehicles via Virtual Curvature Method. *Journal of Advanced Transportation*. 2009. vol. 43(1). pp. 47–70.
11. Korzeniowski D., Ślaski G. Method of Planning a Reference Trajectory of a Single Lane Change Manoeuvre with Bezier Curve. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016. vol. 148(1). 243 p.
12. Lattarulo R. et al. Urban Motion Planning Framework Based on N-Bézier Curves Considering Comfort and Safety. *Journal of Advanced Transportation*. 2018. 29 p.

13. Perez J., Godoy J., Villagra J., Onieva E. Trajectory Generator for Autonomous Vehicles in Urban Environments. 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2013. pp. 409–414.
14. Ge Q.J., Kang D. Motion Interpolation With G2 Composite Bezier Motions. 1995. pp. 520–525.
15. Pollock D.S.G. Signal Processing and its Applications. Handbook of time series analysis, signal processing, and dynamics. 1999. 543 p.
16. Shemanarev M. A Very Simple Method of Smoothing. Retrieved from The Anti-Grain Geometry 2002. Available at: [http://www.antigrain.com/agg\\_research/bezier\\_interpolation.html](http://www.antigrain.com/agg_research/bezier_interpolation.html) (accessed: 12.12.2020).
17. Yau H.T., Wang J.B. Fast Bezier Interpolator with Real-Time Lookahead Function for High-Accuracy Machining. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 2007. vol. 47(10). pp. 1518–1529.
18. Saaban A., Zainudin L., Bakar M.N.A. On Piecewise Interpolation Techniques for Estimating Solar Radiation Missing Values in Kedah. AIP Conference Proceedings, 1635 (Icoqsia). 2014. pp. 217–221.
19. Karim S.A.A. Shape Preserving by Using Rational Cubic Ball Interpolant. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 2015. vol. 96(2). pp. 211–230.
20. Saaban A., Zainudin M.L., Abu Bakar M.N. Piecewise Positivity Preserving Cubic Bezier Interpolation for Estimating Solar Radiation Missing Value in Penang, Malaysia. *Journal of Mathematics and Statistics*. 2016. vol. 12(4). pp. 302–307.
21. Ueda E.K. et al. Piecewise Bézier Curve Fitting by Multiobjective Simulated Annealing. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. vol. 49(31). pp. 49–54.
22. Stelia O., Potapenko L., Sirenko I. Application of Piecewise-Cubic Functions for Constructing a Bezier Type Curve of C1 Smoothness. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. vol. 4(2). pp. 46–52.
23. Zulkifli N.A.B. et al. Image Interpolation Using a Rational Bi-Cubic Ball. *Mathematics*. 2019. vol. 7(11). 29 p.
24. Elber G. Interpolation Using Bézier Curves. Graphics Gems III (IBM Version). 1992. vol. 0. pp. 133–136.
25. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. *Applied Mathematics*. 2000. vol. 37. 57 p.
26. Hansford D. Bézier Techniques. Handbook of Computer Aided Geometric Design 2002. pp. 75–109.
27. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis (Tenth Edit). Brooks/Cole. 2015.
28. Rabbath C.A., Corriveau D. A comparison of piecewise cubic Hermite interpolating polynomials, cubic splines and piecewise linear functions for the approximation of projectile aerodynamics. *Defence Technology*. 2019. vol. 15(5). pp. 741–757.
29. Moler C. Makima Piecewise Cubic Interpolation. MathWorks. 2019.

**Fadhel Mustafa** – Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Al-Muthanna University. Research interests: numerical analysis, bezier interpolation, numerical approximation, numerical interpolation, image upscaling, image interpolation, computer aided geometric design. The number of publications – 8. [mustafa@mu.edu.iq](mailto:mustafa@mu.edu.iq); 66001, Samawa, Iraq; office phone: +9647800226700.

**Omar Zurni** – Ph.D., Dr.Sci., Professor, Universiti Utara Malaysia. Research interests: mathematical modelling, algorithms, numerics, differentiation, numerical methods, parallel computing, calculations, MPI, ordinary equations, parallel algorithm. The number of publications – 200. [zurni@uum.edu.my](mailto:zurni@uum.edu.my); 06010, Sintok, Malaysia; office phone: +60194443993.

**Acknowledgements.** I would like to thank Universiti Utara Malaysia for supporting this research.

М.А. ФАДХЕЛЬ, З.Б. ОМАР  
**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КУСОЧНО-КУБИЧЕСКИЙ  
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН БЕЗЬЕ С  
НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ  $C^2$**

*Фадхель М.А., Омар З.Б. Геометрический кусочно-кубический интерполяционный многочлен Безье с непрерывностью  $C^2$ .*

**Аннотация.** Кривая Безье – это параметрический полином, который применяется для получения хороших методов кусочной интерполяции с большим преимуществом перед другими кусочными полиномами. Следовательно, критически важно построить кривые Безье, которые были бы гладкими и могли бы повысить точность решений. Большинство известных стратегий определения внутренних контрольных точек для кусочных кривых Безье обеспечивают только частичную гладкость, удовлетворяющую первому порядку непрерывности. Некоторые решения позволяют строить интерполяционные полиномы с гладкостью по ширине вдоль аппроксимирующей кривой. Однако они все еще не могут обрабатывать расположение внутренних контрольных точек. Частичная гладкость и неконтролируемое расположение внутренних контрольных точек могут повлиять на точность приблизительной кривой набора данных. Чтобы улучшить гладкость и точность предыдущих стратегий, предлагается новый кусочно-кубический многочлен Безье второго порядка непрерывности  $C^2$  для оценки пропущенных значений. Предлагаемый метод использует геометрическое построение для поиска внутренних контрольных точек для каждого смежного подынтервала указанного набора данных. Не только предлагаемый метод сохраняет стабильность и гладкость, анализ ошибок численных результатов также показывает, что результирующий интерполирующий полином более точен, чем те, которые получены с помощью существующих методов.

**Ключевые слова:** Полином интерполяции, кривая Безье, сплайн Безье, SSE, MAE, RMSE

## Литература

1. *Alawadi F.* New Pattern Recognition Methods for Identifying Oil Spills from Satellite Remote Sensing Data // Image and Signal Processing for Remote Sensing XV. 2009. vol. 7477. pp. 74770X.
2. *Amenta N., Bern M.* Surface Reconstruction by Voronoi Filtering // Discrete & Computational Geometry. 1999. vol. 22. pp. 481–504.
3. *Kondrashov D., Ghil M.* Spatio-Temporal Filling of Missing Points in Geophysical Data Sets // Nonlinear Processes in Geophysics. 2006. vol. 13(2). pp. 151–159.
4. *Chen F., Lou W.* Degree Reduction of Interval Bézier Curves // CAD Computer Aided Design. 2000. vol. 32(10). pp. 571–582.
5. *Wu Q.B., Xia F.H.* Shape modification of Bézier curves by constrained optimization // Journal of Zhejiang University: Science. 2005. vol. 6. pp. 124–127.
6. *Al-Shemary M.A.F.* Interpolation by Using Bézier Curve Numerically with Image Processing Applications // Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics. 2011. vol. 3(2). pp. 400–409.
7. *Sederberg T.W., Farouki R.T.* Approximation by Interval Bézier Curves // IEEE Computer Graphics and Applications. 1992. vol. 12. pp. 87–59.

8. *Hwang J.H., Arkin R.C., Kwon D.S.* Mobile Robots at your Fingertip: Bezier Curve on-line Trajectory Generation for Supervisory Control // 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2003. vol. 2. pp. 1444–1449.
9. *Škrjanc L., Klančar G.* Cooperative Collision Avoidance Between Multiple Robots Based on Bernstein-Bézier Curves // International Conference on Information Technology Interfaces. 2007. pp. 34–43.
10. *Ho M.L., Chan P.T., Rad A.B.* Lane Change Algorithm for Autonomous Vehicles via Virtual Curvature Method // Journal of Advanced Transportation. 2009. vol. 43(1). pp. 47–70.
11. *Korzeniowski D., Ślaski G.* Method of Planning a Reference Trajectory of a Single Lane Change Manoeuvre with Bezier Curve // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. vol. 148(1). 243 p.
12. *Lattarulo R. et al.* Urban Motion Planning Framework Based on N-Bézier Curves Considering Comfort and Safety // Journal of Advanced Transportation. 2018. 29 p.
13. *Perez J., Godoy J., Villagra J., Onieva E.* Trajectory Generator for Autonomous Vehicles in Urban Environments // 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2013. pp. 409–414.
14. *Ge Q.J., Kang D.* Motion Interpolation With G2 Composite Bezier Motions. 1995. pp. 520–525.
15. *Pollock D.S.G.* Signal Processing and its Applications // Handbook of time series analysis, signal processing, and dynamics. 1999. 543 p.
16. *Shemanarev M.* A Very Simple Method of Smoothing. Retrieved from The Anti-Grain Geometry 2002. URL: [http://www.antigrain.com/agg\\_research/bezier\\_interpolation.html](http://www.antigrain.com/agg_research/bezier_interpolation.html) (дата обращения: 12.12.2020).
17. *Yau H.T., Wang J.B.* Fast Bezier Interpolator with Real-Time Lookahead Function for High-Accuracy Machining // International Journal of Machine Tools and Manufacture. 2007. vol. 47(10). pp. 1518–1529.
18. *Saaban A., Zainudin L., Bakar M.N.A.* On Piecewise Interpolation Techniques for Estimating Solar Radiation Missing Values in Kedah // AIP Conference Proceedings, 1635 (Icoqsia). 2014. pp. 217–221.
19. *Karim S.A.A.* Shape Preserving by Using Rational Cubic Ball Interpolant // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2015. vol. 96(2). pp. 211–230.
20. *Saaban A., Zainudin M.L., Abu Bakar M.N.* Piecewise Positivity Preserving Cubic Bezier Interpolation for Estimating Solar Radiation Missing Value in Penang, Malaysia // Journal of Mathematics and Statistics. 2016. vol. 12(4). pp. 302–307.
21. *Ueda E.K. et al.* Piecewise Bézier Curve Fitting by Multiobjective Simulated Annealing // IFAC-PapersOnLine. 2016. vol. 49(31). pp. 49–54.
22. *Stelia O., Potapenko L., Sirenko I.* Application of Piecewise-Cubic Functions for Constructing a Bezier Type Curve of C1 Smoothness // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. vol. 4(2). pp. 46–52.
23. *Zulkifli N.A.B. et al.* Image Interpolation Using a Rational Bi-Cubic Ball // Mathematics. 2019. vol. 7(11). 29 p.
24. *Elber G.* Interpolation Using Bézier Curves // Graphics Gems III (IBM Version). 1992. vol. 0. pp. 133–136.
25. *Quarteroni A., Sacco R., Saleri F.* Numerical Mathematics // Applied Mathematics 2000. vol. 37. 57 p.

26. *Hansford D. Bézier Techniques // Handbook of Computer Aided Geometric Design 2002. pp. 75–109.*
27. *Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis (Tenth Edit) // Brooks/Cole. 2015.*
28. *Rabbath C.A., Corriveau D. A comparison of piecewise cubic Hermite interpolating polynomials, cubic splines and piecewise linear functions for the approximation of projectile aerodynamics // Defence Technology. 2019. vol. 15(5). pp. 741–757.*
29. *Moler C. Makima Piecewise Cubic Interpolation // MathWorks. 2019.*

**Фадхель Мустафа Аббас** – старший преподаватель, кафедра прикладной информатики, Университет Аль-Мутанна. Область научных интересов: численный анализ, интерполяция Безье, численное приближение, численная интерполяция, масштабирование изображения, интерполяция изображений, компьютерное геометрическое проектирование. Число научных публикаций – 8. [mustafa@mu.edu.iq](mailto:mustafa@mu.edu.iq); 66001, Самава, Ирак; р.т.: +9647800226700.

**Омар Зурни Б** – д-р филос. наук, профессор, Малазийский университет Утара. Область научных интересов: математическое моделирование, алгоритмы, вычисления, дифференцирование, численные методы, параллельные вычисления, вычисления, MPI, обыкновенные уравнения, параллельный алгоритм. Число научных публикаций – 200. [zurmi@uum.edu.my](mailto:zurmi@uum.edu.my); 06010, Синток, Малайзия; р.т.: +60194443993.

**Поддержка исследований.** Проект осуществлен при поддержке Малазийского университета Утара.



А.А. АНДРЕЕВ, А.И. ШАБАЕВ  
**МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ВЫЯВЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ  
ЛОКАЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ ПРИ НЕПОЛНЫХ  
ДАННЫХ**

---

*Андреев А.А., Шабаетв А.И. Модели и методы выявления структуры локальной вычислительной сети при неполных данных.*

**Аннотация.** Описание логической и физической структур сети необходимо для решения многих задач сетевого управления. Автоматизация такого описания осложнена неполнотой и некорректностью исходных данных о структуре сети, получаемых из стандартных источников. Это приводит к необходимости выявления скрытых и неявно заданных элементов структуры сети. Исследуются свойства неполных исходных данных о связях сетевых устройств на канальном уровне. Для этого вводятся графовые модели структуры канального уровня в присутствии виртуальных локальных сетей, формализуется задача дополнения исходных данных. Приводятся методы обобщенной обработки разнородных исходных данных о канальном уровне. Описываются модели и методы выведения части отсутствующих данных, а также условие, при котором исходные данные могут позволить построить единственное правильное описание структуры сети. Рассматриваются методы определения в исходных данных некорректных элементов и ситуаций, при которых возможно несколько решений задачи выявления структуры сети. Приводятся алгоритмы выявления структуры сети при неполных данных, когда их можно и нельзя восполнить до необходимого объема, методы разрешения неоднозначности во входных данных и методы исправления некорректных данных. Проведенные вычислительные испытания методов на сгенерированных данных и в реальных сетях показывают их применимость и эффективность в сетях различных структур и со смешанным набором производителей оборудования. Также показывается преимущество перед разработанными ранее аналогичными методами: способность дополнить до 99% данных о связях на канальном уровне за полиномиальное время, возможность получения точного решения при неоднозначности исходных данных.

**Ключевые слова:** компьютерные сети, моделирование, автоматизация, структура ЛВС, канальный уровень

---

**1. Введение.** Развитие рынка информационных технологий обуславливает рост масштабов и сложности коммуникационных инфраструктур (далее сети) современных поставщиков сетевых услуг (ПСУ). Самым многочисленным классом ПСУ являются предприятия малой и средней величины, решающие информационно-технологические задачи на базе собственной локальной вычислительной сети (ЛВС). Систематический подход к управлению требует полного и детального описания структуры ЛВС, включая все три базовых уровня (физический, канальный и сетевой).

Подробное описание структуры ЛВС, включающее сведения об управляемых элементах (сетевые устройства и порты, конечные точки протоколов передачи данных) и связях иерархии и передачи данных между ними, используется сетевыми администраторами для моделирования, про-

ектирования и документирования сети, обеспечения отказоустойчивости и безопасности, анализа производительности, построения оптимальной структуры сети с точки зрения надежности и количества соединений [1–4].

Из-за масштабов современных ЛВС построение и сопровождение такого описания вручную трудозатратно, в связи с чем встает задача автоматизации описания структуры функционирующей сети по доступным динамическим данным [5, 6]. Сложность решения этой задачи заключается в неполноте исходных данных [5–8], которая возникает из-за устаревания данных (например, в кэше Address Resolution Protocol ARP и таблицах коммутации), разнородности сетевого оборудования, отсутствия части данных по техническим причинам и мерам безопасности. Эти и другие факторы обуславливают необходимость выявления скрытых и неявно заданных элементов структуры сети.

Известно, что неполнота данных может приводить к ошибкам и неточностям в автоматически построенных описаниях структуры сети [5, 7]. Однако можно вывести часть отсутствующих данных и сделать процесс исследования сети более точным [5, 7, 9, 10].

Для решения задачи автоматизации выявления структуры сети в серии предыдущих работ [9–12] представляют модели и методы автоматизированного выявления структуры ЛВС на физическом, канальном и сетевом уровнях при неполных данных и присутствии прозрачных устройств. В частности, были описаны методы восполнения части данных о связях на канальном уровне, исследованы свойства предложенных методов выявления необходимости корректности исходных данных и наличия в них сведений о достижимости между собой на канальном уровне всех соединенных физически устройств [9]. Цель данной статьи – исследование методов дополнения неполных исходных данных и построение новых методов, способных работать при обозначенных ограничениях.

Статья организована следующим образом. В параграфе 2 представлен обзор ранее выполненных исследований по теме работы, выявлены некоторые недостатки. В параграфе 3 представлена графовая модель структуры сети с учетом VLAN (Virtual Local Area Network), а также модель данных о связях на канальном уровне сети. Представлены основные понятия, используемые при выявлении структуры сети при неполных исходных данных. В параграфе 4 представлены алгоритмы обработки неполных исходных данных в рамках процесса выявления структуры сети. В параграфе 5 описаны результаты испытаний предложенных методов. Параграф 6 завершает статью.

**2. Обзор литературы.** Проблема неполноты исходных данных тщательно исследуется в задаче автоматизации выявления структуры ЛВС. Эта проблема больше всего касается данных о связях устройств на канальном уровне, которые лежат в основе большинства методов автоматизированного описания структуры сети. В частности, таблицы коммутации (Address Forwarding Tables, AFT), которые широко используются для исследования сети, зависят от активности сетевых устройств и содержат информацию не о прямых (физических) соединениях, а о достижимости, то есть о возможности обмена между интерфейсами кадров канального уровня.

В [13] указывается на необходимость глубокого исследования свойств таблиц коммутации в связи с их возможной неполнотой. Описывается модель и набор правил для обработки неполных данных и выявления структуры сети. На практике показана способность метода к построению точного описания структуры сети при наличии 15% данных о достижимости. Однако описанный метод применим только к сетям с деревообразной структурой и без VLAN. Также при выявлении структуры сети возможно возникновение конфликтных ситуаций, для разрешения которых предложены полуслучайные методы, что может привести к большому количеству ошибок.

Исследователи в [7] описали некоторые общие свойства неполных данных о достижимости и предложили алгоритм их обработки для использования при выявлении структуры сети. Доказана достаточность полученных дополненных данных для исследования сети. Однако данный метод не может работать в сетях с VLAN и может дать некорректный результат при присутствии в сети прозрачных устройств (например, хабов без MAC-адресов).

В [5] показано, что выявление структуры сети при неполных исходных данных, а также определение, могут ли исходные данные привести к однозначному решению, являются NP-полными задачами от числа сетевых узлов. В статье предложены модели структуры сети и неполных входных данных, а также набор правил и алгоритмов для выявления структуры сети в различных ситуациях. Вычислительные испытания одного из предложенных алгоритмов показали, что он способен строить точное описание структуры сети при полноте данных более 50%. Однако алгоритмы не поддерживают сети с VLAN и часто могут дать неоднозначное решение.

В [6, 8] исследователями предприняты попытки адаптировать результаты из [5] к сетям с VLAN. В [6] авторами показано, что использование нескольких источников данных, а не только таблиц коммутации, может повысить точность выявления структуры сети и полноту исходных

данных. Для этого авторы в дополнение используют ARP-кэш как источник данных о достижимости на канальном уровне. В [8] показано, что можно ослабить требования методов из [6] на входные данные: достаточно определенной степени полноты данных о связях между служебными сетевыми устройствами (исключая хосты). Однако ни одна из этих работ не предоставляет теоретического анализа или подробных вычислительных испытаний своих методов при неполных исходных данных. Утверждается только, что удалось построить описание структуры сети в нескольких частных случаях.

Методы, представленные в [14], способны работать в сетях с VLAN и с неполными данными. Для этого авторы объединяют построение описания канального и сетевого уровней. Однако авторами не приводятся исследования влияния неполноты данных на результат. Кроме того, приведенные методы не работоспособны в присутствии прозрачных устройств. Также авторами упоминается, что не гарантируется корректная работа алгоритма в сетях, в которых используется оборудование нескольких производителей.

Во многих работах [15–20] проблема неполноты данных упоминается, но никак не решается. То есть модели и методы выявления структуры сети, предлагаемые в этих работах, проектируются только для случаев с полными исходными данными, чего нельзя гарантировать в реальных сетях.

В [9, 10] авторами разработаны модели и методы выявления структуры при неполных исходных данных из нескольких источников различных типов вне зависимости от производителей оборудования. Показана теоретическая и практическая применимость и эффективность методов при низкой полноте исходных данных. Показано, какие данные должны присутствовать в исходном наборе для однозначного решения задачи выявления структуры сети. Однако в работе не рассматриваются случаи, когда исходных данных недостаточно для получения однозначного решения или они некорректны.

Новизна представленных в настоящей работе результатов заключается в определении и исследовании новых свойств задачи обработки неполных данных о структуре сети. Разработан новый метод дополнения неполных данных и определено формальное условие, когда этот метод может дать точное решение. Также представлен ряд методов повышения точности приближенного решения при невозможности получения точного.

**3. Модель структуры сети.** В [10, 12] описана графовая модель структуры сети на физическом, канальном и сетевом уровнях с учетом VLAN, VPN и агрегирования каналов, описаны ее свойства. Приведем

краткие сведения об этой модели на канальном уровне, что потребуются для описания разрабатываемых методов.

**3.1. Группированные графы.** Заметим, что структура и свойства графа на трех описываемых уровнях схожая и приведем обобщение некоторых их свойств.

Группированным графом назовем граф  $G = \langle V, E \rangle = \langle O \cup P, E \rangle$ , в котором каждая вершина  $o \in O$  является центром подграфа-звезды (группы) с подмножеством вершин  $P_o \subset P$  и для любых  $o_1, o_2 \in O$  ребро  $(o_1, o_2) \notin E$ . Вершины множества  $O$  назовем базовыми вершинами группированного графа.

Введем несколько классов отношений (ребер) в группированном графе. Отношением ассоциации  $A$  назовем бинарное симметричное антирефлексивное отношение на множестве  $O \cup P$  между базовой вершиной и небазовой вершиной из ее группы:  $(p, o) \in A$  и  $(o, p) \in A$  тогда и только тогда, когда  $p \in P, o \in O$  и  $p \in P_o$ . Отношением соединения назовем бинарное симметричное слабо транзитивное (транзитивность без рефлексивности) антирефлексивное отношение на множестве  $P$  между небазовыми вершинами из разных групп. Отношением перенаправления назовем бинарное симметричное слабо транзитивное антирефлексивное отношение на множестве  $P$  между небазовыми вершинами одной группы.

Многоуровневым группированным графом назовем граф  $G = \langle V, E \rangle = G^{(1)} \cup G^{(2)} \cup \dots \cup G^{(n)} = \langle V^{(1)} \cup \dots \cup V^{(n)}, E^{(1)} \cup \dots \cup E^{(n)} \rangle$ , в котором есть общее множество базовых вершин  $O \subset \bigcap_{i=1}^n V^{(i)}$ . В таком графе небазовые вершины и все ребра принадлежат разным классам для разных уровней.

Реберно-чередующимся путем уровня  $i$  назовем такой реберно-простой путь в подграфе  $G^{(i)}$  графа  $G$ , в котором нет двух идущих подряд ребер одного класса.

Таким образом, граф структуры сети из [10, 12] можно назвать многоуровневым группированным графом. В данной работе будем рассматривать только один уровень – канальный.

**3.2. Метод моделирования структуры сети.** Структуру канального уровня ЛВС можно описать в виде группированного графа. В нем  $D$  – множество базовых вершин (сетевые устройства);  $P$  – множество физических портов;  $P_d$  – множество портов сетевого устройства  $d$ ;  $L^{(1)}$  – отношение соединения физического уровня: два порта  $p_1, p_2 \in P$ , ассоциированные с разными устройствами, находятся в отношении  $L^{(1)}$ , если они подключены к единой среде передачи данных.

$VID \subset \mathbb{N}_0$  – множество всех меток VLAN в сети;  $I^{(2)}$  – множество канальных интерфейсов (небазовых вершин);  $(u, v)$  – канальный интерфейс, здесь  $u \subset P_o$ ,  $v \in VID$ ;  $|u| > 1$  при агрегировании каналов; если интерфейс не участвует в VLAN, то  $v = 0$ ;  $A^{(2)}$  – отношение ассоциации канального уровня;  $L^{(2)}$  – отношение соединения канального уровня: два незаблокированных канальных интерфейса  $r_1 = (u_1, v_1)$ ,  $r_2 = (u_2, v_2)$ , ассоциированные с разными устройствами, могут находиться в отношении  $L^{(2)}$ , если существуют  $p_1 \in u_1, p_2 \in u_2$  такие, что  $(p_1, p_2) \in L^{(1)}$ ;  $F^{(2)}$  – отношение коммутации (перенаправления) канального уровня:  $(r_1, r_2) \in F^{(2)}$ , если конфигурация устройства  $d \in D$  предусматривает возможность пересылки кадров между двумя канальными интерфейсами  $r_1, r_2 \in I_d^{(2)}$ ,  $r_1 \neq r_2$ ;  $V^{(2)} = O \cup I^{(2)}$  – множество вершин канального уровня;  $E^{(2)} = A^{(2)} \cup L^{(2)} \cup F^{(2)}$  – множество ребер канального уровня;  $G^{(2)} = \langle V^{(2)}, E^{(2)} \rangle$  – граф канального уровня;  $\hat{G}^{(2)} = \langle I^{(2)}, F^{(2)} \cup L^{(2)} \rangle$  – подграф широковещательных доменов канального уровня; широковещательные домены – это его компоненты связности; путь канального уровня – реберно-чередующийся путь в подграфе  $\hat{G}^{(2)}$ .

По стандарту IEEE 802.1D избыточные пути передачи данных блокируются для предотвращения широковещательных штормов (протокол STP), из чего вытекает следующее условие.

*Условие 1. Если в графе  $G^{(2)}$  между интерфейсами  $r_1, r_2 \in I^{(2)}$  существует путь канального уровня, то он является единственным путем канального уровня между интерфейсами  $r_1$  и  $r_2$ .*

Из определения пути канального уровня вытекает следующее свойство.

*Свойство 1. В графе  $G^{(2)}$  между двумя интерфейсами канального уровня путь канального уровня существует тогда и только тогда, когда они входят в один широковещательный домен.*

Граф канального уровня сети связный неориентированный, не содержит петель и кратных ребер, может содержать циклы. Задача автоматизации выявления структуры сети (АВСС) на канальном уровне заключается в построении графа  $G^{(2)}$  по набору исходных данных от сетевых устройств. Далее в работе будем для простоты опускать индекс (2) у обозначений, так как рассматривается только канальный уровень.

**3.3. Достижимость на канальном уровне.** В сети один интерфейс канального уровня достижим от другого, если может являться для него конечной точкой передачи данных на канальном уровне. Назовем путем достижимости канального уровня такой путь канального уровня, первое и последнее ребра которого не являются ребрами коммутации. Введем на множестве  $I$  бинарное симметричное антирефлексивное отношение

достижимости  $\leftrightarrow$  такое, что  $r_1 \leftrightarrow r_2$ , если от  $r_1$  до  $r_2$  существует путь достижимости в графе  $G$ . Будем говорить, что  $r_2$  достижим на канальном уровне от  $r_1$  (далее «К-достижим от  $r_1$ »).

Пример отношения К-достижимости приведен на рисунке 1. Устройства изображены квадратными вершинами, интерфейсы – круглыми. Ребра ассоциации показаны простыми линиями, ребра соединения и коммутации – пунктирными. К-достижимость показана точечными линиями со стрелками.

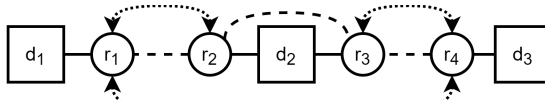


Рис. 1. Пример отношения К-достижимости

Будем говорить, что порт  $p \in P$  К-достижим от интерфейса  $r_1 \in I$ , если существует интерфейс  $(u, v) \in I$ , К-достижимый от  $r_1$ , для которого  $p \in u$ . Для каждого  $r = (u, v) \in I$  введем множество К-достижимости  $RS_r \subset I$ , содержащее все интерфейсы, К-достижимые от  $r$ . Также введем множество  $CRS_r = \bigcup_{a: a F r} RS_a$  (где  $a \in I$ ) и множество  $\leftrightarrow_r \subset \leftrightarrow$ , где  $\forall (a, b) \in \leftrightarrow_r, a = r$ .

Большинство источников исходных данных о структуре канального уровня ЛВС предоставляют информацию об отношениях соединения в неявном виде, как К-достижимость портов от интерфейсов. По определению К-достижимости и свойству 1 для К-достижимости порта  $p$  от интерфейса  $r_1$  необходимо вхождение интерфейса  $r_1 = (u_1, v_1)$  и какого-либо  $r_2 = (u_2, v_2)$  (где  $p \in u_2$ ) в один широковещательный домен. При отсутствии данных о вхождении К-достижимого порта в VLAN будем считать, что либо  $v_1 = v_2$  (если известно, что устройство поддерживает VLAN), либо  $v_2 = 0$ .

Относительно множеств  $RS$  и  $CRS$  справедлива [12] теорема:

*Теорема 1. Если канальный интерфейс  $r_2$  К-достижим от интерфейса  $r_1$ , то от  $r_1$  К-достижимы все интерфейсы, К-достижимые от интерфейсов, коммутирующих с  $r_2$ , то есть  $CRS_{r_2} \subset RS_{r_1}$ .*

Получаем свойство отношения К-достижимости, которое назовем К-транзитивностью: если  $r_1 \leftrightarrow r_2$ ,  $(r_2, r_3) \in F$  и  $r_3 \leftrightarrow r_4$ , то  $r_1 \leftrightarrow r_4$ .

Определим понятие неполноты данных о К-достижимости. Пусть  $\leftrightarrow$  – это отношение К-достижимости для графа  $G$ . Пусть  $\leftrightarrow' \subset \leftrightarrow$  – это отношение К-достижимости, построенное по исходным данным о структуре сети. Назовем данные о К-достижимости полными, если  $\leftrightarrow' = \leftrightarrow$ . Аналогично можем назвать множество К-достижимости

$RS_r$  интерфейса  $r \in I$  полным, если оно содержит все интерфейсы, К-достижимые от  $r$ . Степенью полноты данных о К-достижимости назовем число  $C(\leftrightarrow') = \frac{||\leftrightarrow' - \leftrightarrow||}{|\leftrightarrow|} \cdot 100\%$ .

При решении задачи АВСС граф  $G$  неизвестен. Имеется граф  $G'$ , полученный по исходным данным о структуре сети, в котором множества ребер канального уровня не обязательно соответствуют исходным данным о К-достижимости. Также имеется исходное отношение  $\leftrightarrow'$ , которое построено по исходным данным о К-достижимости в графе  $G'$ , извлеченным из сетевых устройств. Данные о К-достижимости обычно неполны ввиду отсутствия сведений о К-достижимости каких-либо интерфейсов в исходных данных. Исходные данные о К-достижимости могут не соответствовать ребрам графа  $G'$ , то есть элементу  $(r_i, r_j) \in \leftrightarrow'$  может не соответствовать путь К-достижимости в графе  $G$  в связи с отсутствием каких-либо ребер. Подзадача дополнения данных о К-достижимости (далее задача ДДКД) при решении задачи АВСС заключается в построении отношения  $\leftrightarrow$ , имея  $G'$  и  $\leftrightarrow'$ .

Кроме того, согласно введенным определениям задача АВСС построения графа  $G$  канального уровня заключается в построении транзитивного сокращения графа К-достижимости  $R = \langle I, \leftrightarrow \rangle$  при условии существования в графах всех вершин и ребер  $F$ . Задача АВСС может иметь несколько решений, если исходные данные неполны и в некоторых частных случаях становится NP-полной [5]. Это приводит к необходимости разработки эвристических методов решения задачи.

#### 4. Дополнение данных о достижимости на канальном уровне.

Решение задачи ДДКД является одним из подготовительных этапов алгоритма выявления структуры сети, приведенного в [10]. Оно заключается в сборе данных о достижимости от устройств, приведении этих разнородных данных к введенным понятиям модели и непосредственно дополнение данных [9]. Входными данными при решении задачи ДДКД является неполный граф  $G$  с вершинами, ребрами ассоциации и некоторыми ребрами коммутации, а также наборы сырых данных, полученные из МИБ (Management Information Base) сетевых устройств по протоколу SNMP.

**4.1. Первичная обработка исходных данных.** Доступные источники данных о связях устройств на канальном уровне включают МИБ протоколы CDP, LLDP, STP, ARP и таблицы коммутации. STP предоставляет данные только о прямых соединениях, включает данные о VLAN и заблокированных соединениях, поэтому является наиболее полным источником (достижимость интерфейсов от интерфейсов); CDP и LLDP предоставляют данные о прямых соединениях, но не включают данные о VLAN (в общем случае) и заблокированных соединениях (достижи-



мость портов от портов); AFT включают данные о К-достижимости с учетом VLAN (достижимость портов от интерфейсов); ARP – данные о К-достижимости без учета VLAN (достижимость портов от портов).

По SNMP получить эти данные можно из BRIDGE-MIB, Q-BRIDGE-MIB, CISCO-CDP-MIB, LLDP-MIB, IP-MIB, RFC1213-MIB.

В итоге переноса данных на понятия модели (реализацию опустим) для каждого канального интерфейса  $r \in I$  в графе будет получено множество К-достижимости  $RS_r$ , возможно, пустое. Также будет построено начальное отношение К-достижимости  $\leftrightarrow'$ .

Как отмечено выше, источники данных, используемые для наполнения множеств К-достижимости, не должны рассматриваться как равные. Для разделения сведений о К-достижимости введем понятия приоритетов записей о К-достижимости [10]. Введем отображение  $PR: \leftrightarrow \rightarrow \mathbb{N}$  по следующему правилу, в зависимости от источника данных о К-достижимости:

$$PR((r_1, r_2)) = \begin{cases} 0, & \text{источник – правила дополнения множеств RS;} \\ 1, & \text{источник – ARP;} \\ 2, & \text{источник – AFT;} \\ 3, & \text{источник – LLDP;} \\ 4, & \text{источник – CDP;} \\ 5, & \text{источник – STP.} \end{cases}$$

Отображение  $PR$  назовем приоритетом К-достижимости. Знание приоритета позволит общим образом различать источники данных о К-достижимости и использовать это знание при разрешении неопределенностей.

При наполнении множеств К-достижимости, если данные о К-достижимости между двумя интерфейсами обнаружены в нескольких источниках, будем выбирать источник с максимальным приоритетом.

Из-за возможной неполноты данных  $\leftrightarrow'$  необходимо подготовить для дальнейшего использования в алгоритмах таким образом, чтобы его элементы не противоречили свойству симметричности отношения К-достижимости с помощью процедуры П1 в листинге 1:

```

for  $r_i \in I$ :
  for  $r_j : (r_i, r_j) \in \leftrightarrow'$ 
    if  $(r_j, r_i) \notin \leftrightarrow'$ :
       $\leftrightarrow'.add((r_j, r_i))$ 

```

Листинг 1. Процедура П1 подготовки множеств К-достижимости

Вычислительная сложность процедуры П1 составляет  $O(|I|^2)$ .

**4.2. Получение точного решения при ограничениях.** Используя свойства отношения К-достижимости, приведем численный метод построения более точного графа К-достижимости – решения задачи ДДКД – из [9] с поправкой на свойства и отношения, введенные в настоящей работе. В основе метода – построение замыкания отношения  $\leftrightarrow'$  относительно свойства К-транзитивности. Метод представлен в виде алгоритма А1 в листинге 2:

```

for  $r_i \in I$ :
   $Q = \text{Queue}; \text{Visited} = \{r_i\}$ ;
  for  $(r_i, r_j) \in \leftrightarrow'$ :
     $Q.\text{enqueue}(r_j, 1)$ 
  while  $Q \neq \emptyset$ :
     $(r_j, q) = Q.\text{dequeue}()$ 
     $\text{Visited}.\text{add}(r_j)$ 
    if  $q = 1$ :
      if  $(r_j, r_i) \notin \leftrightarrow'$ :
         $\leftrightarrow'.\text{add}(r_j, r_i)$ 
      if  $(r_i, r_j) \notin \leftrightarrow'$ :
         $\leftrightarrow'.\text{add}(r_i, r_j)$ 
      for  $r_k : (r_j, r_k) \in F$ :
        if  $r_k \notin \text{Visited}$ :
           $Q.\text{enqueue}(r_k, 0)$ 
    if  $q = 0$ :
      for  $(r_j, r_k) \in \leftrightarrow'$ :
         $Q.\text{enqueue}(r_k, 1)$ 

```

Листинг 2. Алгоритм А1 решения задачи ДДКД

В [9] аналогичный алгоритм полагался на обработку матрицы отношения К-достижимости, в связи с чем вычислительная сложность была определена как  $O(|I|^3)$ . Вычислительная сложность приведенного в листинге 2 метода составляет  $O(|I|^2)$ : для каждого интерфейса канального уровня производится операция, аналогичная обходу в ширину графа К-достижимости  $R$ , что эквивалентно  $O(|I|)$  при использовании эффективных структур данных. Для определения границ применимости метода в [9] доказана:

*Теорема 2.* Пусть интерфейсы  $I_i$  и  $I_j$  находятся в отношении  $L$  друг с другом в графе  $G$ . Если изначально  $(I_i, I_j) \notin \leftrightarrow'$ , то Алгоритм А1 не позволяет определить К-достижимы ли указанные интерфейсы друг от друга.

На основе свойств К-достижимости и теоремы 2 можно вывести условие возможности построения отношения  $\leftrightarrow$  с полными данными (единственного решения задачи ДДКД) с помощью Алгоритма А1:

*Следствие 1.* Если для любых двух интерфейсов  $I_i$  и  $I_j$ , находящихся в отношении  $L$ , изначально  $(I_i, I_j) \in \leftrightarrow'$ , тогда с помощью Алгоритма А1 возможно построить единственное отношение  $\leftrightarrow$  с полными данными о  $K$ -достижимости.

Таким образом, есть прямая зависимость полноты множеств  $K$ -достижимости, получаемых алгоритмом А1, от изначальных сведений о  $K$ -достижимости соединенных интерфейсов. И решение задачи ДДКД сводится к построению замыкания отношения  $\leftrightarrow'$  относительно свойства  $K$ -транзитивности.

Главным предположением для использования приведенного метода является отсутствие в исходных данных некорректной информации о  $K$ -достижимости ( $K$ -достижимость интерфейсов, на самом деле недостижимых) и наличие всех ребер коммутации. В зависимости от качества исходных данных в реальных условиях можно получить или отношение  $\leftrightarrow$  с полными данными о  $K$ -достижимости, или отношение  $\leftrightarrow''$  такое, что  $\leftrightarrow' \subset \leftrightarrow'' \subset \leftrightarrow$ .

**4.3. Использование достижимости при выявлении структуры сети.** Полученное отношение  $K$ -достижимости возможно использовать для построения отношений  $L$  и  $F$  на канальном уровне. Для этого в [10] приведены следующие правила:

*Правило 1.* Если от интерфейса  $r_1 \in I$   $K$ -достижим только один интерфейс  $r_2 \in I$  и  $RS_{r_2} = CRS_{r_1} \cup \{r_1\}$ , то  $(r_1, r_2) \in L$ .

*Правило 2.* Если два интерфейса  $r_1$  и  $r_2$   $K$ -достижимы друг от друга, и  $RS_{r_1} = CRS_{r_2} \cup \{r_2\}$  и  $RS_{r_2} = CRS_{r_1} \cup \{r_1\}$ , то  $(r_1, r_2) \in L$ .

*Правило 3.* Если для устройства  $d \in D$  и двух  $K$ -достижимых друг от друга интерфейсов канального уровня  $r_1$  и  $r_2$  выполняется:

1. От  $r_1$   $K$ -достижим  $r_3 \in I_d$ , от  $r_2$   $K$ -достижим  $r_4 \in I_d$ .
2. От  $r_1$  и  $r_2$  не  $K$ -достижимы интерфейсы из  $I_d$ , отличные от  $r_3$  и  $r_4$  соответственно.

3. От интерфейсов, коммутирующих с  $r_1$  или  $r_2$ , не  $K$ -достижимы интерфейсы, ассоциированные с  $d$ .

Тогда  $r_3$  и  $r_4$  находятся в отношении  $F$ .

Алгоритм А2 [10] построения этих отношений в графе  $G$  заключается в следующем:

1. Дополнение данных о  $K$ -достижимости.
2. Для пар интерфейсов  $I$  проверка правил 1 и 2 и добавление пары в  $L$  при выполнении правила.
3. Для пар интерфейсов одного устройства проверка правила 3 и добавление пары в  $F$  при выполнении правила.

4. Возврат к шагу 1 если было обнаружено хотя бы одно ребро  $L$  или  $F$ .

Алгоритм отчасти заключается в построении транзитивного сокращения графа  $R$ . При использовании эффективных структур данных и алгоритма A1 вычислительная сложность алгоритма A2 составит  $O(I^5)$  и  $\Omega(I^3)$  против  $O(I^8)$  и  $\Omega(I^4)$ , показанных в [10].

**4.4. Методы выбора решения при неоднозначности.** Условие из Следствия 1 легко достигается в реальных сетях при использовании всех доступных источников данных о достижимости. Однако отсутствие данных о К-достижимости соединенных интерфейсов все же возможно. Пример такой ситуации приведен на рисунке 2. Из отношения К-достижимости видно, что граф  $G$  связный, но правила из раздела 4.3 не позволяют обнаружить соединения  $L$ , кроме  $(r_6, r_7)$ .

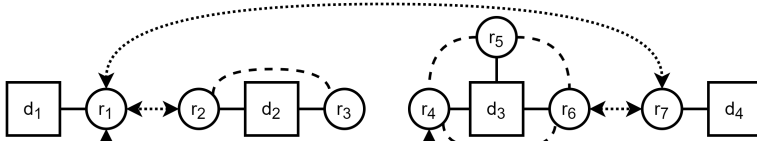


Рис. 2. Пример неоднозначности К-достижимости

Из Следствия 1 очевидно, что отсутствовать в отношении достижимости в первую очередь должны пары интерфейсов, находящиеся в отношении  $L$  в графе  $G$ . Исходя из этого построим отношение потенциальной К-достижимости  $\leftrightarrow^*$  по следующему правилу: интерфейсы  $(r_1, r_2) \in \leftrightarrow^*$ , если все следующие условия выполняются:

- $(r_1, r_2) \notin \leftrightarrow$ ;
- $r_1, r_2$  не находятся в отношении  $L$  с другими интерфейсами;
- $r_1 \in I_{d1}, r_2 \in I_{d2}$  и  $d_1 \neq d_2$ ;
- $RS_{r_1} \cap RS_{r_2} = \emptyset$ ;
- $CRS_{r_1} \cap CRS_{r_2} = \emptyset$ ;
- $RS_{r_1} \cap CRS_{r_2} \neq \emptyset$  или  $RS_{r_2} \cap CRS_{r_1} \neq \emptyset$ ;
- $r_1 \notin CRS_{r_2}$  и  $r_2 \notin CRS_{r_1}$ .

Таким образом, потенциально К-достижимы пары интерфейсов, которые не противоречат правилу 2 и другим свойствам К-достижимости, а также находятся в одном широковещательном домене.

Использовать отношение потенциальной К-достижимости в алгоритме A2 можно следующим образом. После шага 4, если отношение  $\leftrightarrow^*$  не пусто, выбрать одну из пар  $(r_1, r_2) \in \leftrightarrow^*$  и перенести в  $\leftrightarrow$  и  $L$ , после чего продолжить с шага 1. Сложность алгоритма ( $O(I^5)$  и  $\Omega(I^3)$ ) при этом

не возрастает, так как условие возврата на новую итерацию аналогично условию из шага 4.

В примере на рисунке 2 потенциально  $K$ -достижимы пары интерфейсов  $(r_3, r_4)$  и  $(r_2, r_5)$ . Используя  $\leftrightarrow^*$  и модифицированный алгоритм A2, можно получить два решения. Они приведены на рисунке 3.

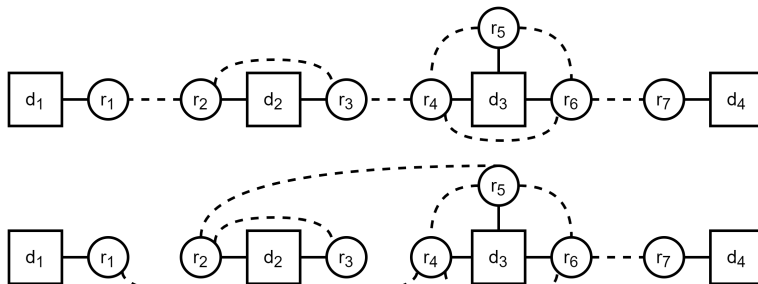


Рис. 3. Пример множественных решений

Неоднозначность решения можно разрешить в некоторых ситуациях с помощью приоритета  $K$ -достижимости  $PR$ . Заметим, что некоторые источники данных о связях устройств предоставляют сведения только о соединениях напрямую (LLDP, CDP, STP). Введем число  $Z$ , которое определяет границу в приоритете  $K$ -достижимости между данными о прямых соединениях и прочими данными. Для описанного отображения  $PR$ ,  $Z = 3$ . Располагая такими дополнительными сведениями, будем исключать элементы  $(r_1, r_2)$  из отношения  $\leftrightarrow^*$ , если существует  $q \in \leftrightarrow^*_{r_1} \cup \leftrightarrow^*_{r_2}$ , для которого  $PR(q) \geq Z$ .

Таким образом, при невыполнении условий из следствия 1 возможно существование нескольких решений задачи выявления структуры сети, но располагая дополнительными сведениями, можно выбрать из множества решений наиболее точное.

**4.5. Исключение некорректных данных.** Исходные данные о достижимости могут быть некорректны, то есть указывать на  $K$ -достижимости интерфейсов, на самом деле недостижимых. Происходить это может из-за разнородности сетевого оборудования и в высокодинамичных сетях. Например, беспроводное устройство может быстро переключиться между точками доступа в разных VLAN и остаться в кэше протокола ARP и в таблицах коммутации разных устройств на разных интерфейсах.

Условие обнаружения некорректных данных – невыполнение условия 1, что можно обнаружить через отношение  $K$ -достижимости:

*Следствие 2.* Для  $r_1, r_2 \in I_d$ ,  $d \in D$ , таких что  $(r_1, r_2) \in F$ , множества  $RS_{r_1}$  и  $RS_{r_2}$  не должны пересекаться.

Пересечение множеств  $RS$  говорит о существовании цикла в структуре канального уровня, что невозможно в функционирующей сети. Если они пересекаются, с точностью определить, какой из потенциальных путей в цикле на самом деле существует, невозможно.

Продолжить выявление структуры сети при некорректных данных возможно, исключив из рассмотрения некоторые элементы, образующие цикл. При обнаружении некорректных данных выбирается один из интерфейсов  $r_i$  пары  $(r_1, r_2) \in F$ , от которой обнаружен цикл, и из отношения  $\leftrightarrow$  исключаются все элементы  $(r_i, r_j)$ , где  $r_j \in RS_{r_1} \cap RS_{r_2}$ . Таким образом, цикл будет разорван, и устройство, из-за которого образовался цикл, окажется с одной стороны пары  $(r_1, r_2)$ .

При реализации данного метода следует принимать во внимание возможность существования циклов с одними и теми же устройствами и портами в разных широковещательных доменах. При разрешении некорректности следует выбирать одинаковое направление разрыва циклов, чтобы соблюсти физическую связность сети. Также предпочтение в выборе опорной пары интерфейсов следует отдавать интерфейсам устройств, которые доступны по SNMP, так как для таких устройств данные более достоверны.

**5. Вычислительные испытания.** Приведенные в работе методы были реализованы в рамках программной системы для автоматизированного выявления структуры сети, предыдущие реализации которой описаны в [10].

**5.1. Испытания со сгенерированными данными.** Реализация алгоритмов протестирована на 1000 сгенерированных сетей различных размеров: 1–3 маршрутизатора, 2–50 коммутаторов, 40–1000 рабочих станций, 1–5 VLAN, 85–2000 интерфейсов. Сначала производится генерация сети и построение правильного отношения достижимости  $\leftrightarrow$ . Затем генерируется отношение  $\leftrightarrow'$  различной полноты. После этого производится дополнение данных о К-достижимости с помощью разработанных алгоритмов и сравнение полученного отношения К-достижимости с правильным, а также построение графа  $G$  структуры сети и сравнение его со сгенерированным графом. Для построения графа  $G$  из сгенерированного графа исключались все ребра  $L$ .

При любых размерах начального графа и любой полноте данных о К-достижимости и выполнении условий из следствий 1 и 2 с помощью реализации алгоритмов удалось получить отношение К-достижимости с полными данными, а построенные графы  $G$  совпадали со сгенери-

рованным графом. Отметим, что данные, с помощью которых можно удовлетворить условия из следствия 1, составляют 1–5% от данных о К-достижимости (степень полноты  $C(\leftrightarrow')$ ), то есть с помощью разработанных методов удастся дополнить 95–99% данных о К-достижимости.

Проведены испытания реализации алгоритмов в случаях, когда условия из следствия 1 не выполняются. Используя этот же метод генерации (и сети размером 40–130 устройств и 1–5 VLAN), из отношения  $\leftrightarrow'$  исключались случайно выбранные пары интерфейсов, соединенные ребром  $L$  в сгенерированном графе. Степень полноты данных о непрямых соединениях варьировалась от 10 до 90%. Все данные о К-достижимости приняты с одинаковым приоритетом.

Введем множество  $\leftrightarrow^- = \leftrightarrow' \setminus \leftrightarrow$ , которое содержит пары К-достижимых интерфейсов, некорректно присутствующих в дополненном отношении  $\leftrightarrow'$ . Введем число  $C^-(\leftrightarrow') = \frac{||\leftrightarrow^-||}{||\leftrightarrow' \setminus \leftrightarrow^-||} \cdot 100\%$ , которое показывает степень неполноты данных о К-достижимости с учетом неправильно дополненных данных.

Данные тестирования приведены в таблице 1. Столбец 2 содержит количество пар интерфейсов в правильном отношении К-достижимости. Столбцы 3 и 4 содержат среднюю степень полноты данных  $C(\leftrightarrow')$  и  $C^-(\leftrightarrow')$  в полученном отношении К-достижимости с учетом и без учета потенциальной К-достижимости. Столбцы 5 и 6 содержат максимальное и среднее число пар К-достижимых интерфейсов, которые алгоритм не смог обнаружить (с учетом потенциальной К-достижимости).

Таблица 1. Результаты тестирования при неоднозначности К-достижимости

Кол-во VLAN	Кол-во отсутствующих соединений	Ср. кол-во пар в $\leftrightarrow$	Средняя $C(\leftrightarrow')$ после обработки, %	Ср. $C^-(\leftrightarrow')$ после обработки с учетом $\leftrightarrow^*$ , %	Макс. ненайденных пар	Ср. ненайденных пар
1–5	0	5157	100	100	0	0
1–2	1	6958	99,20	99,93	66	2,69
1–2	2	6958	98,61	99,81	100	6,98
1–2	3	6958	98,36	99,68	96	11,02
1–2	4	6958	97,51	99,39	218	20,40
1–2	5	6958	97,04	99,26	214	26,27
3–5	1	3957	99,40	99,76	48	8,83
3–5	2	3957	98,71	99,63	122	10,77
3–5	3	3957	98,11	99,46	180	15,30
3–5	4	3957	97,68	99,28	280	20,75
3–5	5	3957	96,99	99,06	222	24,41

Согласно результатам тестирования приведенные методы способны построить отношение К-достижимости с данными, близкими к полным, даже при отсутствии части критических для точного решения задачи данных. Использование отношения потенциальной К-достижимости позволяет улучшить результат на 0,5–2%.

Полученный результат можно улучшить еще, если использовать данные о приоритете К-достижимости. Возможно уменьшить (в зависимости от конфигурации сети) вероятность ошибочного выбора из потенциально К-достижимых элементов, что позволит повысить точность выявления структуры сети. Тем не менее использование потенциальной К-достижимости позволит получить связный граф структуры сети, близкий к правильному, даже при отсутствии сведений о приоритете.

Время обработки реализации алгоритма дополнения данных с учетом потенциальной К-достижимости для сетей с 300 интерфейсами канального уровня составило в среднем 647 мс.

**5.2. Испытания с реальными данными.** Испытания реализации методов протестировано в реальной ЛВС Петрозаводского государственного университета. Исследуемый сегмент сети содержит: 1 маршрутизатор Cisco 7600, 4 коммутатора 3 уровня Cisco 3750 и Cisco 3850, 52 различных коммутаторов Cisco 2 уровня доступные по SNMP и 296 недоступных коммутаторов, точек доступа Wi-Fi и прочих служебных устройств, 795 рабочих станций и 101 VLAN (всего 1148 устройств). Количество интерфейсов канального уровня составляет 6037. Время сбора данных составило 11 минут 23 секунды, построения описания – 2 минуты 7 секунд.

Основные источники данных о достижимости – CDP, STP и таблицы коммутации. Отношение К-достижимости для сравнения было построено с помощью данных, полученных от сетевых администраторов и самостоятельно из сети. Используя разработанные алгоритмы, удалось построить отношение К-достижимости с полными данными и точный граф структуры сети  $G$ . Не было сделано ни одного предположения о потенциальной К-достижимости, не обнаружено некорректных данных.

Всего было обнаружено 99270 пар К-достижимых интерфейсов. Дополненная алгоритмами часть составила 90%. Такое большое число объясняется большим количеством устройств, VLAN и недоступных по SNMP служебных устройств – много данных было недоступно изначально, однако кэши CDP и STP предоставили большую часть необходимых данных о напрямую соединенных интерфейсах.

Также испытания были проведены в сети филиала АО «АЭМ-технологии» «Петрозаводскмаш». Обнаружено 427 устройств (Cisco, HP, Telesis), 1325 портов, 441 соединение на физическом уровне, 9079 интер-



фейсов канального уровня, 2455 соединений на канальном уровне, 3579 связей коммутации. Время сбора данных составило 19 минут 44 секунды, построения описания – 6 минут 20 секунд. Было сделано 4 предположения о потенциальной достижимости и обработано 17 случаев некорректности данных о достижимости. Удалось построить точный граф структуры сети (подтверждается существующей документацией), кроме 6 отсутствующих соединений с хостами (отсечены в ходе обработки некорректных данных).

**5.3. Сравнение с аналогами.** Предыдущий вариант разработанных методов был сравнен в [9] с результатами работ других исследователей [5–8]. Было показано существенное преимущество в точности (95-99% дополненных данных против 50%) при повышении вычислительной сложности.

Приведены методы дополнения данных в случаях их некорректности или неоднозначности, которые позволяют улучшить предыдущий результат еще на 1-1,5% без повышения вычислительной сложности.

Использование некорректных данных не было исследовано ни в одной из известных авторам предыдущих работ. Использование неоднозначных данных было исследовано в [5], где предлагалось производить построение ребер соединения с помощью аналогичного отношения потенциальной  $K$ -достижимости. Однако в указанной работе предлагалось сразу строить граф  $G$  от потенциальной  $K$ -достижимости, минуя стадию построения ребер  $L$ , с точностью известных по  $K$ -достижимости. Это приводило к большому количеству ошибок в построенном графе. Также в работе не использовались приоритеты  $K$ -достижимости для повышения точности предположений. Кроме того, предложенные в [5] алгоритмы не совместимы с сетями с VLAN.

**6. Заключение.** Описание физической и логической структур локальной вычислительной сети необходимо для решения многих задач сетевого управления. Однако автоматизация такого описания осложнена возможностью неполноты и некорректности исходных данных о соединениях сетевых устройств.

Представлены модели и методы обработки неполных исходных данных о достижимости устройств на канальном уровне сети. Дополнение таких данных позволяет выявить элементы структуры сети на физическом и канальном уровнях. В работе сформулирована и проанализирована задача дополнения неполных данных, показана ее близость с классической задачей построения замыкания бинарного отношения. Определено свойство, относительно которого строится замыкание, предложен простой алгоритм решения задачи, основанный на обходе графа достижимости на канальном уровне в ширину. Определено условие для исходных данных о

достижимости, при выполнении которого возможно получить точное решение задачи: известность достижимости устройств, соединенных между собой физически.

Определены и проанализированы случаи, когда получение точного решения не гарантируется, в том числе, когда исходные данные некорректны. Для них предложены и обоснованы методы исключения некорректных данных и выбора одного решения из множества. В этих методах используются свойства модели структуры сети и дополнительные сведения об исходных данных (из какого источника они получены).

Представленные результаты вычислительных испытаний (в том числе в реальных сетях) показывают применимость и эффективность разработанных методов при различных конфигурациях ЛВС. Удаётся получить точное решение при выполнении обозначенного условия для исходных данных и решение, близкое к точному (98-100% полноты данных о достижимости после обработки), и невыполнении или некорректности исходных данных. Аprobация, проведенная в двух крупных вычислительных сетях реальных предприятий, показывает возможность возникновения в реальных условиях неполноты и некорректности данных, которую разработанные методы успешно смогли исправить.

Авторы выражают благодарность д. т. н., профессору кафедры ПМИК ПетрГУ Р. В. Воронову за консультацию в области теории графов.

### Литература

1. *Hussain T. H., Habib S. J.* Capacity planning of network redesign — A case study // Proceedings of the 2010 International Symposium on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems (SPECTS'10). 2010. pp. 52–57.
2. *Zhu Z. et al.* Data flow monitoring and control of LAN based on strategy // 2010 International Conference on Networking and Digital Society. 2010. vol. 2. pp. 225–228.
3. *Sivakumar L. et al.* Virtual topologies for abstraction service for IP-VPNs // 2016 17th International Telecommunications Network Strategy and Planning Symposium (Networks). 2016. pp. 213–220.
4. *Wang C. et al.* A method of network topology optimization design considering application process characteristic // Modern Physics Letters B. 2018. vol. 32. no. 07. pp. 1850091–1850091-11.
5. *Gobjuka H., Breitbart Y. J.* Ethernet topology discovery for networks with incomplete information // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2010. vol. 18. no. 4. pp. 1220–1233.
6. *Zichao L. et al.* Ethernet topology discovery for virtual local area networks with incomplete information // 2014 4th IEEE International Conference on Network Infrastructure and Digital Content. 2014. pp. 252–256.
7. *Bejerano Y.* Taking the skeletons out of the closets: a simple and efficient topology discovery scheme for large ethernet LANs // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2009. vol. 17. no. 5. pp. 1385–1398.

8. Zhou J., Ma Y. Topology discovery algorithm for ethernet networks with incomplete information based on VLAN // 2016 IEEE International Conference on Network Infrastructure and Digital Content (IC-NIDC). 2016. pp. 396–400.
9. Andreev A., Shabaev A., Bogoiavlenskii I. Network Topology Discovery: a Problem of Incomplete Data Improvement // 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT). 2019. pp. 10–16.
10. Andreev A., Bogoiavlenskii I. An algorithm for building an enterprise network topology using widespread data sources // 2017 21st Conference of Open Innovations Association (FRUCT). 2017. pp. 34–43.
11. Андреев А. А. Обобщенная графовая модель виртуальных частных сетей в коммуникационной инфраструктуре локального поставщика сетевых услуг // Программная инженерия. 2017. Т. 8. № 6. С. 243–249.
12. Андреев А. А. и др. Обобщенная графовая модель структуры физического, канального и сетевого уровней ИКТ-инфраструктуры локального поставщика сетевых услуг // Программная инженерия. 2016. Т. 7. №. 9. С. 400–407.
13. Sun Y., Shi Z., Wu Z. A discovery algorithm for physical topology in switched ethernet // The IEEE Conference on Local Computer Networks 30th Anniversary (LCN'05) I. 2005. pp. 311–317.
14. Zhangchao W. et al. An algorithm and implementation of network topology discovery based on SNMP // 2016 First IEEE International Conference on Computer Communication and the Internet (ICCCI). 2016. pp. 283–286.
15. Zhou S. et al. Research on Network Topology Discovery Algorithm for Internet of Things Based on Multi-Protocol // 2018 10th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC). 2018. pp. 1–6.
16. Ma X., Yu T. An algorithm of physical network topology discovery in multi-VLANs // Telkomnika. 2016. vol. 14. no. 3A. pp. 375–379.
17. Jiang J., Xu X. L., Cao N. Research on improved physical topology discovery based on SNMP // 2017 IEEE International Conference on Computational Science and Engineering (CSE) and IEEE International Conference on Embedded and Ubiquitous Computing (EUC). 2017. vol. 2. pp. 219–222.
18. Zhang X. et al. An Optimization Algorithm of Network Topology Discovery Based on SNMP Protocol // Journal of Computer and Communications. 2018. vol. 6. no. 01. pp. 104–111.
19. Zhou Y. et al. Discovery algorithm for network topology based on SNMP // 2015 International Conference on Automation, Mechanical Control and Computational Engineering. 2015. pp. 1623–1628.
20. Li D. et al. Research and Application of Heterogeneous Network Topology Discovery Algorithm Based on Multiple Spanning Tree Protocol // Knowledge Discovery and Data Mining. 2012. pp. 437–444.

**Андреев Антон Александрович** – аспирант, Петрозаводский государственный университет. Область научных интересов: применение методов математического моделирования в компьютерных сетях. Число научных публикаций – 20. andreev@cs.petsru.ru; пр. Ленина, 33, 185910, Петрозаводск, Россия; р.т.: +7(814)271-10-01, факс: +7(814)271-10-00.

**Шабаетв Антон Игоревич** – канд. техн. наук, доцент, кафедра прикладной математики и кибернетики, Петрозаводский государственный университет. Область научных интересов: математическое моделирование систем управления, методы решения оптимизационных задач и их применение в управлении организациями и предприятиями, промышленная автоматизация. Число научных публикаций – 68. ashabaev@petsru.ru; пр. Ленина, 31, 185910, Петрозаводск, Россия; р.т.: +7(814)271-32-10, +7(814)271-10-68.

A.A. ANDREEV, A.I. SHABAEV  
**MODELS AND METHODS FOR DISCOVERY OF LOCAL AREA  
NETWORK TOPOLOGY WITH INCOMPLETE DATA**

---

*Andreev A.A., Shabaev A.I. Models and Methods for Discovery of Local Area Network Topology with Incomplete Data.*

**Abstract.** A lot of network management tasks require a description of the logical and physical computer network topology. Obtaining such a description in an automatic way is complicated due to the possibility of incompleteness and incorrectness of the initial data on the network structure. This article provides a study on the properties of incomplete initial data on network device connectivity on the link layer. Methods for generalized handling of the heterogeneous input data on the link layer are included. We describe models and methods for deriving a missing part of the data, as well as the condition in which it is possible to get a single correct network topology description. The article includes algorithms for building a link layer topology description from incomplete data when this data is possible to fulfill up to the required level. Also, we provide methods for detecting and resolving an ambiguity in the data and methods for improving incorrect initial data. The tests and evaluations provided in the article demonstrate the applicability and effectiveness of the build methods for discovering various heterogeneous real-life networks. Additionally, we show the advantages of the provided methods over the previous analogs: our methods are able to derive up to 99% data on link layer connectivity in polynomial time; able to provide a correct solution from an ambiguous data.

**Keywords:** Computer Networks, Modeling, Automation, Network Topology, Link Layer

---

**Andreev Anton Aleksandrovich** – Postgraduate Student, Petrozavodsk State University. Research interests: applying of mathematical modeling in computer networks. The number of publications – 20. andreev@cs.petsu.ru; 33, Lenina st., 185910, Petrozavodsk, Russia; office phone: +7(814)271-10-01; fax: +7(814)271-10-00.

**Shabaev Anton Igorevich** – Ph.D., Associate Professor, Chair of Applied Mathematics and Cybernetics, Petrozavodsk State University. Research interests: mathematical modeling of control systems, methods of the optimization problems solution, industrial automation. The number of publications – 68. ashabaev@petsu.ru; 31, Lenina st., 185910, Petrozavodsk, Russia; office phone: +7(814)271-32-10, +7(814)271-10-68.

## References

1. Hussain T. H., Habib S. J. Capacity planning of network redesign — A case study. Proceedings of the 2010 International Symposium on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems (SPECTS'10). 2010. pp. 52–57.
2. Zhu Z. et al. Data flow monitoring and control of LAN based on strategy. 2010 International Conference on Networking and Digital Society. 2010. vol. 2. pp. 225–228.
3. Sivakumar L. et al. Virtual topologies for abstraction service for IP-VPNs. 2016 17th International Telecommunications Network Strategy and Planning Symposium (Networks). 2016. pp. 213–220.
4. Wang C. et al. A method of network topology optimization design considering application process characteristic. *Modern Physics Letters B*. 2018. vol. 32. no. 07. pp. 1850091–1–1850091-11.

5. Gobjuka H., Breitbart Y. J. Ethernet topology discovery for networks with incomplete information. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2010. vol. 18. no. 4. pp. 1220–1233.
6. Zichao L. et al. Ethernet topology discovery for virtual local area networks with incomplete information. 2014 4th IEEE International Conference on Network Infrastructure and Digital Content. 2014. pp. 252–256.
7. Bejerano Y. Taking the skeletons out of the closets: a simple and efficient topology discovery scheme for large ethernet lans. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2009. vol. 17. no. 5. pp. 1385–1398.
8. J. Zhou, Y. Ma. Topology discovery algorithm for ethernet networks with incomplete information based on VLAN. 2016 IEEE International Conference on Network Infrastructure and Digital Content (IC-NIDC). 2016. pp. 396–400.
9. Andreev A., Shabaev A., Bogoiavlenskii I. Network Topology Discovery: a Problem of Incomplete Data Improvement. 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT). 2019. pp. 10–16.
10. Andreev A., Bogoiavlenskii I. An algorithm for building an enterprise network topology using widespread data sources. 2017 21st Conference of Open Innovations Association (FRUCT). 2017. pp. 34–43.
11. Andreev A. A. [Generalized Graph Model of Virtual Private Networks in the Communication Infrastructure of a Local Network Service Provider]. *Programmnaya Ingeneria — Software Engineering*. 2017. Issue 8. vol. 6. pp. 243–249. (In Russ.).
12. Andreev A. A. et al. [Generalized Graph Model of the Physical, Link and Network Layers Structure of the ICT-Infrastructure of a Local Network Service Provider]. *Programmnaya Ingeneria — Software Engineering*. 2016. Issue 7. vol. 9. pp. 400–407. (In Russ.).
13. Sun Y., Shi Z., Wu Z. A discovery algorithm for physical topology in switched ethernet. The IEEE Conference on Local Computer Networks 30th Anniversary (LCN'05) 1. 2005. pp. 311–317.
14. Zhangchao W. et al. An algorithm and implementation of network topology discovery based on SNMP. 2016 First IEEE International Conference on Computer Communication and the Internet (ICCCI). 2016. pp. 283–286.
15. Zhou S. et al. Research on Network Topology Discovery Algorithm for Internet of Things Based on Multi-Protocol. 2018 10th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC). 2018. pp. 1–6.
16. Ma X., Yu T. An algorithm of physical network topology discovery in multi-VLANs. *Telkommika*. 2016. vol. 14. no. 3A. pp. 375–379.
17. Jiang J., Xu X. L., Cao N. Research on improved physical topology discovery based on SNMP. 2017 IEEE International Conference on Computational Science and Engineering (CSE) and IEEE International Conference on Embedded and Ubiquitous Computing (EUC). 2017. vol. 2. pp. 219–222.
18. Zhang X. et al. An Optimization Algorithm of Network Topology Discovery Based on SNMP Protocol. *Journal of Computer and Communications*. 2018. vol. 6. no. 01. pp. 104–111.
19. Zhou Y. et al. Discovery algorithm for network topology based on SNMP. 2015 International Conference on Automation, Mechanical Control and Computational Engineering. 2015. pp. 1623–1628
20. Li D. et al. Research and Application of Heterogeneous Network Topology Discovery Algorithm Based on Multiple Spanning Tree Protocol. Knowledge Discovery and Data Mining. 2012. pp. 437–444.

Ю.Д. ВЫБОРНОВА, В.В. СЕРГЕЕВ  
**МЕТОД ЗАЩИТЫ АВТОРСКИХ ПРАВ НА ВЕКТОРНЫЕ  
КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ**

*Выборнова Ю.Д., Сергеев В.В. Метод защиты авторских прав на векторные картографические данные.*

**Аннотация.** Предложен метод защиты авторских прав на векторные картографические данные на основе встраивания растровых цифровых водяных знаков. Метод сочетает оригинальные авторские идеи, а именно: подход к встраиванию скрытой защитной информации в графические данные, не искажающей координатную информацию векторных объектов, и синтез шумоподобных изображений, выступающих в качестве контейнера для битовой последовательности цифровых водяных знаков. Шумоподобный сигнал кодирует биты цифровых водяных знаков в виде синусоидальных функций и таким образом отображает бинарную последовательность в растровое изображение, непосредственно встраиваемое в защищаемые данные. Применение шумоподобных сигналов в качестве цифровых водяных знаков значительно упрощает процедуру верификации, а также позволяет обеспечить устойчивость скрытой битовой последовательности при различных искажениях изображения цифровых водяных знаков, в том числе при интерполяции.

Целью экспериментальных исследований являлась оценка достижимой вероятности правильного извлечения двоичной последовательности цифровых водяных знаков при различных параметрах и условиях встраивания.

Исследование информационной емкости показало, что потенциальный объем информации, встраиваемый в каждый полигон без искажения битовой последовательности цифровых водяных знаков, зависит от типа карты, а именно от количества вершин, составляющих каждый полигон.

Проведено экспериментальное исследование стойкости полученного метода к потенциально возможным преобразованиям, направленным на злоумышленное удаление цифровых водяных знаков из векторной карты. Разработанный метод демонстрирует стойкость к аффинным преобразованиям, кадрированию, добавлению, удалению и переупорядочиванию вершин/объектов, и может применяться в качестве решения задачи защиты авторских прав на векторные данные.

Проведен анализ качества метода по критериям точности, стойкости, информационной емкости, вычислительной сложности. Результаты всех проведенных исследований подтверждают возможность использования и эффективность предложенного метода защиты векторных картографических данных, а также его преимущества перед существующими методами встраивания цифровых водяных знаков.

**Ключевые слова:** геоинформационные системы, векторные карты, защита авторских прав, цифровой водяной знак, растровое изображение, дискретное преобразование Фурье, битовая последовательность

**1. Введение.** Создание векторных картографических данных представляет собой ресурсоемкий процесс, требующий наличия квалифицированных специалистов и лицензионного программного обеспечения. В связи с высокой стоимостью производства векторных карт их владельцы заинтересованы в сохранении своих авторских прав.

Для решения задачи защиты авторских прав применяется технология встраивания цифровых водяных знаков (ЦВЗ). Предполагается,

что собственник данных обеспечивает их встроенной защитной информацией, которая впоследствии позволяет доказать факт несанкционированного распространения. Кроме того, этап верификации ЦВЗ может включать и процедуру аутентификации на предмет нелегитимных изменений. Поставленные задачи защиты предопределяют уровень стойкости встраиваемых ЦВЗ: для детектирования подделки защитная информация (полухрупкий ЦВЗ) должна разрушаться при определенных преобразованиях векторной карты, но при защите авторских прав ЦВЗ должен быть как можно более устойчив как к легальным, так и злоумышленным изменениям (такие ЦВЗ называются стойкими).

Качество метода встраивания ЦВЗ характеризуется степенью выполнения следующих критериев [1]:

- точность данных контейнера (визуальная неразличимость встроенной информации);
- стойкость ЦВЗ (устойчивость карты со встроенным ЦВЗ к преобразованиям);
- информационная ёмкость контейнера (количество бит ЦВЗ, которые можно встроить);
- вычислительная сложность (время, требуемое для реализации процедур встраивания/извлечения ЦВЗ);
- безопасность расположения ЦВЗ (непредсказуемость расположения ЦВЗ на карте).

Нулевое встраивание ЦВЗ представляет собой аналог процедуры хеширования: для защищаемой карты вычисляется некоторая идентифицирующая информация, которая впоследствии хранится отдельно. На этапе «извлечения» ключевые характеристики вычисляются заново, после чего сформированный ЦВЗ сравнивается с исходным. Например, в [2] вычисляется отношение расстояний между вершинами, после чего для большей секретности объединяется с битами ЦВЗ. В [3] ЦВЗ строится на основе триангуляции и вычисления локальных характеристик внутри каждого треугольника.

Несомненным плюсом таких схем является отказ от внесения искажений в координатную информацию, однако встает вопрос о необходимости регистрации таких ЦВЗ в уполномоченных органах.

При адаптивном подходе к встраиванию защитной информации ЦВЗ содержит данные для идентификации и при этом встраивается в векторную карту. Так, в [4] идентификационная информация строится на основе характерных точек, которые вычисляются с помощью алгоритма упрощения Дугласа – Пекера. Для того чтобы разграничить легальные и злоумышленные преобразования векторной карты, ЦВЗ встраивается не только в характерные точки, которые должны оста-

ваться неизменными, но и в нехарактерные. В [5] информация для аутентификации вычисляется на основе объединения векторных объектов в группы и перехода в полярную систему координат. В [6] ЦВЗ формируется на основе вычисления логарифмических полярных координат, разности которых являются устойчивыми к геометрическим преобразованиям векторной карты. При этом в [4-6] сама процедура встраивания реализуется за счет небольшого изменения значений координат с помощью стратегии модуляции квантования. В [7] для построения ЦВЗ вычисляются углы векторных объектов. Целые значения каждого угла изменяются в соответствии с ключом. Встраивание в векторный объект реализуется путем замены дробной части угла на полученное для этого угла значение ЦВЗ.

Большинство существующих методов защиты векторных данных реализуют классический подход к встраиванию ЦВЗ, когда встраиваемая защитная информация представляет собой битовую последовательность или цифровое изображение, формируемые независимо от защищаемых данных.

В [8] ЦВЗ встраивается в векторную карту за счет изменения координат вершин таким образом, чтобы внутри некоторого кластера длина всех линий (или площадь всех полигонов) изменилась на заданную величину. В [9] авторы предлагают с помощью стратегии модуляции квантования изменять координаты вершин таким образом, чтобы значение отношения расстояний между характерными вершинами изменялось на заданную величину. При этом каждый бит ЦВЗ внедряется в несколько объектов: такого рода избыточность позволяет повысить стойкость, но вместе с тем значительно уменьшает потенциальную емкость контейнера.

В [10] авторы также применяют стратегию модуляции квантования, но при этом встраиваемая информация представлена набором бинарных последовательностей ЦВЗ. Векторная карта разбивается на блоки заданного размера, и для каждого блока формируется и встраивается соответствующий битовый вектор.

Еще одной стратегией встраивания ЦВЗ является непосредственное изменение значений координат вершин путем внесения небольших погрешностей в зависимости от значения бита ЦВЗ [11].

В [12] данная стратегия реализуется на основе поблочного встраивания ЦВЗ. Сначала производится адаптивное разбиение карты на прямоугольные области таким образом, чтобы достичь требуемой плотности вершин внутри каждой из них. Затем короткое бинарное сообщение повторно встраивается в координаты вершин, принадлежащих полученным областям разбиения, за счет внесения погрешностей непосредственно в координатные значения.



Большинство существующих методов встраивания ЦВЗ в векторные данные направлено на решение одной из задач обеспечения безопасности векторных данных: защиту от несанкционированного распространения (защиту авторских прав) или защиту от изменений. Подход, позволяющий одновременно обеспечивать защиту авторских прав и защиту подлинности векторных данных, носит название составного встраивания ЦВЗ. При реализации данного подхода часть вершин (например, характерные точки) выбирается в качестве контейнера для стойких ЦВЗ, а оставшиеся вершины – для хрупких ЦВЗ (т.е. таких ЦВЗ, которые будут разрушены при несанкционированных изменениях). Такой подход предложен, например, в [13], он позволяет детектировать изменение векторных объектов, а также их добавление или удаление.

Очевидно, сохранение точности значений координат после встраивания ЦВЗ является критическим вопросом в данной предметной области и ключевой проблемой перечисленных методов, поскольку внесение даже незаметных на первый взгляд погрешностей может отрицательно сказаться на практической пригодности векторной карты (например, кадастровая карта с неверными границами участков потеряет свою ценность).

В этой связи в работах [14-17] были предложены методы обратимого встраивания ЦВЗ: данный подход позволяет сохранить точность исходных данных путем их восстановления после извлечения ЦВЗ. Поскольку после процедуры восстановления исходной карты встроенный ЦВЗ будет полностью удален, такой подход к встраиванию пригоден только для защищенной передачи и не подходит для защищенного хранения данных.

Кроме того, все перечисленные методы обладают еще одним существенным недостатком: защитная информация, внесенная в наименее значимые биты координат, представленных дробными числами, может быть удалена при экспорте векторных данных в другой формат.

Ранее в [18] авторами настоящей статьи был предложен новый подход к неискажающему встраиванию защитной информации – шумоподобных ЦВЗ [19] – в векторные картографические данные, основанный на циклическом сдвиге вершин полигональных графических объектов карты и последующей интерпретации центров тяжести полигонов как случайного множества пикселей растрового изображения, наложенного на карту и несущего ЦВЗ. Данный подход не предполагает внесение изменений в координатную информацию, что является его основным преимуществом перед известными методами.

Работа [18] посвящена преимущественно теоретическому описанию формирования шумоподобных изображений и глубокому ис-

следованию информационной емкости метода с простейшим алгоритмом детектирования амплитудных пиков.

Предложенный подход исследуется в задаче защиты авторских прав: повышена стойкость метода к преобразованиям с помощью введения нового детектора последовательностей ЦВЗ. Кроме того, приведено сравнение с методом [18] по критерию информационной емкости. В отличие от исследований в [18] эксперименты проведены не на одной карте, а на наборе карт различного размера, что позволяет более рационально подбирать параметры метода в зависимости от размера карты и выбранного детектора. Помимо информационной емкости, исследованы стойкость и вычислительная сложность предложенного метода. Показано, что полученный метод встраивания ЦВЗ может применяться для решения задачи защиты авторских прав.

В разделе 2 коротко описаны идеи предлагаемого подхода к встраиванию ЦВЗ в векторные данные. Раздел 3 посвящен описанию алгоритма формирования шумоподобного изображения на основе битовой последовательности ЦВЗ и алгоритма извлечения такой последовательности соответственно. В разделах 4-6 приведены результаты экспериментальных исследований метода по различным критериям качества.

**2. Краткое описание предложенного подхода.** В качестве контейнера для встраивания ЦВЗ используется множество объектов полигонального типа. Каждый полигон представляет собой замкнутый объект (многоугольник), который может быть однозначно определен списком координат последовательно пронумерованных вершин. Таким образом, циклический сдвиг списка вершин полигона не повлияет на значения их координат. Эта идея есть суть предлагаемого подхода к встраиванию ЦВЗ без внесения искажений в координатную информацию.

В качестве ЦВЗ предлагается использовать растровое изображение, наложенное на выбранный фрагмент векторного слоя путем разбиения карты на прямоугольные ячейки и отображения полученного разбиения на сетку пикселей раstra.

В каждый полигон будет встроена тот пиксель, в котором расположен центр тяжести этого полигона. Очевидно, далеко не все пиксели будут встроены в векторную карту. В этой связи необходимо обеспечить возможность восстановить изображение ЦВЗ по заданному набору пикселей и при этом однозначно верифицировать восстановленный ЦВЗ. Процедура проверки чаще всего требует визуального или корреляционного сопоставления с эталоном, а также дальнейшего анализа полученных результатов.

Для того чтобы упростить процедуру верификации ЦВЗ, предлагается синтезировать шумоподобные сигналы, которые кодируют

битовый ЦВЗ в виде синусоидальных функций и тем самым отображают бинарную последовательность в растровое изображение, непосредственно встраиваемое в защищаемые данные. Таким образом, на этапе проверки будет анализироваться не само извлеченное изображение ЦВЗ, а скрытая в нем последовательность.

Полученные шумоподобные изображения ЦВЗ обеспечивают устойчивость скрытой в них битовой последовательности при различных искажениях, в том числе при интерполяции. Это обусловлено тем фактом, что после внесенных изменений (в том числе значительных) сохраняется амплитудный спектр, сформированный на этапе построения изображения ЦВЗ.

Шумоподобный ЦВЗ встраивается в векторную карту на основе циклического сдвига вершин полигонов следующим образом.

Сначала рассчитываются координаты ограничивающего прямоугольника  $x_{\min}, y_{\min}, x_{\max}, y_{\max}$ , и для каждого  $i$ -того объекта карты вычисляется отображение следующего вида:  $x_i, y_i \rightarrow n_1, n_2$ :

$$n_1 = \frac{x_i - x_{\min}}{step_X}, n_2 = \frac{y_{\max} - y_i}{step_Y}, step_X = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}, step_Y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N}.$$

Затем для каждого полигона выполняется следующая процедура:

- а) рассчитываются координаты центра тяжести  $x_{ci}, y_{ci}$ ;
- б) на основе положения центра тяжести определяются координаты пикселя, который будет встроен в полигон;
- в) число вершин полигона  $V_p$  представляется в виде  $V_p \geq 2^{b-1}$ , после чего выбираются  $b$  старших бит значения пикселя (число для встраивания);
- г) старший бит вносимого двоичного числа встраивается путем задания направления считывания вершин: по часовой стрелке или наоборот (данный шаг не является обязательным, однако позволяет значительно повысить стойкость метода к атакам переупорядочивания вершин);
- д) из центра тяжести проводятся  $(b-1)^2$  равноотстоящих луча и маркируются  $(b-1)$ -битными числами;
- е) для каждой вершины полигона определяется угловое расстояние  $[0, 359^\circ]$  относительно луча, направленного на север;
- ж) список вершин полигона циклически сдвигается до тех пор, пока вершина, ближайшая к лучу со встраиваемым числом, не окажется первой.

На рисунке 1 представлен пример встраивания в полигон трех бит информации. Поскольку представленный векторный объект явля-

ется четырехугольником, то чтобы извлечь ЦВЗ без ошибок, необходимо внести в полигон не более трех бит информации: два бита – путем циклического сдвига номеров вершин, и один бит – путем задания направления обхода вершин полигона.

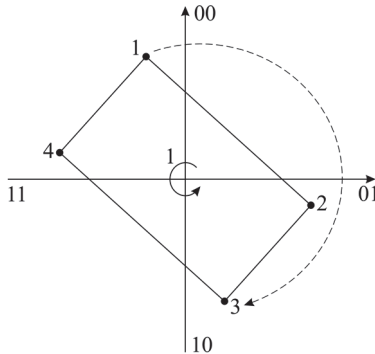


Рис. 1. Пример встраивания трех бит информации в полигональный объект

При извлечении информации, скрытой внутри векторной карты, для каждого полигона определяется пространственная ориентация первой вершины. Старший бит определяется в соответствии с обходом вершин (если этот шаг не был пропущен при встраивании).

На рисунке 2 представлен пример извлечения из полигона трех бит информации.

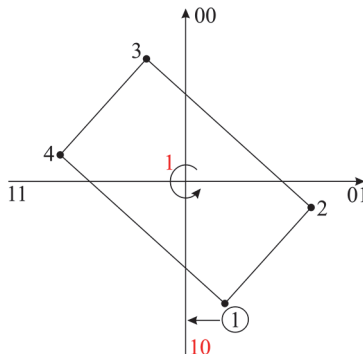


Рис. 2. Пример извлечения трех бит информации из полигонального объекта

Аналогично встраиванию карта отображается на изображении (изначально пустое). Извлеченные из полигонов значения при-

сваиваются значениям яркости пикселей, соответствующих центроидам. Пиксели, огрубленные на этапе встраивания, приводятся к 8-битным значениям. Ячейки, оставшиеся пустыми, восстанавливаются методом ступенчатой интерполяции на основе триангулированной нерегулярной сети [20]. Подробное исследование алгоритмов встраивания и извлечения приведено в [21].

**3. Формирование изображения ЦВЗ.** В качестве ЦВЗ предлагается использовать шумоподобное изображение размером  $N_1 \times N_2$ , формируемое путем синтеза комплексного спектра на основе некоторой двоичной последовательности длины  $L$  (первичного ЦВЗ, служащего в качестве проверочной информации в процессе извлечения). Спектр шумоподобного изображения представляет собой набор дельта-импульсов, расположенных на двух кольцах в двумерной плоскости. Порядок импульсов кодирует бинарную последовательность ЦВЗ: «нули» помещаются на внутреннем круге радиуса  $r$ , а «единицы» – на внешнем круге радиуса  $r + \Delta r$ . Все импульсы расположены с определенным шагом, кроме специальной метки синхронизации, которая сигнализирует о начале последовательности: метка содержит два импульса, расположенных без отступа по углу.

Процедура формирования пространственного спектра для последовательности  $\mathbf{S} = s_1 \dots s_L = \{101101001011101\}$  проиллюстрирована на рисунке 3.

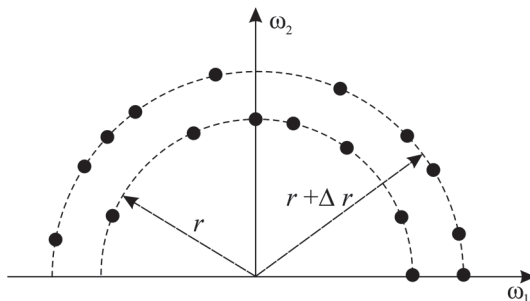


Рис. 3. Синтез спектра шумоподобного сигнала [18]

Очевидно, шумоподобное изображение ЦВЗ, которое впоследствии будет встроено в векторную карту, вычисляется с помощью двумерного обратного дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Например, в результате обратного ДПФ спектра на рисунке 3 вычислено изображение, представленное на рисунке 4.

Для обеспечения непредсказуемости шумоподобных изображений, синтезируемых для некоторой битовой последовательности, предложено формировать комплексный спектр, задавая значения дельта-импульсов с помощью датчика случайных чисел (ДСЧ):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(u_l, v_l) &= \cos(\operatorname{rand}(90)), \\ \operatorname{Im} F(u_l, v_l) &= \sin(\operatorname{rand}(90)). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_l = (r + s_l \Delta r) \times \cos \frac{\pi l}{L+1}$ ,  $v_l = (r + s_l \Delta r) \times \sin \frac{\pi l}{L+1}$ ,  $1 \leq l \leq L+1$ ,  $\operatorname{rand}(90)$  – псевдослучайное число, значение которого лежит в диапазоне  $[0, 90]$ .

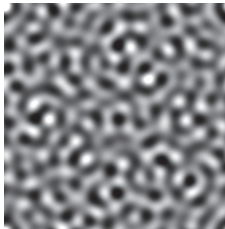


Рис. 4. Изображение ЦВЗ ( $r=8$ ,  $\Delta r=4$ )

Таким образом, даже если в качестве ЦВЗ для целого набора карт будет выбрана одна и та же битовая последовательность, порождаемые для каждой карты изображения будут разными.

Очевидно, для извлечения последовательности ЦВЗ необходимо перейти к спектру извлеченного шумоподобного изображения и определить, какие компоненты имеют наибольшую амплитуду (являются импульсами, кодирующими биты ЦВЗ). Алгоритмы формирования изображения ЦВЗ и извлечения скрытой битовой последовательности подробно описаны в [18].

Степень стойкости зависит, в первую очередь, от алгоритма детектирования амплитудных пиков. В исследовании [18] применялся простейший детектор пиков, основанный на эвристическом предположении о том, что амплитудный пик превышает половину максимума модуля спектра Фурье. В данной работе будем называть его «детектор на основе пороговой обработки». Такой детектор не учитывает тот факт, что при сильных искажениях (особенно при кадрировании) спектральные характеристики могут меняться, например, в силу элайзинга (эффекта наложения спектральных составляющих).

В настоящей статье улучшены показатели стойкости к искажениям, а именно достигнута возможность кадрирования до 43% контейнера, содержащего ЦВЗ. Данные показатели были достигнуты путем разработки нового алгоритма детектирования амплитудных пиков спектра Фурье на основе локальной фильтрации, в котором используется скользящее окно размером  $3 \times 3$ .

Внутри локального окна вычисляются локальные максимумы модуля ДПФ:

$$|F(k_1, k_2)| = 0, \text{ если } |F(k_1, k_2)| < \max_{m_1, m_2} |F(k_1 + m_1, k_2 + m_2)|, m_1, m_2 = \overline{-1, 1}.$$

Полученные значения максимумов сортируются по убыванию:  $2 \times (L+2)$  наибольших значения есть искомые импульсы.

Экспериментально установлены минимальные параметры для работоспособности данного алгоритма детектирования:  $r \geq 0,83 L$ ,  $\Delta r = 8$ .

**4. Исследование информационной емкости.** В [18] исследованы потенциальные возможности использования шумоподобных изображений для решения задачи защиты векторных карт. При этом, как уже было отмечено ранее, вычислительные эксперименты были проведены только для детектора на основе пороговой обработки.

В данной работе повторим эксперимент по моделированию погрешностей (эксперимент 1) для детектора на основе локальной фильтрации и сравним полученные для разных детекторов результаты, а также расширим эксперимент на реальных данных (эксперимент 2) путем увеличения тестового набора и представим результаты, полученные для обоих детекторов.

Для формирования тестовых наборов ЦВЗ были сгенерированы 100 псевдослучайных последовательностей, на основе которых для каждого сочетания параметров синтезировались шумоподобные изображения. Поскольку, как было показано ранее, параметры минимальных радиусов влияют на работоспособность алгоритмов детектирования спектральных импульсов, тестовые наборы формировались согласно выдвигаемым ограничениям.

*Эксперимент 1.* Данный эксперимент направлен на моделирование искажений, вносимых в изображение ЦВЗ предлагаемым методом встраивания в полигоны векторного слоя. Как уже было отмечено, в силу особенностей предлагаемого подхода к неискажающему встраиванию, изображение ЦВЗ не может быть встроено целиком: векторная карта с ЦВЗ будет содержать только некоторую долю всех пикселей. При этом значение каждого встраиваемого пиксе-

ля огрубляется до нескольких старших бит в зависимости от числа вершин полигона-контейнера.

Данный эксперимент направлен на оценку устойчивости шумоподобного ЦВЗ к перечисленным искажениям. Для этого изображение ЦВЗ размером  $N_1 \times N_2 = 512 \times 512$  подвергалось преобразованию квантования на  $2^b$  уровней, после чего каждый пиксель принимал значение  $b$ -разрядного двоичного числа. Далее с помощью ДСЧ выбиралось заданное число пикселей  $K$ , моделирующее количество полигональных объектов на карте. Затем по выбранному набору пикселей строилась триангуляция Делоне, на основе которой прореженные изображения восстанавливались методом ступенчатой интерполяции. После этого производилась попытка извлечения битовой последовательности. Оценка вероятности правильного извлечения  $p$  рассчитывалась по всему тестовому набору как доля изображений (из ста), для которых последовательность ЦВЗ была извлечена без ошибок.

Рисунок 5 демонстрирует результаты эксперимента, проведенного для детектора на основе локальной фильтрации. Представлена зависимость вероятности правильного извлечения от числа опорных пикселей при различных значениях разрядности  $b$ . Результаты аналогичного эксперимента для детектора на основе пороговой обработки приведены в [18].

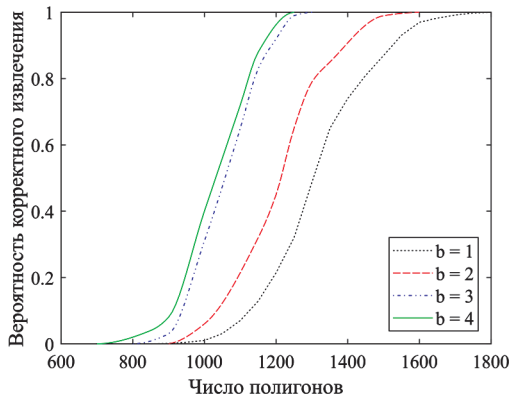
Количество опорных точек, моделирующих объекты векторной карты, очевидно, влияет на точность извлечения битовой последовательности. Чем больше размер карты, тем больше потенциальная длина встраиваемого двоичного слова. Погрешность квантования уменьшается с ростом разрядности пикселей, однако для  $b > 3$  эффект повышения качества значительно замедляет свой рост.

На рисунке 6 приведено сравнение двух детекторов по критерию информационной емкости, вычисляемой как  $b \times L$ : представлены графики зависимостей емкости от числа опорных пикселей при различных значениях вероятности  $p$ . При этом параметр  $b=3$  фиксирован.

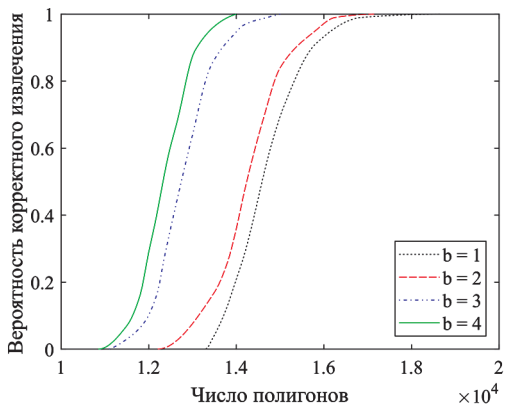
Согласно результатам, представленным на рисунке 6, оба детектора обеспечивают точное извлечение встроенной последовательности ЦВЗ. Однако в случае детектора на основе локальной фильтрации минимально необходимое число пикселей значительно больше.

Дело в том, что в силу ограничений, накладываемых на минимальные значения радиусов синтезируемых спектральных колец, изображения ЦВЗ, формируемые для этого детектора, представляют собой более высокочастотные сигналы, и для их корректной интерполяции требуется больше опорных точек.

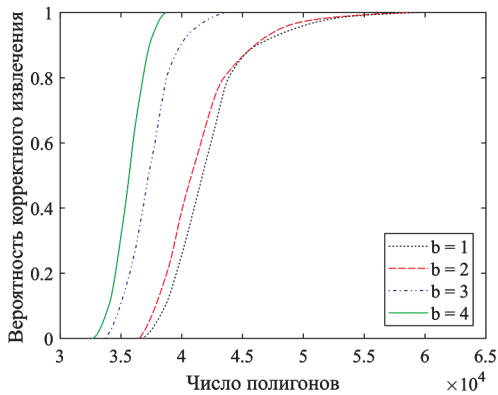




(а)

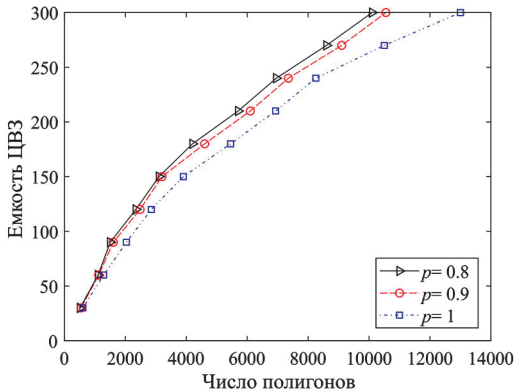


(б)

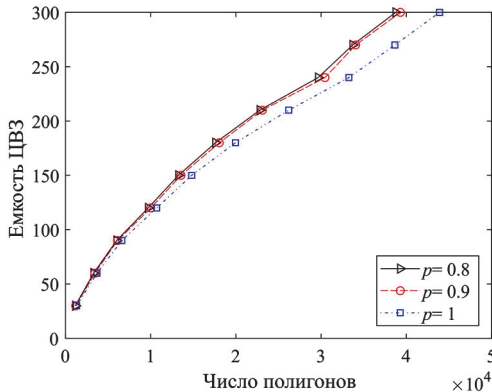


(в)

Рис. 5. Вероятность корректного извлечения а)  $L = 10, r = 10$ ; б)  $L = 50, r = 60$ ;  
в)  $L = 100, r = 116$



(a)



(б)

Рис. 6. Информационная емкость: а) детектор на основе пороговой обработки; б) детектор на основе локальной фильтрации

*Эксперимент 2.* В отличие от предыдущего эксперимента, моделирующего потенциальные искажения, в настоящем эксперименте исследуется процесс встраивания в реальные картографические данные.

В качестве тестового набора использованы фрагменты карт городской застройки различного размера  $P$ : от 1000 до 100000 полигональных объектов.

Размеры встраиваемых изображений ЦВЗ, в зависимости от размера векторной карты, приведены в таблице 1.

Эксперимент направлен на анализ искажений, вносимых при встраивании в карты, относительно модельного случая из предыдущего эксперимента путем вычисления вероятности правильного извлечения для трех случаев:

1. Квантование всех пикселей изображения производится по фиксированному уровню. Опорные точки для интерполяции расставляются равномерно с помощью ДСЧ (аналогично эксперименту 1).

2. Квантование всех пикселей изображения производится по фиксированному уровню. Для интерполяции строится нерегулярная сеть, отображающая центры полигонов векторной карты (рис. 7). Этот случай направлен на демонстрацию погрешностей, вносимых при проецировании изображения ЦВЗ и его дальнейшей интерполяции.

3. Встраивание ЦВЗ в реальные картографические данные. Значение каждого пикселя квантуется в зависимости от числа вершин полигона, в который этот пиксель будет встроен. Этот случай позволит продемонстрировать влияние распределения вершин полигонов на результат извлечения.

Таблица 1. Требования к размерам встраиваемых изображений

Размер карты, полигонов	Размер встраиваемого ЦВЗ, пикселей
1000 – 30000	512×512
30000 – 80000	1024×1024
от 80000 – 100000	2048×2048

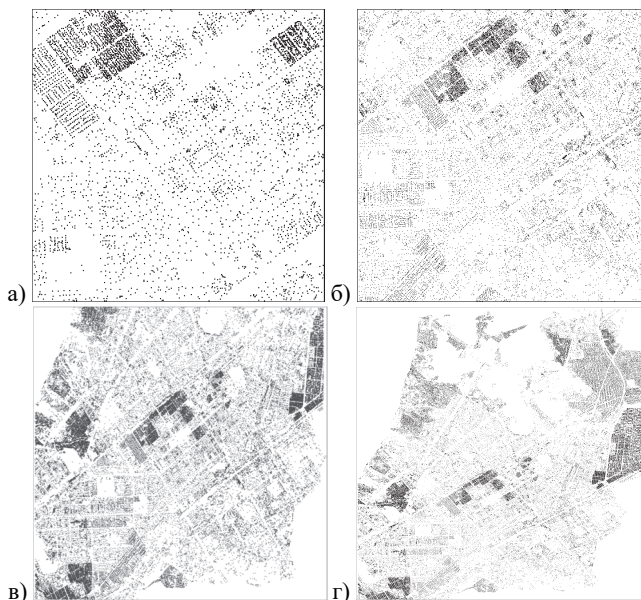


Рис. 7. Точечное представление векторной карты (нерегулярная сеть): а) 5 тыс. полигонов; б) 20 тыс. полигонов; в) 60 тыс. полигонов; г) 100 тыс. полигонов

Согласно предлагаемому подходу к неискажающему встраиванию, внесение  $b$ -бит информации в полигон без погрешностей возможно при условии, что данный полигон состоит как минимум из  $2^{b-1}$  вершин. Поскольку исследуемый тестовый набор векторных данных представлен картами городской застройки, встраивание пяти и более бит в каждый полигон маловероятно, так как подавляющее большинство векторных объектов (городских зданий) содержит менее 16 вершин. По результатам предыдущего эксперимента, наиболее вероятные случаи  $b=3$  и  $b=4$  практически идентичны. Таким образом, далее встраивание в реальные карты будет сравниваться с результатами моделирования случая  $b=3$ .

Для данного эксперимента были сформированы наборы шумоподобных ЦВЗ для обоих детекторов: 100 изображений для каждого значения  $L$ , варьируемого в диапазоне  $L = 10, 100$ .

Зависимости вероятности корректного извлечения двоичной последовательности ЦВЗ от размера контейнера для детектора на основе пороговой обработки приведены на рисунке 8.

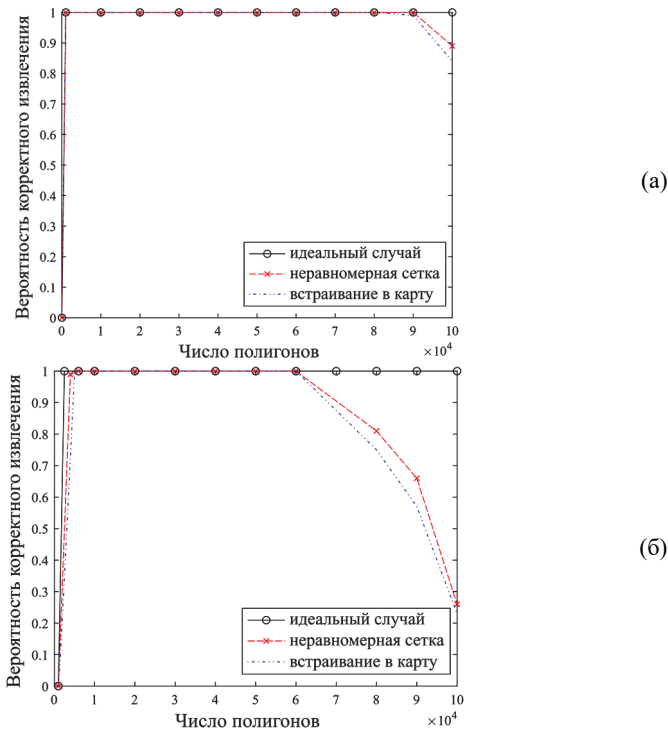
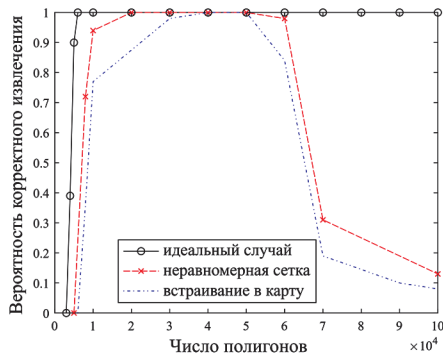
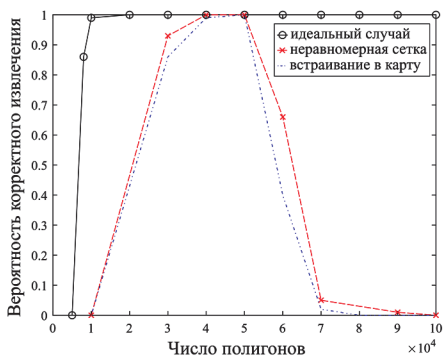


Рис. 8. Вероятность корректного извлечения для детектора на основе пороговой обработки: а)  $L = 10$ ; б)  $L = 30$ ;



(в)



(г)

Рис. 8. Вероятность корректного извлечения для детектора на основе пороговой обработки: в)  $L = 60$ ; г)  $L = 80$

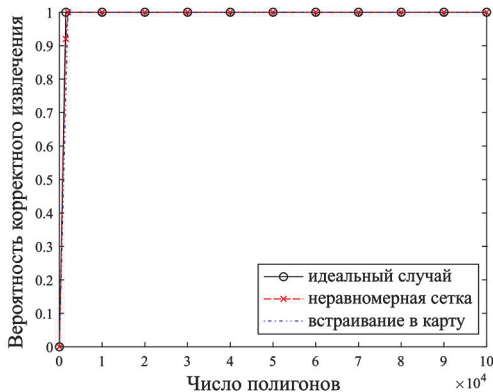
По результатам эксперимента 1, качество извлечения ЦВЗ растет с числом объектов на карте. Однако апробация на реальных данных показала, что увеличение размера карты может отрицательно повлиять на корректность извлечения. Схожее поведение синей и красной кривых на графиках позволяет сделать вывод о том, что ошибки возникают в силу неравномерности расположения опорных точек при интерполяции. В действительности, согласно рисунку 7, для случаев  $P \geq 60000$  нерегулярные сетки, моделирующие расположение объектов на карте, заполнены неравномерно.

Крупные пустые области по краям значительно влияют на качество восстановления изображения ЦВЗ методами интерполяции. Во избежание возникновения подобных ошибок извлечения большие карты целесообразно разбивать на фрагменты.

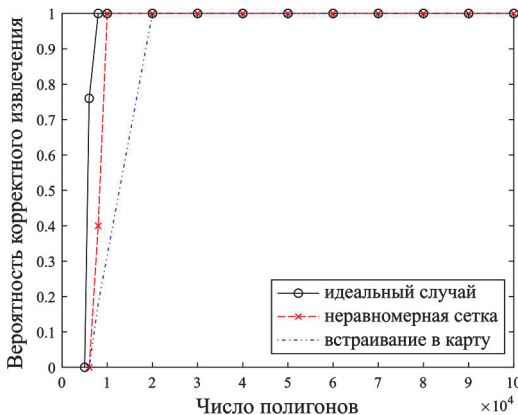
Сложность извлечения последовательности ЦВЗ также возрастает с ростом  $L$ . В случае  $L \geq 90$  корректно извлечь скрытую информацию из реальных картографических данных не удалось.

Зависимости вероятности корректного извлечения двоичной последовательности ЦВЗ от размера контейнера для детектора на основе локальной фильтрации приведены на рисунке 9.

Согласно графикам при  $L \leq 30$  неравномерное расположение объектов на карте при больших значениях  $P$  не повлияло на качество извлечения, что свидетельствует о более высокой устойчивости данного детектора к погрешностям интерполяции. Однако, аналогично результатам эксперимента 1 информационная емкость детектора на основе локальной фильтрации оказалась ниже. Максимальная длина извлеченной корректно последовательности составляет  $L = 60$ .

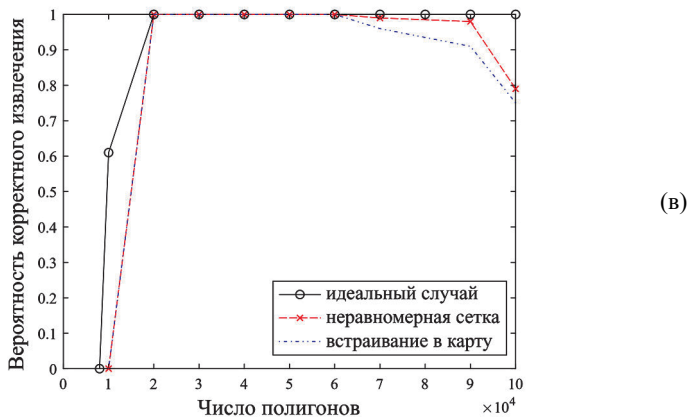


(a)

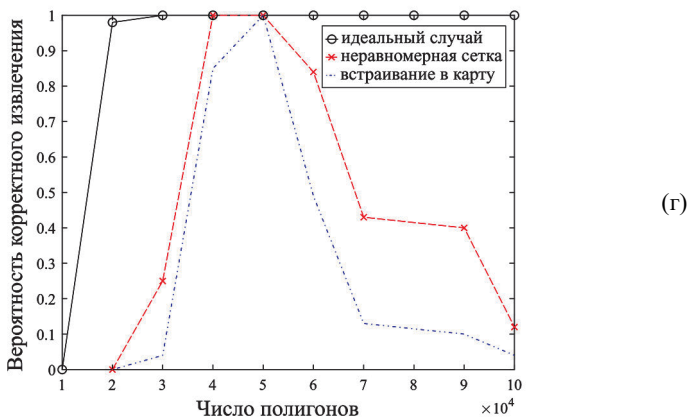


(б)

Рис. 9. Вероятность корректного извлечения для детектора на основе локальной фильтрации: а)  $L = 10$ ; б)  $L = 30$



(в)



(г)

Рис. 9. Вероятность корректного извлечения для детектора на основе локальной фильтрации: в)  $L = 40$ ; г)  $L = 60$

**5. Исследование стойкости к преобразованиям.** Несмотря на то, что детектор на основе пороговой обработки по результатам двух экспериментов демонстрирует повышенную информационную емкость, данный алгоритм не может использоваться в составе метода защиты авторских прав на картографические данные, поскольку, как было отмечено ранее, не является стойким к кадрированию, а также недостаточно устойчив к интерполяции по нерегулярной сетке. С другой стороны, данный детектор может найти применение в ряде задач, требующих встраивания большого объема информации, например, задаче аутентификации векторных данных.

Таким образом, в настоящей работе для решения задачи защиты авторских прав на векторные данные предлагается использовать метод встраивания ЦВЗ, включающий алгоритм детектирования на основе локальной фильтрации.

Далее приведено исследование стойкости полученного метода встраивания ЦВЗ к возможным преобразованиям векторных карт, которое позволит сделать выводы о его применимости для решения поставленной задачи. Эксперимент представляет собой оценку максимально возможных искажений контейнера, при которых последовательность ЦВЗ может быть извлечена без ошибок.

Сначала приведем доказательство стойкости к геометрическим преобразованиям сдвига и масштабирования, построенное на инвариантности отображения растрового изображения на векторную карту относительно данных преобразований. Напомним, что построение такого отображения начинается с построения ограничивающего прямоугольника векторной карты и его разбиения на двумерную сетку, после чего пиксели изображения отображаются на те векторные объекты, центры которых находятся в соответствующей ячейке прямоугольного разбиения. Далее показано, что при сдвиге карты или изменении ее масштаба координаты центра и координаты ограничивающего прямоугольника изменяются пропорционально, что обеспечивает свойство инвариантности.

1. *Сдвиг.* При сдвиге карты на  $\Delta x$  по горизонтальной оси и на  $\Delta y$  по вертикальной оси координаты каждого ( $i$ -того) полигона изменятся на соответствующую величину:  $x_{ci} + \Delta x, y_{ci} + \Delta y$ .

Изменяются и координаты ограничивающего прямоугольника:  $x_{\min} + \Delta x, y_{\min} + \Delta y, x_{\max} + \Delta x, y_{\max} + \Delta y$ .

Отображение изображения на карту (см. раздел 2) примет вид: 
$$\frac{x_i + \Delta x - (x_{\min} + \Delta x)}{step_X} = \frac{x_i - x_{\min}}{step_X}, \quad \frac{y_{\max} + \Delta y - (y_i + \Delta y)}{step_Y} = \frac{y_{\max} - y_i}{step_Y},$$
 что совпадает с исходным отображением.

2. *Масштабирование.* При изменении масштаба карты в  $k_{sc}$  раз соответственно изменятся и координаты каждого ( $i$ -того) полигона:  $k_{sc} \cdot x_{ci}, k_{sc} \cdot y_{ci}$ . Координаты ограничивающего прямоугольника также будут умножены на коэффициент масштабирования:  $k_{sc} \cdot x_{\min}, k_{sc} \cdot y_{\min}, k_{sc} \cdot x_{\max}, k_{sc} \cdot y_{\max}$ .

Тогда отображение изображения ЦВЗ на карту примет вид: 
$$\frac{k_{sc} \cdot x_i - k_{sc} \cdot x_{\min}}{k_{sc} \cdot step_X} = \frac{x_i - x_{\min}}{step_X}, \quad \frac{k_{sc} \cdot y_{\max} - k_{sc} \cdot y_i}{k_{sc} \cdot step_Y} = \frac{y_{\max} - y_i}{step_Y},$$
 что совпадает с исходным отображением.



Для экспериментальной оценки стойкости метода к атакам были смоделированы возможные злоумышленные преобразования. Как и в предыдущем эксперименте, тестовый набор содержит векторные карты городской застройки различного размера. В каждую карту последовательно встраивались 100 изображений ЦВЗ, сформированных для последовательностей длины  $L = 10$  ( $r = 10$ ). Карта со встроенным ЦВЗ подвергалась преобразованию заданной степени, после чего оценивалась вероятность корректного извлечения ЦВЗ. Максимально допустимой будем полагать ту степень преобразования, при которой последовательность ЦВЗ была извлечена без ошибок из всех 100 изображений.

**3. Поворот.** В настоящем эксперименте каждая карта из тестового набора поворачивалась относительно центра на заданный угол. При повороте меняются координаты минимумов и максимумов по обеим осям (т.е. меняется ограничивающий прямоугольник). Извлеченное изображение ЦВЗ при этом представляет собой повернутое отображение векторной карты внутри нового ограничивающего прямоугольника. В связи с этим на краях изображения могут возникнуть пустые области, которые необходимо кадрировать, чтобы избежать ошибок интерполяции.

Результаты эксперимента представлены в таблице 2. Согласно полученным результатам предложенный метод демонстрирует устойчивость к повороту при размере карты  $P \geq 3000$  полигонов. Для больших карт максимальный угол поворота достигает  $25^\circ$ .

**4. Кадрирование.** Преобразование кадрирования смоделировано путем обрезки изображения, извлеченного из векторной карты. При этом центр кадрируемого фрагмента может либо совпадать с центром изображения, либо быть выбран произвольно.

Таблица 2. Максимально допустимый угол поворота для карт различного размера

Число полигонов	2000	3000	4000	6000	8000	10000	20000	50000	100000
Угол, °	0	5	5	15	20	20	25	25	25

Результаты эксперимента представлены на рисунке 10. В качестве параметра стойкости выбран коэффициент  $k_{cr} = 1 - \frac{N_{cr} \times N_{cr}}{N \times N}$ . Здесь  $N_{cr} \times N_{cr}$  – размер изображения ЦВЗ после кадрирования.

Из рисунков видно, что для карт  $P \leq 50000$  метод демонстрирует устойчивость к кадрированию независимо от положения кадрируемого фрагмента.

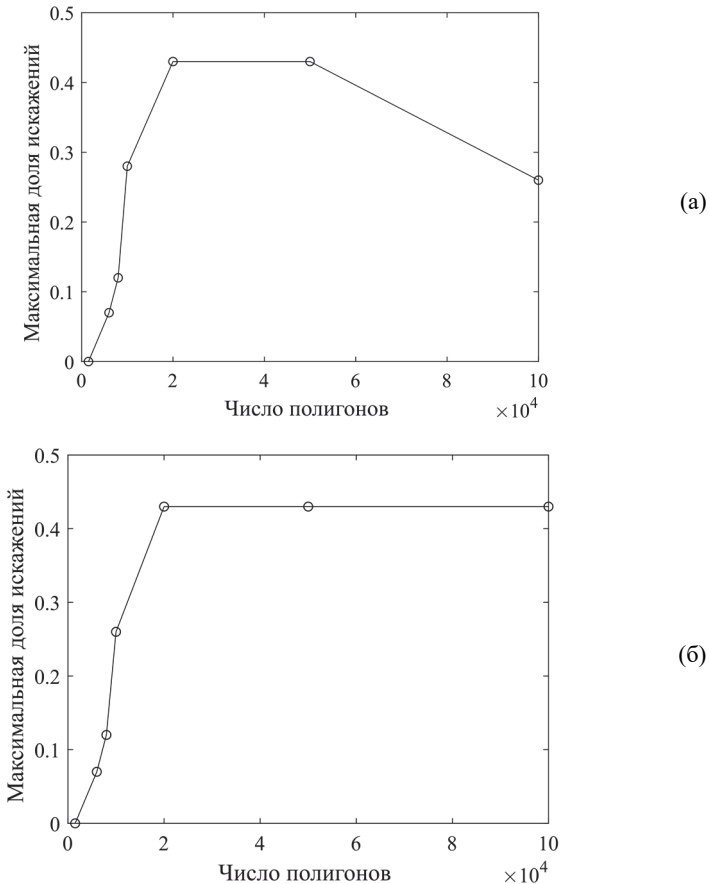


Рис. 10. Максимально допустимая доля кадрирования для карт различного размера: а) кадрирование относительно произвольной точки; б) кадрирование относительно центра изображения

Небольшое падение кривой на рисунке 10а обусловлено тем, что при обрезке карты относительно случайной точки полученный фрагмент может включать пустые территории, которые, как уже было отмечено выше, присутствуют на тестовых картах размером  $P \geq 60000$ .

Стоит отметить, что при размере карт  $20000 \leq P \leq 50000$  коэффициент  $k_{cr}$  достигает 43% при любом положении вырезаемого фрагмента.

5. *Добавление объектов.* Данная атака была смоделирована путем добавления случайных пикселей в пустые ячейки извлеченного изображения ЦВЗ.

На рисунке 11 представлена зависимость максимально допустимого коэффициента  $k_{add} = \frac{P_{add}}{P}$  от размера карты  $P$ . Здесь  $P_{add}$  – количество объектов на карте после осуществления атаки.

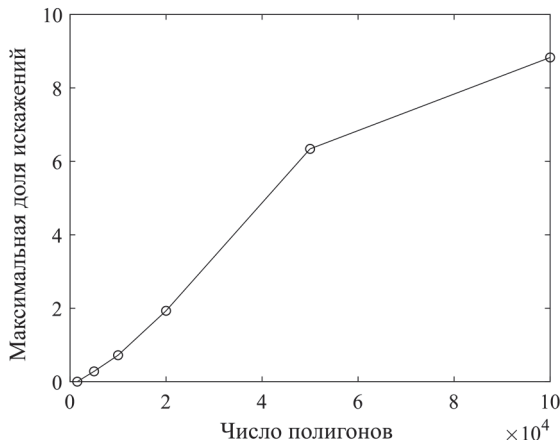


Рис. 11. Максимально допустимая доля добавленных объектов для карт различного размера

Согласно рисунку 11 коэффициент  $k_{add}$  растет с увеличением числа полигонов на карте. Например, при  $P = 20000$  коэффициент достигает значения  $k_{add} = 1,93$ , что означает добавление объектов, почти в два раза превышающих исходное число объектов на карте. Очевидно, после такой атаки векторная карта полностью потеряет свою ценность, а значит, невыгодна злоумышленнику.

6. *Удаление объектов.* Данная атака была смоделирована путем удаления заданной доли случайно выбранных полигонов.

На рисунке 12 представлена зависимость максимально допустимого коэффициента  $k_{del} = \frac{P_{del}}{P}$  от размера карты  $P$ . Здесь  $P_{del}$  – количество объектов на карте после осуществления атаки.

Кривая на рисунке 12 демонстрирует быстрый рост коэффициента  $k_{del}$ . Например, для  $P = 3000$  коэффициент достигает значения

$k_{del} = 0,29$ , то есть в результате данной атаки почти треть всех полигонов карты будет удалена. Поскольку попытка удаления ЦВЗ путем удаления объектов значительно повлияет на практическую ценность карты, можно заключить, что исследуемый метод является устойчивым к удалению объектов.

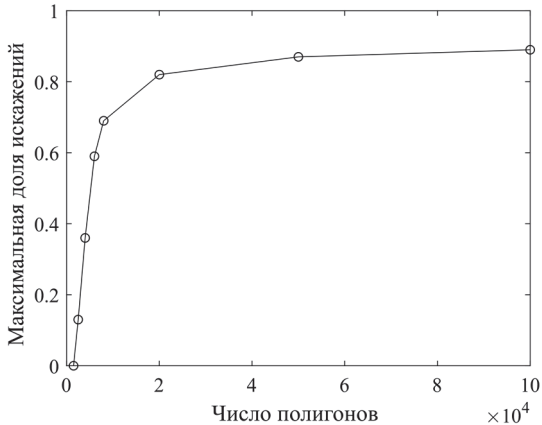


Рис. 12. Максимально допустимая доля удаленных объектов для карт различного размера

7. *Добавление вершин.* Данная атака смоделирована таким образом, чтобы при добавлении вершины на векторный объект его форма изменялась незначительно и оставалась естественной. Для этого случайно выбранные полигоны векторной карты подвергались преобразованию по следующему алгоритму.

На произвольно выбранном ребре полигона с координатами  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ,  $x_1 \leq x_2$  выбирается случайная точка  $(x_{edge}, y_{edge})$ ,  $x_{edge} = x_1 + x_{shift}$ ,  $y_{edge} = k_{edge} \cdot x_{edge} + b_{edge}$ .

$$\text{Здесь } x_{shift} = \text{random}(0, x_2 - x_1), \quad k_{edge} = \begin{cases} \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}, & x_2 \neq x_1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$b_{edge} = y_2 - k_{edge} \cdot x_2.$$

В результате вычисляются координаты новой вершины:  $(x_{edge}, y_{edge} + y_{shift})$ ,  $y_{shift} = \text{random}(0, \frac{y_2 - y_1}{100})$ .

В качестве параметра стойкости выбран коэффициент  $k_{vertadd} = \frac{V_{add}}{V}$ , где  $V$  – общее число вершин на карте, а  $V_{add}$  – число добавленных вершин.

Исследование показало, что последовательность ЦВЗ извлекается без ошибок даже в случае  $k_{vertadd} = 10000$ , то есть предлагаемый метод является стойким к атаке добавления вершин. Такой результат возникает вследствие особенностей предлагаемого подхода к встраиванию информации в полигональные объекты: во-первых, наибольшие значащие биты изображения ЦВЗ встраиваются путем изменения направления считывания вершин, которое, очевидно, не изменится при их добавлении. Во-вторых, несмотря на то что остальные биты ЦВЗ кодируются местоположением первой вершины, искусственно добавленные вершины должны быть расположены близко к остальным, в противном случае форма полигонального объекта будет сильно искажена. Таким образом, даже если добавленная вершина окажется первой в списке вершин, биты ЦВЗ будут извлечены верно, поскольку положение первой вершины относительно центра полигона практически не изменится.

8. *Удаление вершин.* Очевидно, если случайно удалять произвольные вершины, то многоугольные полигональные объекты могут стать треугольными: такая атака вряд ли будет реализована злоумышленником, поскольку в его интересах сохранить вид карты, близкий к первоначальному. В связи с этим при моделировании данной атаки множество вершин, которые потенциально можно удалить, было ограничено: данному преобразованию подвергались только полигоны, содержащие как минимум шесть вершин.

Суть данной атаки заключается в следующем: если произвольно выбранный полигон состоит из достаточного количества вершин, то одна из вершин, выбранная с помощью ДСЧ, удаляется. Если в случайно выбранном полигоне осталось менее 6 вершин, то этот объект пропускается.

В таблице 3 перечислены максимально допустимые коэффициенты  $k_{vertdel} = \frac{V_{del}}{V}$  в зависимости от количества объектов на карте. Здесь  $V$  – общее число вершин на карте, а  $V_{del}$  – число удаленных вершин.

Очевидно, что в силу накладываемого ограничения вершины можно удалять только до тех пор, пока на карте есть многоугольники с шестью и более вершинами, то есть величина  $k_{vertdel}$  ограничена сверху.

Таблица 3. Максимально допустимая доля удаленных вершин для карт различного размера

Число полигонов	2000	2500	3000	4000	8000	10000	20000	50000	10000
$k_{veridel}$	0	0.2	0.2	+	+	+	+	+	+

Согласно полученным результатам  $k_{veridel}$  достигает максимума уже при  $P \geq 4000$  (в таблице отмечено «+»), то есть предлагаемый метод является в полной мере устойчивым к атаке удаления вершин.

9. *Переупорядочение вершин.* Атака переупорядочивания вершин может быть реализована двумя способами: злоумышленник может либо сдвинуть вершины в списке на произвольную случайную величину (атака первого типа), либо хаотически задать направление обхода вершин для каждого полигона (атака второго типа).

Как было показано в разделе 2, встраивание информации в полигон реализуется как за счет сдвига порядка вершин, так и путем изменения направления их обхода (по часовой или против часовой стрелки в зависимости от старшего бита).

Моделирование обоих типов атаки переупорядочивания показало, что при кодировании старшей битовой плоскости изображения ЦВЗ посредством задания направления считывания вершин метод является стойким только к атаке первого типа. Если направление считывания вершин не учитывается, то метод является устойчивым только к атаке второго типа.

Тем не менее устойчивость к двум атакам одновременно может быть достигнута с помощью составного встраивания двух ЦВЗ: бинарный ЦВЗ (старшая битовая плоскость) – путем задания порядка обхода, полутоновый ЦВЗ (несколько старших битовых плоскостей, включая первую) – путем циклического сдвига списка вершин.

**6. Исследование качества предложенного метода.** В разделе 1 были перечислены основные требования, выдвигаемые к методам встраивания ЦВЗ. Настоящий раздел резюмирует полученные в работе результаты согласно каждому критерию качества.

1. *Точность (визуальная неразличимость).* Предлагаемый метод защиты авторских прав основан на принципе неискажающего встраивания, обеспечивающем неизменность значений координат вершин, в связи с чем ни злоумышленнику, ни легальному пользователю не удастся визуально определить наличие встроенной информации.

2. *Информационная емкость.* В задаче защиты авторских прав размер встраиваемого ЦВЗ не играет роли, поэтому длина последовательности ЦВЗ была выбрана наименьшей для обеспечения макси-

мальной стойкости к атакам. Однако, как показали исследования раздела 4, потенциальный объем встраиваемой информации достигает 80 бит при использовании детектора на основе пороговой обработки и 60 бит при использовании детектора на основе локальной фильтрации, что говорит о применимости метода в задаче проверки подлинности векторных карт, а также для стеганографической (скрытой) передачи информации внутри векторной карты.

3. *Стойкость.* Результаты экспериментов, приведенные в разделе 5, показывают, что при верно подобранных параметрах формирования шумоподобных изображений ЦВЗ предложенный метод встраивания ЦВЗ в векторные данные является в достаточной мере устойчивым ко всем возможным типам атак, направленных на удаление ЦВЗ. Для каждого преобразования показатели стойкости растут по мере увеличения размера векторной карты, при этом достаточный уровень этих показателей достигается уже при небольших размерах контейнера.

Таблица 4 объединяет результаты анализа стойкости для всех исследуемых типов преобразований. В таблице каждая строка отображает показатели стойкости к конкретному преобразованию (1 – сдвиг; 2 – масштабирование; 3 – поворот; 4 – кадрирование; 5 – добавление объектов; 6 – удаление объектов; 7 – добавление вершин; 8 – удаление вершин; 9 – переупорядочение вершин) в зависимости от размера карты. Плюс обозначает инвариантность к преобразованию;  $V$  – суммарное число вершин;  $V_{max}$  – максимальное число вершин, которые могут быть удалены.

Таблица 4. Результаты исследования стойкости

$P$ , тыс.	2	3	4	6	8	10	20	50	100
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	0°	5°	5°	15°	20°	20°	25°	25°	25°
4	3%	5%	5%	7%	12%	26%	43%	43%	43%
5	$0,05 \cdot P$	$0,15 \cdot P$	$0,21 \cdot P$	$0,5 \cdot P$	$0,61 \cdot P$	$0,72 \cdot P$	$1,93 \cdot P$	$6,34 \cdot P$	$8,83 \cdot P$
6	$0,05 \cdot P$	$0,29 \cdot P$	$0,36 \cdot P$	$0,59 \cdot P$	$0,69 \cdot P$	$0,71 \cdot P$	$0,82 \cdot P$	$0,87 \cdot P$	$0,89 \cdot P$
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	0	$0,2 \cdot V$	$V_{max}$	$V_{max}$	$V_{max}$	$V_{max}$	$V_{max}$	$V_{max}$	$V_{max}$
9	+	+	+	+	+	+	+	+	+

4. *Безопасность.* Непредсказуемость встраиваемых изображений ЦВЗ обеспечивается за счет рандомизации значений импульсов

синтезируемых спектров. Согласно формуле (1) каждый импульс может принимать 1 из 90 значений. Таким образом, для последовательности длины  $L$  существует  $90^{L+1}$  комбинаций вещественной части комплексного спектра и столько же комбинаций мнимой, что в совокупности дает  $90^{2(L+1)}$  различных изображений ЦВЗ для каждой бинарной последовательности из конечного множества мощности  $2^L$ .

5. *Вычислительная сложность.* Далее приведены результаты оценки вычислительной сложности для предлагаемых в составе метода алгоритмов.

Эксперименты проводились на вычислительной машине с характеристиками, приведенными в таблице 5. Полученные результаты приведены в таблицах 6-9.

Таблица 5. Параметры вычислительной машины

Тип обеспечения	Характеристика
Процессор	CPU Intel Core i5-2400, 4-ядерный, 3100 МГц
Оперативная память	16 Гб
Операционная система	Windows 7 Professional (x64)

Таблица 6. Среднее время синтеза шумоподобного изображения

Размер, пикселей	512×512	1024×1024	2048×2048
Время, мс	59	344	1536

Таблица 7. Среднее время встраивания растрового изображения в карту

Размер, полигонов	2500	5000	10000	20000	50000	100000
Время, мс	413	421	470	574	1754	6653

Таблица 8. Среднее время извлечения растрового изображения из карты

Размер, полигонов	2500	5000	10000	20000	50000	100000
Время, мс	69	80	91	115	380	1657

Таблица 9. Среднее время извлечения последовательности ЦВЗ алгоритмом детектирования на основе локальной фильтрации

Размер, пикселей	512×512	1024×1024	2048×2048
Время, мс	611	3589	20079

Согласно результатам проведенных экспериментов, а также согласно данным таблицы 1 обработка больших карт (от 100 тысяч полигональных объектов) и соответствующих им изображений ЦВЗ (2048×2048) требует больших вычислительных ресурсов. Время, необходимое для реализации процедур встраивания и извлечения ЦВЗ, можно сократить путем разбиения больших карт на фрагменты меньшего размера, которые могут быть обработаны как последовательно, так и параллельно.



**7. Заключение.** Предложен метод защиты векторных картографических данных от несанкционированного распространения с помощью стойких цифровых водяных знаков.

Метод сочетает оригинальные авторские идеи, а именно: подход к встраиванию скрытой защитной информации, не искажающий координатную информацию векторных объектов, и синтез шумоподобных сигналов, отображающих битовую последовательность в виде растрового изображения, непосредственно встраиваемого в защищаемые данные.

В сравнении с предыдущими исследованиями авторов, проведенными в рамках решения задач защиты векторных данных, значительно повышена стойкость встраиваемых шумоподобных ЦВЗ путем модификации алгоритма извлечения битовых ЦВЗ.

Проведен анализ качества метода по критериям точности, стойкости, информационной емкости, вычислительной сложности. Результаты всех проведенных исследований подтверждают применимость и эффективность предложенного метода защиты векторных картографических данных, а также его преимущества перед существующими методами встраивания ЦВЗ.

Применимость предложенного метода в задаче защиты авторских прав на векторные карты подтверждается тем, что входящие в его состав алгоритмы не влияют на точность координатных значений и при этом обеспечивают стойкость к аффинным преобразованиям, кадрированию, добавлению, удалению и переупорядочиванию вершин/объектов векторного слоя.

Единственное ограничение накладывает сама идея неискажающего встраивания, основанная на замкнутости полигональных объектов: точки и линии не могут служить контейнером для встраивания.

Развитие предложенного подхода к защите векторных данных планируется вести в следующих направлениях:

- более детальное исследование шумоподобных сигналов, направленное на повышение информационной емкости ЦВЗ и их устойчивости к злоумышленным атакам;
- разработка методов аутентификации векторных данных и алгоритмов локализации нелегитимных изменений;
- разработка алгоритмов встраивания ЦВЗ в трехмерные векторные данные для защиты от несанкционированного распространения и изменений.

**Литература**

1. *Abubahia A., Cocea M.* Advancements in GIS map copyright protection schemes – a critical review // *Multimedia Tools and Applications*. 2017. vol. 76. no. 10. pp. 12205–12231.
2. *Peng Y., Yue M.* A Zero-Watermarking Scheme for Vector Map Based on Feature Vertex Distance Ratio // *Journal of Electrical and Computer Engineering*. 2015. vol. 2015. pp. 1–6.
3. *Li A., Lin B.-X., Chen Y.A.* Study on copyright authentication of GIS vector data based on Zero-watermarking // *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 2008. vol. 37(B4). pp. 1783–1786.
4. *Ren N., Wang Q., Zhu C.* Selective authentication algorithm based on semi-fragile watermarking for vector geographical data // *22nd International Conference on Geoinformatics*. 2014. vol. 1. pp. 1–6.
5. *Da Q. et al.* A Novel Hybrid Information Security Scheme for 2D Vector Map // *Mobile Networks and Applications*. 2018. vol.1. pp. 1–9.
6. *Wang N., Bian J., Zhang H.* RST Invariant Fragile Watermarking for 2D Vector Map Authentication // *International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering*. 2015. vol. 10. no. 4. pp. 155–172.
7. *Kim J.* Robust Vector Digital Watermarking Using Angles and a Random Table // *Advances in Information Sciences and Service Sciences*. 2010. vol. 2. no.4.
8. *Lee S.H., Kwon K.R.* Vector watermarking scheme for GIS vector map management // *Multimedia Tools and Applications*. 2013. vol. 63. no. 3. pp. 757–790.
9. *Peng Z., Yue M., Wu X., Peng Y.* Blind watermarking scheme for polylines in vector geospatial data // *Multimedia Tools and Applications*. 2015. vol. 74. pp. 11721–11739.
10. *Wang Y., Yang C., Zhu C.* A multiple watermarking algorithm for vector geographic data based on coordinate mapping and domain subdivision // *Multimedia Tools and Applications*. 2017. pp. 1–19.
11. *Voigt M., Busch C.* Watermarking 2D-vector data for geographical information systems // *Proceedings of the SPIE, security and watermarking of multimedia content*. 2002. vol. 4675. pp. 621–628.
12. *Ohbuchi R., Ueda H., Endoh S.* Robust Watermarking of Vector Digital Maps // *Proceedings of IEEE International Conference on Multimedia and Expo*. 2002. vol. 1. pp. 577–580.
13. *Peng Y., Lan H., Yue M., Xue Y.* Multipurpose watermarking for vector map protection and authentication // *Multimedia Tools and Applications*. 2017. vol. 77. no.1. pp. 1–21.
14. *Peng F., Yan Z.J., Long M.* A Reversible Watermarking for 2D Vector Map Based on Triple Differences Expansion and Reversible Contrast Mapping // *LNCS*. 2017. vol. 10658. pp. 147–158.
15. *Wang N., Zhao X., Xie C.* RST Invariant Reversible Watermarking for 2D Vector Map // *International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering*. 2016. vol. 11. no. 2. pp. 265–276.
16. *Cao L., Men C., Li X.* Iterative Embedding-Based Reversible watermarking for 2d-Vector Maps // *Proceedings of 17th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. 2010. vol. 1. pp. 3685–3688.
17. *Wang N., Men C.* Reversible Watermarking for 2-D Vector Map Authentication with Localization // *Computer Aided Design Journal*. 2012. vol. 44. no. 4. pp. 230–330.
18. *Выборнова Ю.Д., Сергеев В.В.* Метод защиты векторных карт с использованием изображения ЦВЗ как вторичного контейнера // *Компьютерная оптика*. 2019. Т. 43. № 3. С. 474–483.
19. *Глумов Н.И., Мутекин В.А.* Алгоритм поблочного встраивания стойких ЦВЗ в крупноформатные изображения // *Компьютерная оптика*. 2011. Т. 35. № 3. С. 368–372.

20. *Vybornova Y.D.* Application of spatial interpolation methods for restoration of partially defined images // CEUR Workshop Proceedings. 2018. vol. 2210. pp. 89–95.
21. *Выборнова Ю.Д., Сергеев В.В.* Новый метод встраивания цифровых водяных знаков в векторные картографические данные // Компьютерная оптика. 2017. Т. 41. № 6. С. 913–919.

**Выборнова Юлия Дмитриевна** – канд. техн. наук, младший научный сотрудник, научно-исследовательская лаборатория геоинформатики и информационной безопасности, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарский университет). Область научных интересов: защита данных, криптография, цифровые водяные знаки, обработка изображений. Число научных публикаций – 18. [vybornovamail@gmail.com](mailto:vybornovamail@gmail.com); ул. Лукачева, 39Б, 443086, Самара, Россия; р.т.: 8 (846) 267-49-05.

**Сергеев Владислав Викторович** – д-р техн. наук, профессор, директор, институт информатики, математики и электроники, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарский университет); заведующий лабораторией, лаборатория математических методов обработки изображений, Институт систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: цифровая обработка сигналов, анализ изображений, распознавание образов, геоинформатика, информационная безопасность. Число научных публикаций – около 300. [vserg@geosamara.ru](mailto:vserg@geosamara.ru); ул. Лукачева, 39Б, 443086, Самара, Россия; р.т.: 8 (846) 267-49-06.

**Поддержка исследований.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-07-00474, № 19-29-09045, № 20-37-70053, № 19-07-00138.

Y. VYBORNOVA, V. SERGEEV  
**METHOD FOR PROTECTION OF COPYRIGHT ON VECTOR  
DATA**

---

*Vybornova Y., Sergeev V. Method for Protection of Copyright on Vector Data.*

**Abstract.** The paper proposes a method of copyright protection for vector maps, based on the embedding of raster digital watermarks. The method combines original ideas, namely, a vector data watermarking approach that does not distort the coordinate information of vector objects and embedding of noise-like images that encode a binary sequence. The use of noise-like carrier allows to simplify the verification procedure, and also to ensure the resistance of the hidden bit sequence to distortions, including interpolation errors. In comparison with previous investigations made by the authors when solving problems of vector data protection, the robustness of the embedded noise-like digital watermarks has been significantly increased by developing a new algorithm for detection of the binary sequence hidden in the spectrum of a noise-like image. The purpose of the experimental studies was to assess the attainable probability of correct sequence extraction for various parameters and embedding conditions. The study of information capacity showed that the potential amount of information embedded in each polygon without distorting the watermark sequence depends on the type of a map, namely on the number of vertices that make up each polygon. An experimental study on robustness against potentially possible transformations aimed at maliciously deleting the digital watermark from the vector map is performed. The developed method demonstrates resistance to affine transformations, cropping, addition, removal and reordering of vertices / objects, and, thus, seems to be the optimal solution to the problem of copyright protection for vector data. The analysis of the method quality according to the criteria of accuracy, durability, information capacity, and computational complexity is performed. The results of all conducted studies confirm the efficiency and the effectiveness of the proposed method for vector map protection, as well as its distinct advantage over the prior art.

**Keywords:** Geographic Information Systems, Vector Map, Copyright Protection, Digital Watermarking, Raster Image, Discrete Fourier Transform, Pseudorandom Sequences

---

## References

1. Abubahia A., Cocea M. Advancements in GIS map copyright protection schemes – a critical review. *Multimedia Tools and Applications*. 2017. vol. 76. no. 10. pp. 2205–2231.
2. Peng Y., Yue M. A Zero-Watermarking Scheme for Vector Map Based on Feature Vertex Distance Ratio. *Journal of Electrical and Computer Engineering*. 2015. pp. 1–6.
3. Li A., Lin B.-X., Chen Y.A. Study on copyright authentication of GIS vector data based on Zero-watermarking. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 2008. vol. 37 (B4). pp. 1783–1786.
4. Ren N., Wang Q., Zhu C. Selective authentication algorithm based on semi-fragile watermarking for vector geographical data. *22nd International Conference on Geoinformatics*. 2014. vol. 1. pp. 1–6.
5. Da Q. et al. A Novel Hybrid Information Security Scheme for 2D Vector Map. *Mobile Networks and Applications*. 2018. vol. 1. pp. 1–9.
6. Wang N., Bian J., Zhang H. RST Invariant Fragile Watermarking for 2D Vector Map Authentication. *International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering*. 2015. vol.10. no.4. pp. 155–172.
7. Kim J. Robust Vector Digital Watermarking Using Angles and a Random Table. *Advances in Information Sciences and Service Sciences*. 2010. vol. 2. no. 4.

8. Lee S.H., Kwon K.R. Vector watermarking scheme for GIS vector map management. *Multimedia Tools and Applications*. 2013. vol. 63. no. 3. pp. 757–790.
9. Peng Z., Yue M., Wu X., Peng Y. Blind watermarking scheme for polylines in vector geo-spatial data. *Multimedia Tools and Applications*. 2015. vol. 74. pp. 11721–11739.
10. Wang Y., Yang C., Zhu C. A multiple watermarking algorithm for vector geographic data based on coordinate mapping and domain subdivision. *Multimedia Tools and Applications*. 2017. pp. 1–19.
11. Voigt M., Busch C. Watermarking 2D-vector data for geographical information systems. Proceedings of the SPIE. 2002. vol. 4675. pp. 621–628.
12. Ohbuchi R., Ueda H., Endoh S. Robust Watermarking of Vector Digital Maps. Proceedings of IEEE International Conference on Multimedia and Expo. 2002. pp. 577–580.
13. Peng Y., Lan H., Yue M., Xue Y. Multipurpose watermarking for vector map protection and authentication. *Multimedia Tools and Applications*. 2017. vol. 77. no. 1. pp. 1–21.
14. Peng F., Yan Z.J., Long M. A Reversible Watermarking for 2D Vector Map Based on Triple Differences Expansion and Reversible Contrast Mapping. LNCS. 2017. vol. 10658. pp. 147–158.
15. Wang N., Zhao X., Xie C. RST Invariant Reversible Watermarking for 2D Vector Map. *International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering*. 2016. vol. 11. no. 2. pp. 265–276.
16. Cao L., Men C., Li X. Iterative Embedding-Based Reversible watermarking for 2d-Vector Maps. Proceedings of 17th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). 2010. vol. 1. pp. 3685–3688.
17. Wang N., Men C. Reversible Watermarking for 2-D Vector Map Authentication with Localization. *Computer Aided Design Journal*. 2012. vol. 44. no. 4. pp. 230–330.
18. Vybornova Y.D., Sergeev V.V. [New method for GIS vector data protection based on the use of secondary watermark]. *Komp'yuternaya optika – Computer Optics*. 2019. Issue 43. vol. 3. pp. 474–483. (In Russ.).
19. Glumov N.I., Mitekin V.A. [The new blockwise algorithm for large-scale images robust watermarking]. *Komp'yuternaya optika – Computer Optics*. 2011. Issue 35. vol. 3. pp. 368–372. (In Russ.).
20. Vybornova, Y.D. Application of spatial interpolation methods for restoration of partially defined images. CEUR Workshop Proceedings. 2018. vol. 2210. pp. 89–95.
21. Vybornova Y.D., Sergeev V.V. [A new watermarking method for vector map data]. *Komp'yuternaya optika – Computer Optics*. 2017. vol. 41. no. 6. pp. 913–919. (In Russ.).

**Yuliya Vybornova** – Ph.D., Research Fellow, Laboratory of Geoinformatics and Information Security, Samara National Research University. Research interests: data protection, cryptography, digital watermarking, image processing. The number of scientific publications – 18. vybornovamail@gmail.com; Lukacheva str., 39B, 443086, Samara, Russia; office phone: +7 (846) 267-49-05.

**Vladislav Sergeev** – Ph.D., Dr. Sci., Professor, Director, Institute of Informatics, Mathematics and Electronics, Samara National Research University; Head of the Laboratory, Laboratory of Mathematical Methods for Image Processing, Image Processing Systems Institute of the RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: digital signal processing, image analysis, pattern recognition, geoinformatics, information security. The number of scientific publications is about 300. vsereg@geosamara.ru; Lukacheva str., 39B, 443086, Samara, Russia; office phone: +7 (846) 267-49-06.

**Acknowledgements.** The reported study was funded by RFBR (Russian Foundation for Basic Research): projects № 19-07-00474, № 19-29-09045, № 20-37-70053, № 19-07-00138.

## Руководство для авторов

Взаимодействие автора с редакцией осуществляется через личный кабинет на сайте журнала «Информатика и автоматизация» <http://ia.spcras.ru/>. При регистрации авторам рекомендуется заполнить все предложенные поля данных. Подготовка статьи ведется с помощью текстовых редакторов MS Word 2007 и выше или LaTeX. Объем основного текста (до раздела Литература) - от 20 до 30 страниц включительно. Переносы разрешены. Номера страниц не проставляются. Основная часть текста статьи разбивается на разделы, среди которых являются обязательными: введение, хотя бы один «содержательный» раздел и заключение. Допускается также мотивированное содержанием и структурой материал а выделение подразделов. В основную часть опускается помещать рисунки, таблицы, листинги и формулы. Правила их оформления подробно рассмотрены на нашем сайте в разделе «Руководство для авторов».

### Author guidelines

Interaction between each potential author and the Editorial board is realized through the pesoal account on the website of the journal “Informatics and Automation” <http://ia.spcras.ru/>. At the registration the authors are requested to fill out all data fields in the proposed form. The submissions should be prepared using MS Word 2007, LaTeX. The text of the paper in the main part should not exceed 30 pages. Pages are not numbered; hyphenations are allowed. Certain figures, tables, listings and formulas are allowed in the main section, and their typography is considered in more detail at the journal web.

---

Signed to print 25.01.2021

Printed in Publishing center GUAP, 67, B. Morskaya, St. Petersburg, 190000, Russia

---

The journal is registered in the Russian Federal Agency for Communications and Mass-Media Supervision, certificate ПИ № ФС77-79228 dated September 25, 2020  
Subscription Index П5513, Russian Post Catalog

---

Подписано к печати 25.01.2021. Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 12,32. Заказ № 33.

Тираж 300 экз., цена свободная.

Отпечатано в Редакционно-издательском центре ГУАП, 190000, Санкт-Петербург, Б. Морская, д. 67

---

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций, свидетельство ПИ № ФС77-79228 от 25 сентября 2020 г.

Подписной индекс П5513 по каталогу «Почта России»



ISSN 2713-3192



9 772713 319007 >